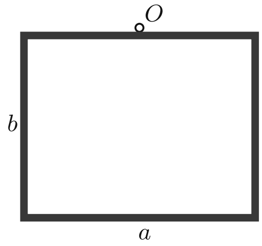
Sokszög alakú keret tehetetlenségi nyomatéka és lengésideje

Bevezetés



1. ábra

Gyakran tapasztaljuk, hogy a falon lévő kép ferdén áll. Meg kell igazítani, hogy a képkeret ismét függőlegesen álljon. Felmerül a kérdés, hogy hogyan lendülne vissza a képkeret, ha az nem érintkezne a fallal, más szóval ha a képkeret súrlódás nélkül lengedezne a felfüggesztési pont körül. Az *1. ábrán* vékony rudakból összeállított, a és b oldalhosszúságú téglalap alakú képkeret látható, amely az O pont körül a saját síkjában periodikus mozgást végezhet.

Ebben a cikkben arra keresünk választ, hogy az egyenletes tömegeloszlású, vékony rudakból összeragasztott sokszög alakú keret hogyan mozog a keret síkjában, ha azt az egyensúlyi helyzetéből kissé kitérítjük. Mennyi lesz a keret lengésének periódusideje kis kitérések esetén? Hogyan határozhatjuk meg ezt a periódusidőt? A válasz egyszerű: a rendszer fizikai ingának tekinthető, melynek periódusideje

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{mgs}}, \tag{1}$$

ahol Θ az inga O pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, m az inga tömege, s pedig az inga tömegközéppontja és a felfüggesztési pont távolsága. Innen látható, hogy tetszőleges, vékony rudakból összerakott sokszög alakú keret lengésidejének kiszámításához a rendszer tehetetlenségi nyomatékát és a tömegközéppontjának helyét kell meghatározni. A továbbiakban egy általános módszert ismertetünk a sokszög alakú keret tehetetlenségi nyomatékának meghatározásra. A formula alkalmazásaként kiszámítjuk egy vízszintes rúd, egy általános háromszög alakú keret, az 1. ábrán látható téglalap alakú keret, egy szabályos sokszög alakú keret lengésének periódusidejét, egy ötágú csillag alakú keret vizsgálatát pedig a pontversenyben kitűzött feladatok között találhatjuk meg.

Általános eset

Egy rudakból összeállított, tetszőleges sokszög alakú keret tehetetlenségi nyomatékát kiszámíthatjuk egyetlen rúd tehetetlenségi nyomatéka alapján. Ezért elsőként a *2. ábrán* látható, elhanyagolható vastagságú rúd tehetetlenségi nyomatékát határozzuk meg. A rúd helyzetét a végpontjaiba mutató $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ vektorokkal adjuk meg.

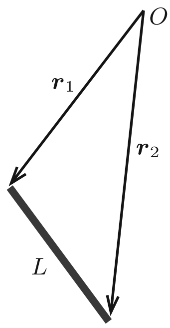
Az m tömegű és $L = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$ hosszúságú rúd súlypontjának (vagyis a szakasz felezőpontjának) helyvektora $\boldsymbol{r}_S = \frac{\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2}{2}$. A rúd tehetetlenségi nyomatéka az O ponton átmenő és a síkra merőleges irányú tengelyre vonatkoztatva:

$$\Theta = \frac{1}{12}mL^2 + m|\boldsymbol{r}_S|^2, \tag{2}$$

ahol az első tag egy vékony rúd súlypontján átmenő, a rúdra merőleges irányú tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka, míg a második tag a Steiner-tételnek megfelelő járulék a tehetetlenségi nyomatékhoz, ha a forgástengely nem a rúd súlypontján, hanem azzal párhuzamosan az O ponton megy át.

