Szakirodalom

[4] Reiman István: *Geometria és határterületei,* Gondolat (1986).

[5] Titu Andreescu – Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z,* Birkhäuser (2006).

Schultz János

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Felírjuk az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek sorbarendezésével képezhető összes ötjegyű számot.

a) Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege? (*6 pont*)

b) Hány olyan számtani sorozat létezik, melynek első tagja 12 345, szerepel benne az 54 321 is, és a differenciája pozitív egész szám? (*6 pont*)

2. Egy sorsjegy ára 1000 Ft. A sorsjegy lehetséges nyereményei: 2 000 Ft, 5 000 Ft, 20 000 Ft, 100 000 Ft, 500 000 Ft.

Ezek valószínűsége rendre: 11%, 5%, 0,81%, 0,17%, 0,02%.

a) Mennyi a nyeremény várható értéke? (*3 pont*)

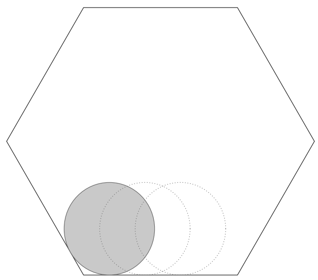
b) Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyerünk, ha egy sorsjegyet vásárolunk? (*2 pont*)

Tíz alkalommal veszünk egy-egy sorsjegyet. Mekkora a valószínűsége, hogy

c) legalább kétszer nyerünk; (*5 pont*)

d) pontosan háromszor nyerünk? (*3 pont*)

3. Egy 10 cm oldalú, szabályos hatszög alakú fehér tálca pereme mellett végiggörgetünk egy 6 cm átmérőjű, alul festékes korongot. Mekkora az ilyen módon beszínezett terület? A választ mm^2 pontossággal adjuk meg. (*12 pont*)

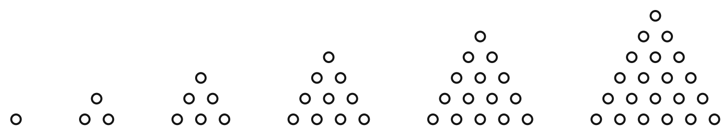


4. *a*) Adjuk meg az $x = \frac{y^2}{8} + 3$ egyenletű parabolához a $P(0;-1)$ pontból húzható érintők egyenletét. (*8 pont*)

b) Határozzuk meg azokat a valós x értékeket, melyekben az $f(x) = \sin^2 x + \cos x$ függvény grafikonjának érintője párhuzamos az x-tengellyel. (*6 pont*)

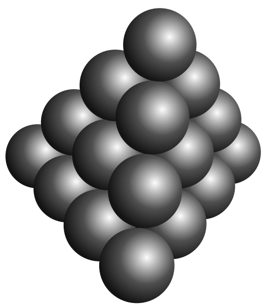
II. rész

5. A pitagoreusok azokat a természetes számokat nevezték háromszögszámnak, amely számú kavicsot az *ábrán* látható módon háromszög alakba lehet rendezni.



Az első hat háromszögszám: 1, 3, 6, 10, 15, 21.

a) Számítsuk ki a kilencedik és a századik háromszögszámot. (*2 pont*)



b) Bizonyítsuk be, hogy az első n háromszögszám összege $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (*6 pont*)

c) A golyós piramis nevű térbeli logikai játék elemeiből ezt a tetraéderszerű építményt kell összeállítani. Milyen magas az építmény, ha a golyók átmérője 2 cm? (A megoldást cm-ben egy tizedes jegy pontossággal adjuk meg.) (*8 pont*)

6. A hangerőt a hanghullámok intenzitása határozza meg, amelynek mértékegysége $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Az egyenlőnek érzékelt hangerő-különbségek egyenlő intenzitásarányokat takarnak. A hangerő mértékegysége a decibel.

Az emberi fül ingerküszöbe az $I_0 = 10^{-12}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$. Ezt nevezzük 0 decibelnek. Bármely más I intenzitású hang hangerejét a $H = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ dB képlet adja meg.

a) Hány dB a $3 \cdot 10^{-9}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ intenzitású halk beszéd? (*3 pont*)

b) Mekkora a mennydörgés intenzitása, ha a hangereje 125 dB? (*4 pont*)

c) Az intenzitást 5-szörösére növelve hány dB hangerő-emelkedést érünk el? (*3 pont*)

Az érzékelt hangmagasság a hang rezgésszámával áll összefüggésben. Az egyenlőnek hallott hangközök egyenlő rezgésszám-arányokat takarnak. Pl. ha egy hangot egy másiknál egy oktávval magasabbnak érzékelünk, akkor a rezgésszáma az előbbiének 2-szerese. A rezgésszám a hangmagasság függvényében tehát exponenciálisan nő.

