Matematika feladatok megoldása

B. 5145. *Mutassuk meg, hogy azoknak az n hosszúságú nullákból és egyesekből álló sorozatoknak a száma, amelyekben pontosan k-szor fordul elő, hogy 0 után 1 következik, éppen* $\binom{n+1}{2k+1}$.

(*4 pont*) (*Angol olimpiai válogatóverseny feladata*)

I. megoldás. Alakítsuk át a számsorozatokat úgy, hogy minden szám helyét jelölje egy pont és ha két szomszédos szám nem egyezik meg, akkor a második után írjunk be egy strigulát. Egy blokknak tekintjük a két szomszédos strigula közötti számokat. Tudjuk, hogy k-szor fordul elő, hogy 0 után 1 van. Válasszuk szét az eseteket a legelső, illetve az utolsó szám alapján.

1. eset. A sorozat 0-val kezdődik, és 1-re végződik. Ekkor az $n-1$ helyre $2k-1$ strigula kerül ($2k$ darab blokk van), ezért ezeknek az eseteknek a száma éppen $\binom{n-1}{2k-1}$, hiszen két pont közé legfeljebb egy strigula kerülhet.

2. eset. Ha a sorozat 0-val kezdődik, és 0-ra végződik, akkor $2k+1$ darab blokk keletkezik, ezért az esetek száma $\binom{n-1}{2k}$.

3. eset. Ha a sorozat 1-gyel kezdődik, és 1-re végződik, akkor is $2k+1$ darab blokk keletkezik, ezért az esetek száma ebben az esetben is $\binom{n-1}{2k}$.

4. eset. A sorozat 1-gyel kezdődik, és 0-ra végződik. Ekkor az $n-1$ helyre $2k+1$ strigula kerül, így már $2k+2$ darab blokk van. Az esetek száma $\binom{n-1}{2k+1}$.

Összesen

$$\binom{n-1}{2k-1}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}$$

ilyen sorozat van.

A kifejezés átalakításához alkalmazzuk a következő azonosságot:

$$\binom{a-1}{b-1}+\binom{a-1}{b}=\binom{a}{b}.$$

Ez azért igaz, mert egyrészt egy a fős csoportból egy b főből álló focicsapatot $\binom{a}{b}$-féleképpen választhatunk ki. Másrészt, ha például Aladár tagja a társaságnak, akkor olyan focicsapatot, amelynek Aladár is tagja $\binom{a-1}{b-1}$-féleképpen választhatunk ki. Olyan focicsapatot pedig, amelyben Aladár nincs benne $\binom{a-1}{b}$ különböző módon állíthatunk össze. Ezek összege éppen egyenlő az összes lehetséges b fős focicsapat számával. Ezzel a fenti azonosságot igazoltuk.

Most alkalmazzuk az azonosságot először 2-2 tag; majd újból a kapott 2 tag összeadására:

$$\binom{n-1}{2k-1}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}=\binom{n}{2k}+\binom{n}{2k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Dezső Kende Barnabás (Budapest XIV. kerületi Szent István Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Definiáljunk két függvényt. Legyen $f_1(n,k)$ azon n hosszú, nullákból és egyesekből álló számsorozatok száma, amelyek 1-gyel kezdődnek, és 0 után éppen k-szor jön 1, illetve $f_0(n,k)$ azon n hosszú, nullákból és egyesekből álló számsorozatok száma, amelyek 0-val kezdődnek, és 0 után éppen k-szor jön 1.

Indukcióval azt fogjuk belátni, hogy $f_0(n,k)=\binom{n}{2k}$ és $f_1(n,k)=\binom{n}{2k+1}$.

Ha $n=1$, akkor $f_0(1,k)=\binom{1}{2k}$, amelynek értéke $k=0$ esetén 1, a többi esetben 0, ami megfelel a számsorozatok számának, és $f_1(1,k)=\binom{1}{2k+1}$, amelynek értéke $k=0$ esetén 1, egyébként 0, ami szintén megfelelő.