Könnyen belátható, hogy $L^2 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = \boldsymbol{r}_1^2 - 2\boldsymbol{r}_2\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2^2$. ($\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2$ a két vektor skalárszorzata.) Felhasználva L és $\boldsymbol{r}_S$ fenti alakját a tehetetlenségi nyomaték egyszerű algebrai átalakítással kifejezhető a rúd két végpontjának $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ helyvektorával:

$$\Theta = \frac{m}{3}\left(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_2 + \boldsymbol{r}_2^2\right). \tag{3}$$



2. ábra

Az alábbi példákban a szükséges számolásokhoz célszerű levezetni Θ egy másik alakját, amelyben a skalárszorzatot kiküszöböljük. A fentiekből látjuk, hogy $\boldsymbol{r}_1\boldsymbol{r}_1 = \left(\boldsymbol{r}_1^2 + \boldsymbol{r}_2^2 - L^2\right)/2$, és ezt a tehetetlenségi nyomaték (3) képletébe beírva kapjuk:

$$\Theta = \frac{m}{6}\left(3\boldsymbol{r}_1^2 + 3\boldsymbol{r}_2^2 - L^2\right). \tag{4}$$

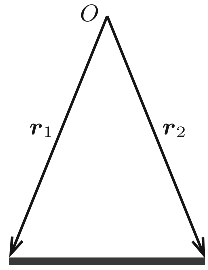
A továbbiakban a (3) és a (4) formulákat fogjuk alkalmazni különböző alakú keretek tehetetlenségi nyomatékának a kiszámítására.

Vízszintes rúd

Korábban a KöMaL hasábjain e cikk szerzője az alábbi feladatot tűzte ki [1]: *„Egy L hosszúságú rudat a két végéhez erősített, azonos hosszúságú fonalak segítségével közös pontban felfüggesztünk. A rudat a fonalak síkjában kicsit kitérítjük. Milyen hosszúságú fonalak esetén lesz a rúd kis lengéseinek periódusideje a lehető legkisebb, és mekkora ebben az esetben a lengésidő?”*

A feladatot (a KöMaL-ban megjelent megoldás helyett) most a (4) formula alkalmazásával oldjuk meg. Legyen az L hosszúságú, m tömegű rúd két végpontjába mutató vektor a *3. ábrán* O-val jelölt felfüggesztési ponthoz viszonyítva $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$. A két fonal hossza $\ell = |\boldsymbol{r}_1| = |\boldsymbol{r}_2|$, valamint a rúd hossza $L = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$. A (4) formula alapján a rúd tehetetlenségi nyomatéka az O pontra vonatkoztatva:

$$\Theta = \frac{m}{6}(6\ell^2 - L^2). \tag{5}$$



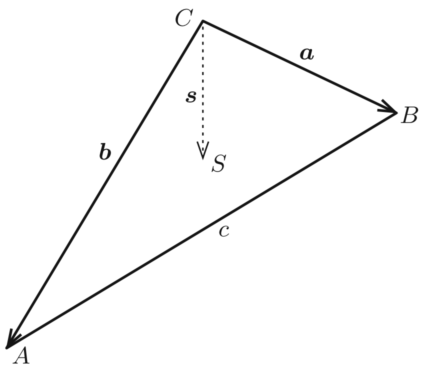
3. ábra

A rúd súlypontja $s = \sqrt{\ell^2 - \frac{L^2}{4}}$ távolságra van az O ponttól, és így a rúd lengésének periódusideje (1) alapján:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{6\ell^2 - L^2}{3g\sqrt{4\ell^2 - L^2}}}, \tag{6}$$

ami megegyezik a KöMaL-ban közölt eredménnyel. Innen – a hivatalos megoldásnak megfelelően – a lengésidő akkor lesz minimális, ha $\ell = L/\sqrt{3}$.

Háromszög alakú keret



4. ábra

Legyen a háromszög alakú keret oldalainak hossza a, b és c. A keretet a *4. ábrának* megfelelően a C pontban egy kis ékkel alátámasztjuk, majd a háromszög síkjában kicsit kitérítjük.

Mekkora lesz a keret kis szögkitérésű lengéseinek periódusideje? Legyen a C pont a koordináta-rendszer középpontja, és jelöljük a C pontból az A, illetve a B pontba mutató vektorokat $\boldsymbol{a}$-val és $\boldsymbol{b}$-vel! Ekkor az A ponttal szemközti rúd végpontjainak helyvektora $\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{a}$, a B ponttal szemközti rúd végpontjainak helyvektora $\mathbf{0}$ és $\boldsymbol{b}$, végül a C ponttal szemközti rúd végpontjainak helyvektora $\boldsymbol{a}$ és $\boldsymbol{b}$. Legyen λ az egységnyi hosszra vonatkoztatott tömeg. Ha a keret teljes tömege m, akkor $\lambda = m/(a+b+c)$. Ezek ismeretében a (3) formula alapján a háromszög alakú keret tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \frac{1}{3}\lambda a a^2 + \frac{1}{3}\lambda b b^2 + \frac{1}{3}\lambda c(a^2 + b^2 + \boldsymbol{ab}). \tag{7}$$