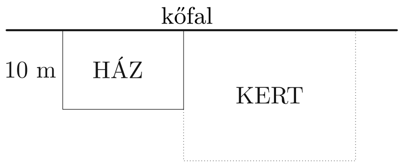
A kromatikus skála az oktávot 12 egyenlő hangközre, ún. félhangokra osztja. Ha egy hang egy másiknál félhanggal magasabb (pl. C és Cisz), akkor a rezgésszáma $\sqrt[12]{2}$-szöröse az előbbiének.

d) Hányszorosa a nagyterc hangközben (négy félhang) a magasabb hang rezgésszáma a mélyebbének? (Pontos arányszámot adjon meg.) (*2 pont*)

e) Adjunk képletet, amellyel egy tiszta zenei hangközről a rezgésszámok x aránya ismeretében kiszámíthatjuk, hogy hány félhangnyi távolságot jelent. (*4 pont*)

7. *a*) A ferde háztetőn egy kémény árnyéka épp a tető lejtésének irányába esik. Mekkora a tető dőlésszöge, ha a kémény 1 m magas, árnyéka 86 cm, és ugyanekkor a kertben növő 120 cm-es napraforgó árnyéka 75 cm? (*8 pont*)

b) A telken a ház mellett szeretnénk elkeríteni egy 450 m^2-es, téglalap alakú kiskertet. Mekkorák legyenek a kiskert oldalai, hogy a legrövidebb kerítést kelljen építeni? (Ahol fal van, nem kell kerítés. A kert mélysége legalább akkora legyen, mint a házé.) (*8 pont*)

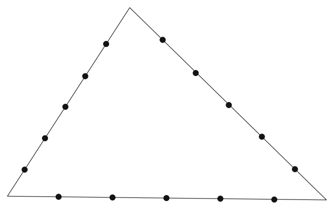


8. Számítsuk ki a derékszögű koordinátarendszerben az egyenlőtlenségekkel megadott két ponthalmaz pontos területét:

a) $6(x+y)-2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 6(x+y)+7$. (*7 pont*)

b) $(x-3)^2+1 \leqslant y \leqslant 5$. (*9 pont*)

9. *a*) A háromszög oldalain 5–5–5 pontot jelöltünk ki. Hány háromszöget határoz meg a tizenöt pont?

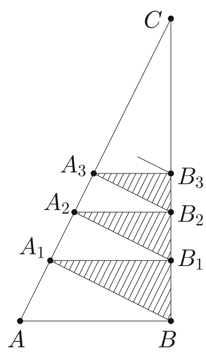


Az ABC derékszögű háromszög AB befogója 10 egység, BC befogója 20 egység hosszúságú.

A_1 a B csúcsból az AC oldalra állított merőleges, B_1 az A_1-ből BC-re állított merőleges talppontja. Ugyanígy A_2 a B_1-ből AC-re állított merőleges, B_2 az A_2-ből BC-re állított merőleges talppontja, és így tovább.

b) Számítsuk ki az A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 szakasz hosszát. (*5 pont*)

c) Az eljárást a végtelenségig folytatva keletkezik a vonalkázással jelölt háromszögek végtelen sorozata. Számítsuk ki a háromszögek területének összegét. (*6 pont*)



Deák Anna
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\frac{13}{27}. \qquad (5\ pont)$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ *intervallumon:*

$$1+4\sin x-4\cos^2 x=0. \qquad (6\ pont)$$

Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a hatványozás azonosságait:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}}{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}=\frac{13}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{13}{27}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{1}{9}.$$

Tehát $\left(\frac{1}{3}\right)^{x}<\frac{1}{9}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2}$. Az $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ függvény szigorúan monoton csökkenő, ezért a nagyobb értéket a kisebb helyen veszi fel, azaz a megoldás $x>2$.

b) Használjuk fel, hogy $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Ekkor

$$1+4\sin x-4\cdot(1-\sin^2 x)=0\ \Rightarrow\ 4\sin^2 x+4\sin x-3=0.$$

Ez $\sin x$-ben egy másodfokú egyenlet, megoldásai: $\sin x=\frac{-3}{2}$ vagy $\sin x=\frac{1}{2}$.