Az 1-gyel kezdődő, n hosszú sorozatok száma (ahol k-szor fordul elő a 01) ugyanaz, mint az $n-1$ hosszú ilyen sorozatoké, mert az első és a második tag között nem történhet meg, hogy 0 után 1 jön. Így $f_1(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k)$. A 0-val kezdődő sorozatok esetén, amennyiben a második helyen 1 van, akkor csak $(k-1)$-szer kell még előfordulnia a 01-nek, mert egyszer már előfordult. Így $f_0(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k-1)$.

Tegyük fel, hogy $n-1$-re igaz az indukciós feltevés. Ekkor

$$f_1(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k)=\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k+1}=\binom{n}{2k+1}$$

és

$$f_0(n,k)=f_0(n-1,k)+f_1(n-1,k-1)=\binom{n-1}{2k}+\binom{n-1}{2k-1}=\binom{n}{2k}.$$

Ezzel az indukció készen van.

Ekkor az összes ilyen számsorozat száma:

$$f_0(n,k)+f_1(n,k)=\binom{n}{2k}+\binom{n}{2k+1}=\binom{n+1}{2k+1}.$$

Lovas Márton (Békásmegyeri Veres Péter Gimn., (10. évf.)

III. megoldás. Ahhoz, hogy legyen egy olyan sorozatunk, amelyben k-szor fordul elő az, hogy egy 0-t közvetlenül 1 követ, legalább k db 0-t és 1-et kell tartalmaznia a sorozatnak. A sorozatban a 0-k száma k-tól $(n-k)$-ig terjedhet, mert mindig kell legalább k db 1 is.

A sorszámozásunk balról jobbra történik és egyértelmű.

Helyezzünk el sorban ℓ db 0-t ($k \leqslant \ell \leqslant n-k$). Azt $\binom{\ell}{k}$-féleképpen dönthetjük el, hogy a sorban melyik 0-k után kerüljön közvetlenül 1 (a 0-kat megkülönböztetjük sorszámuk szerint).

Azt, hogy az 1-esek közül mely sorszámú álljon közvetlenül 0 után, $\binom{n-\ell}{k}$-féleképpen dönthetjük el. Adott kiválasztás esetén a közvetlenül 0-k után álló 1-esek helyzete egyértelműen meghatározza a nem közvetlenül 0 mögött álló 1-esek helyzetét is (ezek az 1-esek 0-k elé és/vagy 1 után kerülhetnek). A sorszámuk az egymáshoz viszonyított helyüket is megadja.

Adott ℓ esetén a megfelelő sorozatok száma: $\binom{\ell}{k} \cdot \binom{n-\ell}{k}$. ℓ lehetséges értékei: $k; k+1; \ldots; n-k-1; n-k$.

Az eseteket összegezve a következő kifejezést kapjuk:

$$\binom{k}{k} \cdot \binom{n-k}{k} + \binom{k+1}{k} \cdot \binom{n-k-1}{k} + \ldots +$$

$$+ \binom{n-k-1}{k} \cdot \binom{k+1}{k} + \binom{n-k}{k} \cdot \binom{k}{k}.$$

A fenti összegre kell bebizonyítani, hogy egyenlő $\binom{n+1}{2k+1}$-gyel. Az $\binom{n+1}{2k+1}$ egyenlő $n+1$ különböző elem $(2k+1)$-edrendű ismétlés nélküli kombinációinak számával.

Csoportosítsuk ezeket a kombinációkat aszerint, hogy a $(k+1)$-edik kiválasztott elem hol helyezkedik el a sorban (mi a mezőjének sorszáma). A sorszáma legalább $k+1$, legfeljebb pedig $n-k+1$ lehet.

Ha a sorszáma $k+1$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{k}{k} \cdot \binom{n-k}{k}.$$

Ha a sorszáma $k+2$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{k+1}{k} \cdot \binom{n-k-1}{k}.$$

$$\vdots$$

Ha a sorszáma $n-k$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{n-k-1}{k} \cdot \binom{k+1}{k}.$$

Ha a sorszáma $n-k+1$, akkor az ehhez tartozó kombinációk száma

$$\binom{n-k}{k} \cdot \binom{k}{k}.$$

Ez a csoportosítás lefedi az $n+1$ elem összes $2k+1$-edrendű ismétlés nélküli kombinációját. Ezzel igazoltuk, hogy

$$\binom{n+1}{2k+1} = \binom{k}{k}\cdot\binom{n-k}{k} + \binom{k+1}{k}\cdot\binom{n-k-1}{k} + \dots +$$

$$+ \binom{n-k-1}{k}\cdot\binom{k+1}{k} + \binom{n-k}{k}\cdot\binom{k}{k}.$$

A megfelelő számsorozatok száma valóban $\binom{n+1}{2k+1}$.