A fenti képletben az $\boldsymbol{ab}$ skalárszorzatot az alábbiak szerint kifejezhetjük a háromszög oldalainak a, b és c hosszával. A C ponttal szemközti oldal hossza c, és $c^2 = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2$. Innen $c^2 = a^2 + b^2 - 2\boldsymbol{ab}$, amiből kapjuk, hogy:

$$\boldsymbol{ab} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}. \tag{8}$$

A (7) egyenletbe λ kifejezését beírva és (8)-at felhasználva kisebb algebrai átalakítások után megkapjuk a tehetetlenségi nyomaték végső alakját:

$$\Theta = \frac{m}{6}(2a^2 + 2b^2 - c^2 + ac + bc - 2ab). \tag{9}$$

Természetesen ugyanezt az eredményt kapjuk az $\boldsymbol{ab}$ skalárszorzat kiszámítása nélkül is a (4) formula alapján. Ugyanakkor mégse volt haszontalan kiszámítani ezt a skalárszorzatot, ugyanis ahogy az alábbiakban látni fogjuk, a súlypont és a felfüggesztési pont távolságának kiszámításához szükségünk lesz erre.

Számoljuk ki a keret tömegközéppontjának s távolságát a C ponttól! A tömegközéppont $\boldsymbol{s}$ helyvektora:

$$\boldsymbol{s} = \frac{\lambda a \frac{\boldsymbol{a}}{2} + \lambda b \frac{\boldsymbol{b}}{2} + \lambda c \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}}{\lambda(a+b+c)} = \frac{\boldsymbol{a}(a+c) + \boldsymbol{b}(b+c)}{2(a+b+c)}, \tag{10}$$

és annak hossza:

$$s = \sqrt{\boldsymbol{s}^2} = \sqrt{\frac{a^2(a+c)^2 + b^2(b+c)^2 + 2\,\boldsymbol{ab}(a+c)(b+c)}{4(a+b+c)^2}} = \tag{11}$$

$$= \sqrt{\frac{a^3+b^3-c^3+2a^2c+2b^2c-abc}{4(a+b+c)}}.$$

(Az utolsó lépésnél felhasználtuk az $\boldsymbol{ab}$ skalárszorzat (8) képletét.)

Mindezeket összevetve a lengésidő (1) alapján:

$$T_{\mathrm{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{a+b+c}}{3g}} \sqrt{\frac{2a^2+2b^2-c^2+ac+bc-2ab}{\sqrt{a^3+b^3-c^3+2a^2c+2b^2c-abc}}}. \tag{13}$$

Sikerült kifejezni a lengésidőt csak a háromszög oldalainak hosszával. Hasonló eredményt kapunk, ha a háromszög alakú keret az A, illetve a B ponton van aláékelve, csak az a, b és c oldalakat kell ciklikusan cserélni a fenti képletben.

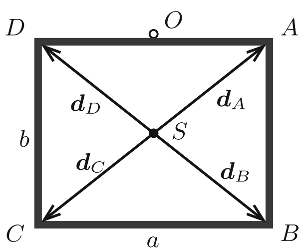
Numerikus példaként legyen $a=70$ cm, $b=60$ cm és $c=30$ cm. Ekkor $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel számolva a $T_{\mathrm{A}} = 1{,}35$ s, $T_{\mathrm{B}} = 1{,}40$ s és $T_{\mathrm{C}} = 1{,}43$ s értékeket kapjuk.

Megjegyzések. 1. Ha $a=b=c$, akkor $T = \pi\sqrt{2\sqrt{3}}\,\sqrt{a/g}$.

2. A keret tömegközéppontja nem egyezik meg a háromszög súlypontjának jól ismert helyével, mert ez utóbbi a háromszög alakú, homogén síklapra vonatkozik. Esetünkben a súlypont a háromszög oldalfelező pontjait összekötő egyenesekből kapott háromszögbe rajzolható kör középpontja lesz (lásd [2]-ben a 132. feladatot).

Téglalap alakú keret

Ebben a részben kiszámoljuk a bevezetőben említett téglalap alakú keret lengésidejét. Először meg kell határozni az *5. ábrán* látható O ponton átmenő, a lap síkjára merőleges irányú forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot.