1. eset: Ha $\sin x=\frac{-3}{2}$. Ennek nincs megoldása, mert $\forall x\in\mathbb{R}$ esetén $-1\leqslant \sin x\leqslant 1$.

2. eset: Ha $\sin x=\frac{1}{2}$. Mivel $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$, ezért $x_1=\frac{5\pi}{6}$ és $x_2=\frac{13\pi}{6}$.

Tehát a megoldások $x_1=\frac{5\pi}{6}$ és $x_2=\frac{13\pi}{6}$.

Ellenőrzés vagy ekvivalenciára való hivatkozás.

2. *a) Kata és Máté nemrég tanulták az iskolában az osztókat. Kitaláltak egy játékot. A játékot Kata kezdi és felváltva mondanak az n pozitív egész szám osztói közül egyet úgy, hogy olyan osztót nem mondhatnak, amely korábban már elhangzott. Az veszít, aki már nem tud újabb osztót mondani. Hány olyan n pozitív egész szám van az* $\{1;2;3;\ldots;25\}$ *halmazban, amely esetén Kata nyer?* (*4 pont*)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van a $\{1;2;3;\ldots;2021\}$ *halmazban, amelyre igaz, hogy* $2^{n+3}+2^n$ *négyzetszám?* (*5 pont*)

c) Adjuk meg a p valós paraméter lehetséges értékeit, ha az alábbi polinom összevont alakjában a másodfokú tag együtthatója −3:

$$(x-1)^2\cdot(p+2x)^2. \qquad (5\ pont)$$

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Kata pontosan akkor nyer, ha az osztók száma páratlan. Egy szám osztói osztópárokba rendezhetők. Ha az osztók száma páratlan, akkor valamely osztónak önmaga a párja. Tehát a szám négyzetszám. Az $\{1;2;3;\dots;25\}$ halmazban a négyzetszámok: 1; 4; 9; 16; 25. Ezek száma 5. Tehát 5 olyan szám van, amely esetén Kata nyer.

II. megoldás. Kata pontosan akkor nyer, ha az osztók száma páratlan. Ha az n szám kanonikus alakja $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$, akkor osztóinak száma

$$(\alpha_1+1)\cdot(\alpha_2+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha_k+1).$$

Az osztók száma páratlan, ezért $\alpha_1;\alpha_2;\dots;\alpha_k$ mindegyike páros.

Tehát $n=p_1^{2\beta_1}\cdot p_2^{2\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{2\beta_k}=\left(p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}\right)^2$, azaz négyzetszám.

Az $\{1;2;3;\dots;25\}$ halmazban a négyzetszámok: 1; 4; 9; 16; 25.

Ezek száma 5. Tehát 5 olyan szám van, amely esetén Kata nyer.

Megjegyzés. Akár végig is lehet próbálni az összes számot és a végére juthatunk így is a feladatnak.

b) *I. megoldás.* Mivel $2^{n+3}+2^n=8\cdot2^n+2^n=9\cdot2^n$ és a 9 négyzetszám, ezért a kifejezés pontosan akkor lesz négyzetszám, ha 2^n négyzetszám. Ez akkor teljesül, ha n páros szám.

Az $\{1;2;3;\dots;2021\}$ halmazban 1010 darab páros szám van.

II. megoldás. Ha $n=1$, akkor a kifejezés értéke 18, ami nem négyzetszám.

Ha $n=2$, akkor a kifejezés értéke 36, ami négyzetszám.

Vegyük észre, hogy ha n értékét egyesével növeljük, akkor a kifejezés értéke mindig a kétszeresére növekszik, ugyanis

$$2^{n+4}+2^{n+1}=2\cdot2^{n+3}+2\cdot2^n=2\cdot(2^{n+3}+2^n).$$

Tehát, ha valamely n-re a kifejezés négyzetszám, akkor $(n+2)$-re is négyzetszám.

És nyilván, ha valamely n-re a kifejezés nem négyzetszám, akkor $(n+2)$-re sem négyzetszám. Ezért a számunkra megfelelő értékek $n\in\{2;4;6;\dots;2020\}$. Tehát 1010 megoldás van, amely megfelel nekünk.

c) Bontsuk fel a zárójeleket és rendezzük a polinomot a változó csökkenő hatványai szerint:

$$g(x)=(x-1)^2\cdot(p+2x)^2=(x^2-2x+1)\cdot(4x^2+4px+p^2)=$$
$$=4x^4+(4p-8)x^3+(p^2-8p+4)x^2+(4p-2p^2)x+p^2.$$

A másodfokú tag együtthatója p^2-8p+4, ezért meg kell oldjuk az $p^2-8p+4=-3$ egyenletet. Ennek a megoldásai: $p_1=1$ és $p_2=7$.