Nagy Levente (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 11. évf.)

Összesen 79 dolgozat érkezett. 4 pontos 61, 3 pontos 9, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 5165. *Legyen k egy adott pozitív egész. Van-e olyan $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre*

$$f(x) + f\big(f(x)\big) = x + k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

I. megoldás. Nincs. Ezt teljes indukcióval igazolhatjuk minden $k\in\mathbb{Z}^+$-ra. Mielőtt erre rátérnénk, belátunk egy lemmát, ami többször is hasznos lesz a bizonyítás során.

Lemma. Ha f a feltételeknek megfelelő függvény (egy tetszőleges, rögzített k-ra), akkor f-nek nincs zérushelye, tehát csak pozitív egész értékeket vesz fel.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy egy $x\in\mathbb{N}$-re $f(x)=0$. Tudjuk, hogy

$$f(x) + f\big(f(x)\big) = x + k.$$

Helyettesítsünk az egyenletbe $f(x)$-et:

$$f\big(f(x)\big) + f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x) + k.$$

Behelyettesítve $f(x)=0$-t a következő két egyenlet adódik:

$$f(0) = x + k,$$

$$f(0) + f\big(f(0)\big) = k.$$

A második egyenletet az elsőből kivonva:

$$-f\big(f(0)\big) = x.$$

Tudjuk, hogy $f\big(f(0)\big)$ és x is természetes szám, vagyis $-f\big(f(0)\big) \leqslant 0$ és $x \geqslant 0$. Így egyenlőség csak $f\big(f(0)\big) = x = 0$ esetén állhat fenn. Ekkor pedig $x = 0$-ban van zérushely, vagyis $f(0) = 0$. Felírjuk az eredeti egyenletet $x = 0$-ra:

$$f(0) + f\big(f(0)\big) = 0 + k,$$
$$0 + f(0) = k,$$
$$0 + 0 = k,$$

ami egyetlen pozitív egész k-ra sem lehetséges, vagyis ellentmondásra jutottunk. $\square$

Most térjünk át a teljes indukciós bizonyításra. $k = 1$-re indirekt tegyük fel, hogy van megfelelő f függvény. Ekkor az ismert egyenlet $x = 0$-ra:

$$f(0) + f\big(f(0)\big) = 0 + 1,$$
$$f(0) + f\big(f(0)\big) = 1.$$

Ami $f(0), f\big(f(0)\big) \in \mathbb{N}$ esetén csak úgy lehet, ha az egyik tag 0 és a másik 1. Ekkor pedig van zérushely, ami ellentmond a lemmánknak.

Már csak azt kell megmutatnunk, hogy ha egy k pozitív egészre nincs megfelelő függvény, akkor $k+1$-re sincs. Ehhez indirekt tegyük fel, hogy van megfelelő f_{k+1} függvény. Definiálunk egy $f_k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényt az alábbi hozzárendelési szabállyal:

$$f_k(x) = f_{k+1}(x+1) - 1.$$

Nyilván ez minden $x \in \mathbb{N}$-re értelmezett és az is biztos, hogy mindig nemnegatív egész értékeket vesz fel, hiszen a lemma szerint f_{k+1}-nek nincs zérushelye, vagyis minden függvényértéke legalább 1 és egész szám. Az indirekt feltételből könnyen levezethető, hogy f_k megfelelő függvény k-ra. Ha f_{k+1} megfelel $k+1$-re, akkor tetszőleges $x \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek a következők:

$$f_{k+1}(x+1) + f_{k+1}\big(f_{k+1}(x+1)\big) = x + 1 + k + 1,$$
$$f_{k+1}(x+1) - 1 + f_{k+1}\big(f_{k+1}(x+1) - 1 + 1\big) - 1 = x + k,$$
$$f_k(x) + f_k\big(f_{k+1}(x+1) - 1\big) = x + k,$$
$$f_k(x) + f_k\big(f_k(x)\big) = x + k.$$

Vagyis f_k megfelel a feltételeknek k-ra, ami ellentmond az indukciós feltételünknek.

