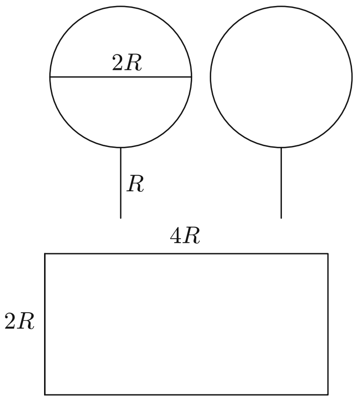


C. 1695. Egy körvonalhoz rá merőlegesen hozzárögzítünk egy sugárnyi (R) hosszúságú szakaszt (lásd az *ábrát*). Belefér-e két, ilyen szakasszal ellátott kör („serpenyő") egy olyan téglalapba, aminek az egyik oldala a kör átmérője ($2R$), a másik pedig kétszer akkora ($4R$)? Az alakzatok és a téglalap érinthetik, de nem metszhetik és nem fedhetik egymást.

Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

C. 1696. Adottak az a és a b párhuzamos egyenesek, melyeken kijelölünk rendre 10, illetve 15 darab pontot. Tekintsük az összes olyan szakaszt, melynek egyik végpontja az a, másik pedig a b egyenes kijelölt pontjai közül való. Legfeljebb hány metszéspontja lehet összesen ezeknek a szakaszoknak?

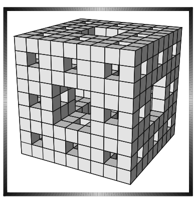
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1697. Az ABC szabályos háromszögben a BC, CA, AB oldalakon rendre kijelöltük a D, E, F belső pontokat úgy, hogy DEF szabályos háromszög legyen. Ezután a BC és AC oldalakra kifelé a BDA' és AEB' szabályos háromszögeket rajzoltuk. Bizonyítsuk be, hogy az AB oldalon van olyan pont, amelyből az $A'E$ és $B'D$ szakaszok mindegyike derékszögben látszik.

C. 1698. Zoli nem szereti a könyveket, ám elhatározza, hogy ennek ellenére összesen pontosan 2021 oldalt fog elolvasni a 2021. évben, egymást követő napokon. Úgy tervezi, hogy minden nap egy oldallal többet olvas, mint az előző napon. Hány oldalt olvasson első napon, ha tudjuk, hogy Zoli a lehető legtöbb napra szeretné elnyújtani a 2021 oldal elolvasását, ám időhiány miatt nem tud 100 oldalnál többet olvasni egy nap?

Javasolta: *Sáfár Lajos* (Ráckeve)

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5206–5213.)

B. 5206. Egy n-jegyű $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ számot *hegyszerűnek* nevezünk, ha van olyan $1 \leqslant k \leqslant n$ egész, amelyre $a_1, a_2, \ldots, a_k$ szigorúan monoton növekvő, míg

$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ szigorúan monoton csökkenő sorozat. (Például az 1, 121, 1231 számok hegyszerűek, de az 1442 és az 12313 nem hegyszerűek.) Hány hegyszerű szám van?

(*3 pont*)

B. 5207. Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geqslant 2$ természetes számra léteznek olyan $2 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ pozitív egész számok, amelyekre

$$x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_n!$$

négyzetszám.

(*4 pont*)

B. 5208. Egy kör AB és CD húrjai merőlegesek egymásra, a húrok egyenesei a körön kívüli P pontban metszik egymást; a P-ből a körhöz húzott érintőszakasz hossza e. Mutassuk meg, hogy az AD és BC szakaszok hosszainak mértani közepe legalább $\sqrt{2}\,e$.

(*4 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5209. Egy 2022 elemű, egészekből álló halmaznak legfeljebb hány olyan kételemű részhalmaza lehet, melyre a két elem összege szintén a halmazhoz tartozik?

(*5 pont*)

B. 5210. A $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ és $\mathcal{P}_3$ parabolák fókuszpontja közös, bármely kettő közülük pontosan kettő pontban metszi egymást. A $\mathcal{P}_i$ és $\mathcal{P}_j$ parabolák két metszéspontjára illeszkedő egyenest jelölje e_{ij}. Mutassuk meg, hogy az e_{12}, e_{13} és e_{23} egyenesek illeszkednek egy közös pontra.

(*5 pont*)

B. 5211. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet:

$$5^x - 2^y = 1.$$

(*5 pont*)

B. 5212. Igazoljuk, hogy létezik olyan pozitív egész szám, amely legalább 2021-féleképpen állítható elő úgy, hogy egy (tízes számrendszerben felírt) pozitív egész számhoz hozzáadjuk a számjegyeinek összegét.

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

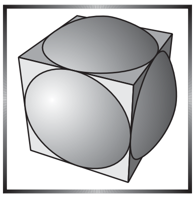
B. 5213. Igazoljuk, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$c\sqrt{a^2+b^2-ab}+a\sqrt{b^2+c^2-bc}\geqslant b\sqrt{c^2+a^2+ca}\,.$$

Milyen esetben teljesül az egyenlőség?

(*5 pont*) Javasolta: *Schultz János* (Szeged)

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (812–814.)

A. 812. Két játékos a következő játékot játssza: van két kupac, melyekből felváltva kell kavicsokat elvenniük, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Ha a kupacok mérete egy adott pillanatban A és B, akkor a soron következő játékos valamelyik kupacból elveheti A egy többszörösét vagy B egy többszörösét.

Határozzuk meg azokat az (k,n) számpárokat, melyekre a második játékosnak van nyerő stratégiája, ha kezdetben az egyik kupacban k, a másikban pedig n darab kavics van.

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 813. Legyen p prímszám és k pozitív egész. Legyen továbbá

$$t=\sum_{j=0}^{\infty}\left\lfloor\frac{k}{p^j}\right\rfloor.$$

a) Legyen $f(x)$ egy egész együtthatós, 1 főegyütthatós, k-adfokú polinom, amelynek a konstans tagját osztja p. Bizonyítsuk be, hogy létezik $n\in\mathbb{N}$, amelyre $p\mid f(n)$, de $p^{t+1}\nmid f(n)$.

b) Bizonyítsuk be, hogy a fenti állítás éles, azaz létezik olyan egész együtthatós, 1 főegyütthatós, k-adfokú $g(x)$ polinom, amelynek a konstans tagját osztja p, és ha egy $n\in\mathbb{N}$ esetén $p\mid g(n)$ teljesül, akkor $p^t\mid g(n)$ is igaz.

Javasolta: *Szabó Kristóf* (Budapest)

A. 814. Adott a síkon 666 különböző pont úgy, hogy nem fedhetők le 10 darab egyenessel. Bizonyítandó, hogy ekkor kiválasztható közülük 66 pont úgy, hogy már azok sem fedhetők le 10 darab egyenessel.

Javasolta: *Hujter Mihály* (Budapest)

Beküldési határidő: 2022. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`