# Kedvcsináló a „Geometriafeladatok megoldása szinusztétellel” című íráshoz

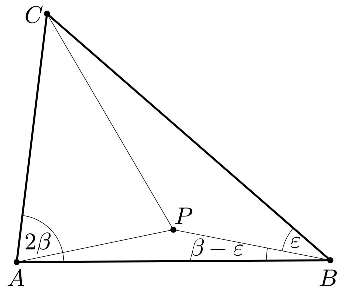
## Bevezetés

A geometriafeladatok megoldásánál a klasszikus, megfelelő objektumok (pl. szögek, hasonlóságok) észrevételén és megfigyelésén alapuló megoldási módszerek mellett számolásos módszerekkel is eredményre juthatunk. Ezek közé tartozik a szögek szinuszának számolásán alapuló megoldásmód – többek között a koordinátageometriai, vektoros/komplex számos és baricentrikus koordinátázó módszerek mellett – melynek fő segédeszköze a szinusztétel (továbbiak a Ceva-tétel és az addíciós képletek). Előnye, hogy alkalmazása másmilyen gondolkodást, ötleteket igényel, mint a klasszikus módszerek, így az azokkal nehezen zöldágra vergődő versenyzőknek is alternatívát nyújt (kevesebb a „vegyük észre, hogy …” típusú rész), miközben nem igényel sokkal több előismeretet. Ugyanakkor alkalmazhatósága korlátozottabb. Ezen módszert mutatja be a „Geometriafeladatok megoldása szinusztétellel” című írásom, mely megtalálható a KöMaL honlapján a cikkek között: `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

A bevezetés után elméleti összefoglalással folytatódó cikk versenyfeladatok megoldásain keresztül példákat hoz a módszer alkalmazhatóságára és további egyéni kidolgozást igénylő, vele megoldható feladatokat tartalmaz. Az ismertető további része ezekből mutat meg részleteket.

## Egy geometriafeladat kidolgozott megoldással

**EGMO/IMO/MEMO 1. válogatóverseny 2019., 3. feladat.** Legyen az $ABC$ háromszögben $CAB\sphericalangle = 2\cdot ABC\sphericalangle$. Tegyük fel, hogy létezik egy $P$ pont a háromszög belsejében, amelyre $AP = BP$ és $CP = AC$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $PBC\sphericalangle = 30°$.




**Megoldás.** Jelöljük a $B$-nél lévő belső szöget $\beta$-val és a $PBC$ szöget, melyről az állítás szól, $\varepsilon$-nal. Számoljunk ki belőlük néhány másik szöget. Mivel $P$ belső pont,

$$PBA\sphericalangle = ABC\sphericalangle - PBC\sphericalangle = \beta - \varepsilon.$$

Mivel az $ABP$ háromszög egyenlő szárú, a $PAB\sphericalangle$ is $\beta - \varepsilon$. Emellett $CAB\sphericalangle = 2\beta$ és $CAP\sphericalangle = \beta + \varepsilon$, az egyenlő szárú $APC$ háromszögben az $APC\sphericalangle$ is $\beta + \varepsilon$. Ezért az $APC$ háromszög harmadik belső szöge $ACP\sphericalangle = 180° - 2\beta - 2\varepsilon$. Mivel az $ABC$ háromszögben a $B$-nél, illetve $A$-nál lévő belső szögek $\beta$, illetve $2\beta$, $ACB\sphericalangle = 180° - 3\beta$ és ebből

$$BCP\sphericalangle = ACB\sphericalangle - ACP\sphericalangle = 180° - 3\beta - (180° - 2\beta - 2\varepsilon) = 2\varepsilon - \beta.$$

$\beta > \varepsilon$ és $180^\circ - 3\beta > 0$, így $60^\circ > \varepsilon$ ($> 0^\circ$).

Most, hogy kiszámoltuk a belső szögeket, jöhet a szinusztétel alkalmazása. A $PBC$ háromszögre

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon},$$

a $PAC$ háromszögre pedig

$$\frac{PA}{PC} = \frac{\sin(180^\circ - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)}.$$

Mivel $AP = BP$, $\frac{PB}{PC} = \frac{PA}{PC}$, így

$$\frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin(180^\circ - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)}.$$

Mivel $\sin(180^\circ - 2\beta - 2\varepsilon) = \sin(2\beta + 2\varepsilon) = 2\cos(\beta + \varepsilon)\sin(\beta + \varepsilon)$, ezért

$$\frac{\sin(180^\circ - 2\beta - 2\varepsilon)}{\sin(\beta + \varepsilon)} = 2\cos(\beta + \varepsilon)$$

(háromszög belső szögeként $\sin(\beta + \varepsilon) \neq 0$ és $\sin\varepsilon \neq 0$). Ezt felhasználva

$$\frac{\sin(2\varepsilon - \beta)}{\sin\varepsilon} = 2\cos(\beta + \varepsilon)$$