Duchon Márton (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Tegyük fel, hogy léteznek olyan $a \neq b$ természetes számok, amelyekre $f(a) = f(b) := c$. Ekkor $f(a) + f\big(f(a)\big) = c + f(c) = a + k$, vagyis $f(c) = a + k - c$, hasonlóan $f(b) + f\big(f(b)\big) = c + f(c) = b + k$. Ekkor $a + k = c + f(c) = b + k$, innen $a = b$, ami ellentmond a feltevésünknek. Tehát f minden természetes értéket legfeljebb egyszer vesz fel, azaz injektív.

Nézzük azt az esetet, amikor valamilyen a értékre $f(a)=a$. Ekkor $f^r(a)=a$ minden r pozitív egészre, ezért $f(a)+f\big(f(a)\big)=a+k$, vagyis $a=k$.

Vizsgáljuk meg azokat az a-kat, amelyekre $f(a)>a$. Ekkor

$$f(a)+f\big(f(a)\big)=a+k$$

szerint $f(a)-a=k-f\big(f(a)\big)$. Itt az egyenlet bal oldala pozitív, ezért $k>f\big(f(a)\big)$. Mivel k darab k-nál kisebb természetes szám van, azért legfeljebb k darab olyan a szám lehet, amelyre $f(a)>a$.

Vegyünk egy tetszőleges b egészet; b-re nézve három eset lehetséges:

1. Minden r pozitív egészre $f^r(b)>f^{r+1}(b)$. Ekkor a $g(w):=f^w(b)$ függvény szigorúan monoton csökken. Mivel csak pozitív értékeket vehet fel, van egy legkisebb, értéke $g(w)$-nek, melyet jelöljön m. Erre a w-re $g(w+1)<g(w)=m$, ami ellentmondás, ez az eset nem lehetséges.

2. Van olyan r pozitív egész, amelyre $f^r(b)=f^{r+1}(b)$. Ekkor $f\big(f^{r-1}(b)\big)=$ $=f^r(b)=f^{r+1}(b)=f\big(f^r(b)\big)$ és f injektivitása miatt $f^{r-1}(b)=f^r(b)$, és így tovább, $b=f(b)$ következik. Akkor viszont $b+b=f(b)+f\big(f(b)\big)=b+k$ szerint $b=k$. Ez az eset tehát csak $b=k$-ra teljesülhet.

3. Van olyan r pozitív egész, amelyre $f^r(b)<f^{r+1}(b)$. A fentiek alapján ez teljesül minden $b\neq k$ értékre. Emiatt

$$f^{r+1}(b)+f^{r+2}(b)=f\big(f^r(b)\big)+f\Big(f\big(f^r(b)\big)\Big)=f^r(b)+k<f^{r+1}(b)+k,$$

ezért $f^{r+2}(b)<k$.

Tehát minden $x\neq k$ pozitív egészhez van olyan t, amelyre $f^t(x)<k$.

Tekintsük azt az irányított $\mathcal{G}$ gráfot, amelynek a csúcsai a természetes számok, és egy a csúcsból akkor indul irányított él egy b csúcsba, ha $f(a)=b$. Ekkor – mivel az f függvény injektív – minden csúcs be- és ki-foka is legfeljebb 1. Nevezzük egy a-hoz tartozó láncnak azon x csúcsok összességét, amik előállnak $x=f^w(a)$ alakban, vagy amelyekre $f^w(x)=a$. Mivel $\mathcal{G}$-ben minden csúcs ki- és be-foka is legfeljebb 1, két láncnak nem lehet közös csúcsa (mert ez a csúcs vagy a függvény egyértelműségét, vagy az injekciót elrontaná). A gráf tehát egymástól diszjunkt irányított végtelen utak és irányított körök egyesítése. Vizsgáljuk azon p egészek láncait, amelyekre $0\leqslant p<k$, és amikre létezik olyan legkisebb r pozitív egész, hogy $f^r(p)\geqslant k$.

