

**B. 5213.** Igazoljuk, hogy ha  $a, b, c$  pozitív valós számok, akkor

$$c\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + a\sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq b\sqrt{c^2 + a^2 + ca}.$$

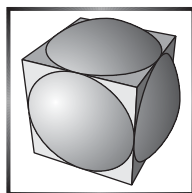
Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

(5 pont)

Javasolta: *Schultz János* (Szeged)

**Beküldési határidő: 2022. január 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>



**Az A pontversenyben kitűzött  
nehezebb feladatok  
(812–814.)**

**A. 812.** Két játékos a következő játékot játssza: van két kupac, melyekből felváltva kell kavicsokat elvenniük, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ha a kupacok mérete egy adott pillanatban  $A$  és  $B$ , akkor a soron következő játékos valamelyik kupacból elveheti  $A$  egy többszörösét vagy  $B$  egy többszörösét.

Határozzuk meg azokat az  $(k, n)$  számpárokat, melyekre a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha kezdetben az egyik kupacban  $k$ , a másikban pedig  $n$  darab kavics van.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

**A. 813.** Legyen  $p$  prímszám és  $k$  pozitív egész. Legyen továbbá

$$t = \sum_{j=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{p^j} \right\rfloor.$$

a) Legyen  $f(x)$  egy egész együtthatós, 1 főegyütthatós,  $k$ -adfokú polinom, amelynek a konstans tagját osztja  $p$ . Bizonyítsuk be, hogy létezik  $n \in \mathbb{N}$ , amelyre  $p \mid f(n)$ , de  $p^{t+1} \nmid f(n)$ .

b) Bizonyítsuk be, hogy a fenti állítás éles, azaz létezik olyan egész együtthatós, 1 főegyütthatós,  $k$ -adfokú  $g(x)$  polinom, amelynek a konstans tagját osztja  $p$ , és ha egy  $n \in \mathbb{N}$  esetén  $p \mid g(n)$  teljesül, akkor  $p^t \mid g(n)$  is igaz.

Javasolta: *Szabó Kristóf* (Budapest)

**A. 814.** Adott a síkon 66 különböző pont úgy, hogy nem fedhetők le 10 darab egyenessel. Bizonyítandó, hogy ekkor kiválasztható közülük 66 pont úgy, hogy már azok sem fedhetők le 10 darab egyenessel.

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

**Beküldési határidő: 2022. január 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>