5. ábra

Ha a keret teljes tömege m, akkor az egységnyi hosszra vonatkoztatott tömeg $\lambda = \frac{m}{2(a+b)}$. Az S súlypontból a téglalap A, B, C és D sarkába mutató vektorok hossza azonos:

$$|\boldsymbol{d}_A| = |\boldsymbol{d}_B| = |\boldsymbol{d}_C| = |\boldsymbol{d}_D| = d = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

A (4) formula alapján a súlypontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték:

$$\Theta_S = 2\frac{\lambda a}{6}(6d^2 - a^2) + 2\frac{\lambda b}{6}(6d^2 - b^2) = \frac{m}{12}(a+b)^2. \tag{13}$$

Alkalmazva a Steiner-tételt a téglalap alakú keret tehetetlenségi nyomatéka az O pontra vonatkoztatva:

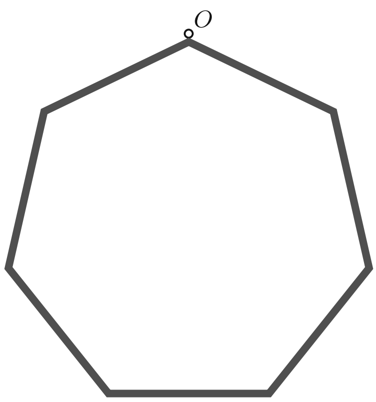
$$\Theta = \Theta_S + m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{m}{12}(a^2 + 2ab + 4b^2). \tag{14}$$

A téglalapkeret súlypontja a téglalap közepe, ezért az O pont és a súlypont távolsága $s = b/2$. Végül a lengésidő (1) alapján:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + 2ab + 4b^2}{6bg}}. \tag{15}$$

Numerikus példaként legyen $a = 50$ cm és $b = 100$ cm. Ekkor $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$-tel számolva $T = 1{,}88$ s értéket kapunk.

Szabályos sokszög alakú keret



6. ábra

Ebben a részben a szabályos sokszög alakú keret lengésidejét számítjuk ki. Példaként egy $N = 7$ oldalú szabályos sokszöget vizsgálunk, ami az egyik (O-val jelölt) csúcspontjában van felfüggesztve (*6. ábra*).

Legyen a sokszög köré írt kör sugara R. A számításokat jelentősen egyszerűsíthetjük, ha a tehetetlenségi nyomatékot először a súlypontra, majd a Steiner-tétel alkalmazásával a felfüggesztési pontra vonatkoztatva számoljuk ki. Vegyük észre, hogy a keret közepéből, azaz a keret súlypontjából az N-szög minden élének a végpontjaiba mutató vektorok hossza R, és egymással $2\pi/N$ szöget zárnak be. Ezért a (3) formulában ezen vektorok skalárszorzata $R^2\cos\frac{2\pi}{N}$, és minden oldalnak ugyanannyi lesz a járuléka a keret teljes tehetetlenségi nyomatékához, ami így

$$\Theta_S = \frac{Nm}{3}\left(2R^2 + R^2\cos\frac{2\pi}{N}\right).$$

Végül, ha a vonatkoztatási pontot eltoljuk R távolsággal a felfüggesztési pontba, akkor a keret teljes tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_S + NmR^2 = \frac{MR^2}{3}\left(5 + \cos\frac{2\pi}{N}\right),$$

ahol $M = Nm$ a keret teljes tömege. A súlypont távolsága az O ponttól $s = R$. Végül a lengésidő (1) alapján:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5+\cos\frac{2\pi}{N}}{3}}\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Szabályos háromszög esetén a lengésidőre

$$T = \sqrt{6}\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 7{,}70\sqrt{\frac{R}{g}}$$

adódik, ami megegyezik a (12) képletből számolt értékkel az $a = b = c = \sqrt{3}\,R$ helyettesítéssel. A 6. ábrán látható hétszögre a lengésidő:

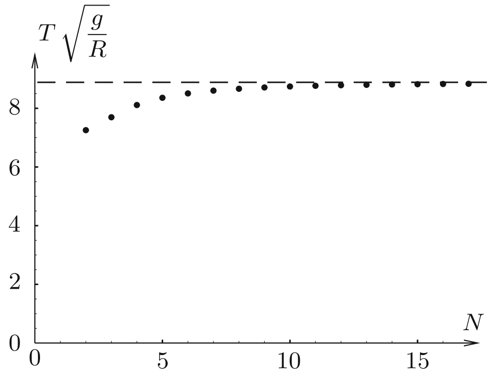
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{5+\cos\frac{2\pi}{7}}{3}}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 8{,}60\sqrt{\frac{R}{g}}\,.$$