Ezekre

$$f^{r+1}(p)+f^r(p)=f\Big(f\big(f^{r-1}(p)\big)\Big)+f\big(f^{r-1}(p)\big)=f^{r-1}(p)+k<2k,$$

ezért $f^{r+1}(p)<k$.

Általában, látható, hogy a függvény értéke minden kilépés után azonnal visszatér a $[0,k-1]$ intervallumba. Mivel a $[0,k-1]$ intervallumnak k darab eleme van, minden ilyen csúcs rajta van pontosan egy irányított körön, aminek a hossza legfeljebb $2k+2$. Ebből következik, hogy legfeljebb $(2k+2)k$ olyan szám van, ami

k-nál kisebb számmal van egy körön, tehát létezik végtelen sok olyan szám, ami nincs egy körön, és így egy láncon se egyetlen k-nál kisebb számmal sem. Ez ellentmond annak a korábbi eredménynek, ami szerint minden $x \neq k$ pozitív egészhez van olyan t, amelyre $f^t(x) < k$.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

42 dolgozat érkezett. 6 pontos 25, 5 pontos 9, 4 pontos 1, 3 pontos 3, 0 pontos 4 dolgozat.

B. 5195. *Mutassuk meg, hogy minden* $(x;y)$ *pozitív valós számokból álló számpár és minden* $0<p<1$ *valós szám esetén fennáll az* $x^p \cdot y^{1-p} < x+y$ *egyenlőtlenség.*

(*3 pont*)

I. megoldás. Az egyenlőtlenséget ekvivalens lépéseken keresztül átalakítjuk a következőképpen:

$$x^p \cdot y^{1-p} < x+y,$$

$$x^p \cdot \frac{y}{y^p} < x+y,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x+y}{y},$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y}+1.$$

1. eset. Ha $0<\frac{x}{y}<1$, akkor $\left(\frac{x}{y}\right)^p < 1$, hiszen $0<a<1$ alap esetén az $f(u)=a^u$ függvény szigorúan monoton csökkenő, tehát

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1,$$

ezért

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y}+1.$$

2. eset. Ha $\frac{x}{y}>1$, akkor $\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y}$, hiszen $a>1$ alap esetén az $f(u)=a^u$ függvény szigorúan monoton növő, tehát

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \left(\frac{x}{y}\right)^1 = \frac{x}{y},$$

így

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p < \frac{x}{y}+1.$$

3. eset. Ha $\frac{x}{y}=1$, akkor $1<2$, vagyis $\left(\frac{x}{y}\right)^p<\frac{x}{y}+1$.

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

Tóth Bálint (Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium, 12. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Ha $x<y$, akkor az $x'=y$, $y'=x$, $p'=1-p$ számokra az állítás ugyanaz: $x+y=x'+y'$ és $x^p\cdot y^{1-p}={x'}^{p'}\cdot y^{1-p'}$. Ezért feltehetjük, hogy $x\geqslant y$. Ekkor $y^{1-p}\leqslant x^{1-p}$, mert a pozitív valós számok halmazán értelmezett pozitív hatványfüggvények monoton növők, így

$$x^p\cdot y^{1-p}\leqslant x^p\cdot x^{1-p}=x<x+y.$$

Az egyenlőtlenség két oldalát nézve megkaptuk a feladat állítását.

Jánosik Máté (Révai Miklós Gimnázium, Győr, 12. évf.)

III. megoldás. Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség voltaképpen szimmetrikus x-ben és y-ban, ugyanis a $p\leftrightarrow 1-p$ cserével az állítás önmagába megy át. Így feltehetjük, hogy $x\geqslant y$.

Legyen tehát $y=ax$, ahol $a\leqslant 1$. (Mivel $x>0$, ezért a biztosan létezik.) Ekkor az egyenlőtlenség a vele ekvivalens $x^p\cdot(xa)^{1-p}=xa^{1-p}<x+y$ alakra hozható. Mivel $a\leqslant 1$, ezért minden nemnegatív kitevős hatványára is teljesül ugyanez, ez közismert. Így tehát $xa^{1-p}\leqslant x<x+y$, utóbbi azért, mert $y>0$. Ezzel az állítást beláttuk.