Megjegyzés. Nem feltétlenül kellett volna összeszorozni minden tagot minden taggal, hiszen másodfokú tag csak úgy keletkezhet, ha másodfokút konstanssal vagy elsőfokút elsőfokúval szorzunk.

3. *a*) *Egy dobozban van* 7 *különböző pár kesztyű. A dobozból egyesével, visszatevés nélkül húzunk ki kesztyűket mindaddig, amíg nem kapunk egy pár kesztyűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez legfeljebb* 3*-szor kell húzzunk a dobozból?* (*7 pont*)

	11.-es	12.-es
Fiúk	4	3
Lányok	2	3

b) *Az iskola* 11.*-es és* 12.*-es legjobb* 12 *matekos diákjának nemek szerinti és évfolyam szerinti eloszlását a* táblázat *tartalmazza. A tanáruk véletlenszerűen választott közülük diákokat a körzeti matekversenyre. A verseny szabályzata szerint egy csapatban ketten indulnak* (*a csapattagok között nincs kitüntetettség*)*, akik közül legalább az egyikük lány* (*akár mindkettő résztvevő lehet lány*) *és a két résztvevő nem lehet ugyanarról az évfolyamról. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanáruk a versenyszabályzatnak megfelelő nevezést adott le? Eredményünket* 3 *tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Két olyan eset van, amikor legfeljebb 3 húzásból lesz egy pár kesztyű a kihúzottak között.

1. eset: Ha második húzásra egy pár kesztyű lesz nálunk. Ennek a valószínűsége

$$\frac{14\cdot 1}{14\cdot 13}=\frac{1}{13},$$

ugyanis elsőre még bármit húzhatunk, másodikra pedig csak annak a párját tudjuk húzni.

2. eset: Ha a harmadik húzásra lesz meg az első pár kesztyű. Ennek a valószínűsége

$$\frac{14\cdot 12\cdot 2}{14\cdot 13\cdot 12}=\frac{2}{13},$$

ugyanis elsőre bármit húzhatunk, másodikra nem húzhatjuk annak a párját, tehát 12 közül húzhatunk, majd harmadikra az egyik már kihúzott kesztyűnek kell a párját kihúzni.

Tehát a keresett valószínűség

$$P(\text{legfeljebb 3 húzás elég})=\frac{1}{13}+\frac{2}{13}=\frac{3}{13}.$$

Megjegyzés. Az első esetnél azonnal tudtuk volna mondani az $\frac{1}{13}$ valószínűséget, ugyanis az első kesztyű még bármi lehet és marad 13 kesztyű a dobozban. Ez a 13 az összes eset száma és csak 1 kedvező van: ha az először kihúzottnak a párját húzzuk másodiknak.

b) Az összes eset száma $\binom{12}{2}=66$.

Az alábbi összeállítások esetén ad le jó nevezést a tanár:

1. eset: 11.-es lány és 12.-es lány. Ekkor a kedvező esetek száma $2\cdot 3=6$.

2. eset: 11.-es lány és 12.-es fiú. Ekkor a kedvező esetek száma $2\cdot 3=6$.

3. eset: 12.-es lány és 11.-es fiú. Ekkor a kedvező esetek száma $3\cdot 4=12$.

$P(\text{jó a nevezés})=\frac{6+6+12}{66}=\frac{4}{11}$, ami 3 tizedesjegyre kerekítve 0,364.

4. *Adott az* $x^2+y^2+18x-4y+45=0$ *egyenletű* k *kör.*

a) Igazoljuk, hogy a k *kör középpontjának koordinátái* $K(-9;2)$. (*2 pont*)

b) Határozzuk meg a k *kör* $P(-7;8)$ *pontjába húzható érintőjének egyenletét.* (*3 pont*)

c) Adottak az $A(1;1)$, $B(10;4)$, $C(2;8)$ *pontok. Mutassuk meg, hogy a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontja illeszkedik az* $x+3y=17$ *egyenletű egyenesre.* (*9 pont*)

Megoldás. *a*) Teljes négyzetté alakítást hajtunk végre:

$$x^2+y^2+18x-4y+45=0,$$

$$(x+9)^2-81+(y-2)^2-4+45=0.$$

Azaz $(x+9)^2+(y-2)^2=40$.