és $2\cos(\beta + \varepsilon)\sin\varepsilon = \sin(2\varepsilon - \beta)$. Addíciós tételekből

$$2\cos(\beta + \varepsilon)\sin\varepsilon = 2(\cos\beta\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon)\sin\varepsilon = 2\cos\beta\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2\sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

míg

$$\begin{aligned}\sin(2\varepsilon - \beta) &= \sin 2\varepsilon\cos(-\beta) + \sin(-\beta)\cos 2\varepsilon = \sin 2\varepsilon\cos\beta - \sin\beta\cos 2\varepsilon = \\ &= 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon\cos\beta - (\sin\beta\cos^2\varepsilon - \sin\beta\sin^2\varepsilon) = \\ &= 2\cos\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\beta\cos^2\varepsilon + \sin\beta\sin^2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ezek egyenlőségéből

$$2\cos\beta\cos\varepsilon\sin\varepsilon - 2\sin\beta\sin^2\varepsilon = 2\cos\beta\sin\varepsilon\cos\varepsilon - \sin\beta\cos^2\varepsilon + \sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

így rendezve

$$\sin\beta\cos^2\varepsilon = 3\sin\beta\sin^2\varepsilon,$$

$\sin\beta \neq 0$-val osztva $\cos^2\varepsilon = 3\sin^2\varepsilon$. Mivel $\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon = 1$, ezért ebből $\cos^2\varepsilon = \frac{3}{4}$; mivel $60^\circ > \varepsilon > 0^\circ$, ezért $\cos\varepsilon > 0$. Így

$$\cos\varepsilon = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

és ebből ezen az intervallumon csak $\varepsilon = 30^\circ$ lehet. Tehát $PBC\sphericalangle = 30^\circ$, a feladat állítását beláttuk. $\square$

**A témába vágó további feladatok**

**1. feladat** (Kürschák verseny 1990/2). Az $ABC$ háromszög beírt körének középpontja legyen $K$, a hozzáírt körök középpontjai $A_0$, $B_0$, $C_0$. Jelölje $A_1$ a $BC$ oldal és a $BKC$ szög felezőjének, $B_1$ az $AC$ oldal és az $AKC$ szög felezőjének, $C_1$ pedig az $AB$ oldal és az $AKB$ szög felezőjének a metszéspontját. Igazoljuk, hogy az $A_0A_1$, $B_0B_1$ és $C_0C_1$ egyenesek egy ponton mennek át.

**2. feladat** (IMO 2019 Shortlist G2 – Surányi János emlékverseny 2020/1). Legyen $ABC$ hegyesszögű háromszög, az $A$, $B$ és $C$-ből induló magasságok talppontjai legyenek rendre $D$, $E$, $F$. Legyen $k_b$ és $k_c$ a $BDF$ és $CDE$ háromszögek beírt köre, ezek érintsék a $DF$ és $DE$ szakaszokat rendre az $M$ és $N$ pontokban. Az $MN$ egyenesnek a $k_b$ és $k_c$ körökkel vett másik metszéspontja rendre $P$ és $Q$. Igazoljuk, hogy $MP = NQ$.

**3. feladat** (IMO 2001/5). Az $ABC$ háromszögben legyen $AP$ a $BAC\sphericalangle$ felezője, ahol $P$ a $BC$ oldalon van, $BQ$ pedig az $ABC\sphericalangle$ felezője, ahol $Q$ a $CA$ oldalon van. Tudjuk, hogy $BAC\sphericalangle = 60^\circ$ és hogy $AB + BP = AQ + QB$.

Mik az $ABC$ háromszög szögeinek lehetséges értékei?

**Füredi Erik**

## 60. Rátz László Vándorgyűlés

**2021. július 1–3.**

A koronavírus-világjárvány miatt a Bolyai János Matematikai Társulat a 2021. évi vándorgyűlést online formában rendezte meg. Az eseményről, illetve annak előkészületeiről, az online formáról hosszú beszámoló olvasható az Érintő Elektronikus Matematikai Lapok szeptemberi számában (`https://ematlap.hu/hirek-ujdonsagok-2021-4/1120-a-60-online-ratz-laszlo-vandorgyules`).

Nagyon sajnáltuk, hogy nem találkozhattunk személyesen, de az online-nak előnye is van: utólag az összes előadás megtekinthető a vándorgyűlés honlapján (`https://www.bolyai.hu/60-ratz-laszlo-vandorgyules`).

A 2021. évi Beke Manó Emlékdíjas tanárok méltatását is meghallgathattuk, a díjazottak: **Czimmermann József, Dr. Máder Attila, Fonyóné Németh Ildikó, Hujter Bálint, Kozma Lászlóné, Molnár Judit** és **Dr. Molnár István** (megosztott díj) és **Tomcsányi Szabó Katalin.**

Az általános iskolás és középiskolás tanárversenyt is online rendezték meg, a feladatokat és az eredményeket külön közöljük.

A 2022-es vándorgyűlés tervezett helyszíne már harmadik éve Eger, nagyon reméljük, hogy ezúttal már személyesen vehetünk részt ezen a nagy múltú és színvonalas eseményen.