Varga Boldizsár (Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium, 9. évf.)

IV. megoldás. Vegyük észre, hogy az x és y két pozitív szám, ezért felírható rájuk a súlyozott számtani-mértani közép közötti egyenlőtlenség (ahol az x-hez tartozó súly p, az y-hoz tartozó súly $1-p$; a súlyok összege éppen 1 és mindkettő pozitív):

$$x^p\cdot y^{1-p}\leqslant p\cdot x+(1-p)\cdot y.$$

Mivel $p<1$, ezért $p\cdot x<x$, és teljesen hasonlóan, mivel $1-p<1$, ezért $(1-p)\cdot y<$ $<y$. Az előzőből következik, hogy

$$x^p\cdot y^{1-p}\leqslant p\cdot x+(1-p)\cdot y<x+y,$$

amivel beláttuk a feladat állítását.

Bognár András Károly (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

V. megoldás. A feladat szimmetriája miatt feltehetjük, hogy $x\geqslant y$. Ekkor $x^p\geqslant y^p$ és $x^{1-p}\geqslant y^{1-p}$, másrészt $x^p\cdot x^{1-p}+y^p\cdot y^{1-p}=x+y$, ahol $0<p<1$.

A rendezési tételt alkalmazva felírhatjuk, hogy

$$x^{1-p}\cdot y^p+y^{1-p}\cdot x^p\leqslant y^{1-p}\cdot y^p+x^{1-p}\cdot x^p.$$

Mivel $x^{1-p} \cdot y^p > 0$, ezért $x^p \cdot y^{1-p} < y^{1-p} \cdot y^p + x^{1-p} \cdot x^p$, erről pedig az előzőekben beláttuk, hogy éppen $x + y$, azaz

$$x^p \cdot y^{1-p} < x + y,$$

ami éppen a feladat állítása.

Szalontai Júlia (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 127 dolgozat érkezett. 3 pontos 99, 2 pontos 10 dolgozat. 1 pontot 6, 0 pontot 12 versenyző kapott.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (709–713.)

K. 709. Egy család egy egzotikus hagymafajtát termeszt saját fogyasztásra. A hagymából minden évben 400 darabot szeretnének megenni. A hagyma magról kel ki, melyet minden évben a növényen is meg tudunk termelni. Minden egyes hagymanövény 51 magot tud hozni, de ha már „felmagzott”, akkor az a része, melyet a család „hagymaként” elfogyasztana, elsorvad, mert a benne levő anyagokat a magok növekedésére fordítja. Minimálisan hány magot kell az első évben beszerezni, ha azokból az adott évre kívánt mennyiségű hagymát, továbbá annyi magot szeretnének kitermelni, hogy a továbbiakban már sose kelljen magot vásárolni?

K. 710. Néhány dodekaédert és néhány ikozaédert tettünk az asztalra. A testeknek összesen 792 csúcsuk és 936 lapjuk van. Hány dodekaéder és hány ikozaéder van az asztalon?

K. 711. Andi kedvenc száma a 2468. Bandi kedvenc száma is négyjegyű és tudjuk, hogy pontosan két olyan számjegye van, ami megegyezik Andi kedvenc számának két számjegyével, ráadásul a megegyező számjegyek ugyanazon a helyi értéken vannak a két számban. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, ami ezek alapján Bandi kedvenc száma lehetne?

K/C. 712. Egymás mellé helyezünk 2022 db négyzet alakú falapot, majd 2021 db korongra felírjuk az egész számokat 1-től 2021-ig. A korongokat tetszőleges sorrendben elhelyezzük a falapokon úgy, hogy a jobb szélső négyzetre nem helyezünk korongot (minden falapra egy korong kerül). Ezek után egy lépésben egy tetszőleges korongot áthelyezhetünk az éppen üresen álló fanégyzetre. A célunk az, hogy a korongokon álló számok balról jobbra haladva növekvő sorrendben legyenek, és a jobb szélső négyzet üres legyen. Maximálisan hány lépésre van ehhez szükségünk? Mutassunk is olyan kezdeti elrendezést, amely az általunk megállapított maximális lépésszámot igényli a sorba rendezéshez.