Érdemes megvizsgálni az $N \to \infty$ határesetet. Ekkor a (17) képletben $\cos\frac{2\pi}{N} \to$ $\to 1$, és

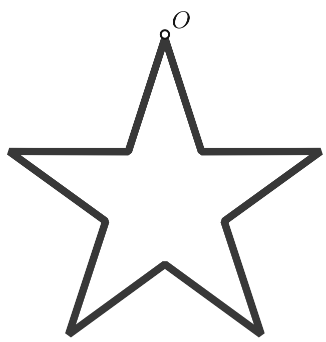
$$T \to 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 8{,}89\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Ez az eredmény fizikailag könnyen magyarázható. A szabályos sokszög egy R sugarú körhöz tart. Ennek az M tömegű karikának a tehetetlenségi nyomatéka az O pontra nézve: $\Theta = 2MR^2$. A súlypont $s = R$ távolságra van az O ponttól, és így a lengésidő (1) szerint $T = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$, ami egyezik a fenti számolással.

A *7. ábra* a T lengésidő N-től való függését mutatja $\sqrt{R/g}$ egységekben. Látható, hogy N növelésével a lengésidő – a várakozással összhangban – elég gyorsan tart a karika lengésidejéhez, ami az ábrán a szaggatott vonalnak felel meg.



7. ábra



8. ábra

Ötágú csillag alakú keret

Az általános módszer hatékonyságát illusztrálva kiszámíthatjuk egy bonyolultabb alakzat, például a *8. ábrán* látható ötágú csillag lengésidejét is, ha azt az egyik csúcsánál függesztjük fel. Ennek a számolásnak elvégzését azonban az Olvasóra bízzuk. (Lásd a **P. 5365.** kitűzött feladatot a 571. oldalon.)

Összefoglalás

Elhanyagolható vastagságú, egyenes rudakból összerakott sokszög alakú keretnek a síkjában történő lengéseit vizsgáltuk kis szögkitérések esetén, ha a keret egyik sarkán van felfüggesztve vagy aláékelve. Levezettünk egy általános képletet egy darab egyenes rúdnak a felfüggesztési pontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékára a rúd végpontjainak helyvektorai ismeretében (lásd a (3) és (4) egyenleteket). A képleteket felhasználva meghatároztuk egy vízszintes rúd, a háromszög, a téglalap, a szabályos N-szög alakú keret tehetetlenségi nyomatékát és a lengésének periódusidejét, és megfogalmaztuk ugyenezt a kérdést egy ötágú csillag alakú keretre is.

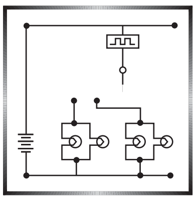
A fenti példák jól illusztrálják a módszer hatékonyságát. Az itt ismertetett módszerrel más alakú keret tehetetlenségi nyomatéka és lengésideje is könnyen kiszámítható.

Ajánlott irodalom

[1] *KöMaL* 2012. évi márciusi szám, 185. old.: **P. 4427.** számú feladat. A megoldás a 2012. évi decemberi szám 559. oldalán jelent meg.

[2] Gnädig Péter, Honyek Gyula, Vigh Máté: *333+ furfangos feladat fizikából,* Typotex Elektronikus Kiadó Kft., Budapest 2017.

Cserti József



Fizika gyakorlatok megoldása

G. 751. *A síktükör által képződő kép ugyanakkora, mint a tárgy. Ha közelebb megyünk a tükörhöz, akkor mégis nagyobbnak látjuk magunkat, mert megnő a látószögünk. A hátunkat úgy tudjuk síktükörrel megnézni, ha két síktükröt használunk, melyek közelítőleg egymással szemben, párhuzamosan helyezkednek el.*

A két tükör közé hova kell állnunk, hogy maximális látószögben lássuk a hátunkat?

(*4 pont*)

Megoldás. A síktükör által létrehozott kép mérete ugyanakkora, mint a tágy mérete, és ez igaz a többszörös tükröződés után kialakuló képekre is. Ezek sze-