Innen a kör középpontja leolvasható: $K(-9;2)$.

b) Az érintőnek adott a $P(-7;8)$ pontja. Ez valóban pontja a körnek, amiről a koordináták behelyettesítésével meggyőződhetünk.

Egy normálvektora a $\overrightarrow{KP}(2;6)$ vektor. Az érintő egyenlete

$$2x+6y=2\cdot(-7)+6\cdot 8,$$

azaz egyszerűsítve $x+3y=17$.

c) A háromszög köré írt körének középpontját az oldalfelező merőlegesek metszéspontjaként kapjuk meg. Elég két oldalfelezési pont: $F_a(6;6)$ és $F_c\left(\frac{11}{2};\frac{5}{2}\right)$. Az F_a ponton áthaladó e oldalfelező merőleges egy normálvektora $\overrightarrow{n}_e=\overrightarrow{CB}(8;-4)$, egyenlete $2x-y=6$.

Az F_c ponton áthaladó f oldalfelező merőleges egy normálvektora

$$\overrightarrow{n}_f=\overrightarrow{AB}(9;3),$$

egyenlete $3x+y=19$. Legyen O a háromszög köré írt kör középpontja. Ekkor $e\cap f=\{O\}$, azaz meg kell oldani az alábbi egyenletrendszert:

$$2x-y=6,$$

$$3x+y=19.$$

Ennek megoldása $x=5$; $y=4$. Tehát $O(5;4)$. Ez a pont valóban illeszkedik az $x+3y=17$ egyenletű egyenesre, ugyanis $5+3\cdot 4=17$.

II. rész

5. *Egy derékszögű háromszög oldalaiból álló minta terjedelme* 18 *egység, a medián* 24 *egység.*

a) Igazoljuk, hogy a háromszög oldalainak hossza 7; 24 *és* 25 *egység.* (*5 pont*) *b) Adjuk meg a háromszög beírt és köré írt körének középpontjának távolságát.* *(7 pont)*

A fenti háromszög befogóin megjelöljük azokat a belső osztópontokat, amelyek a derékszögű csúcstól egész egység távolságra helyezkednek el.

c) Hány olyan háromszög adható meg, melyeknek csúcsai ezen belső osztópontok közül kerülnek ki? *(4 pont)*

Megoldás. *a)* A háromszög három oldala legyen nagyság szerint rendezve $a \leqslant b < c$. Mivel a medián 24, ezért $b = 24$. Mivel a terjedelem 18, ezért $c = a + 18$. Pitagorasz tétele szerint $a^2 + 24^2 = (a + 18)^2$. Ezt megoldva kapjuk, hogy $a = 7$.

Tehát a háromszög oldalainak hossza valóban 7; 24 és 25 egység.

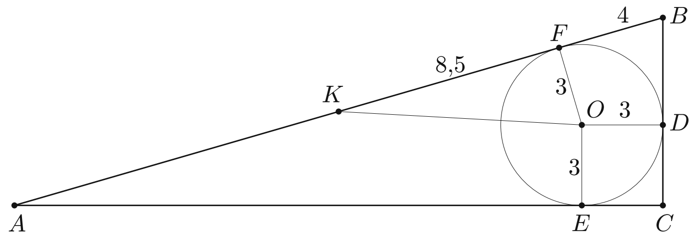
b) I. megoldás. Az ABC háromszög területe $T = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$. Félkerülete $s = 28$, ezért beírt körének sugara $r = \frac{T}{s} = 3$. Az $OECD$ négyszög négyzet, ezért $CD = 3$, így $BD = 4$. Külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért $BF = BD = 4$. Thálész tételének megfordítása miatt a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja és a kör sugara $R = \frac{c}{2} = 12{,}5$. Mivel $BK = 12{,}5$ és $BF = 4$, ezért $KF = 8{,}5$. A KFO háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tétele szerint

$$KO^2 = 8{,}5^2 + 3^2 \ \Rightarrow\ KO = \frac{\sqrt{325}}{2} \approx 9{,}01.$$

Megjegyzés. A háromszög beírt köre sugarának hosszát megkaphattuk volna a csak derékszögű háromszögekre érvényes $r = \frac{a+b-c}{2}$ képlettel is. Ekkor szintén

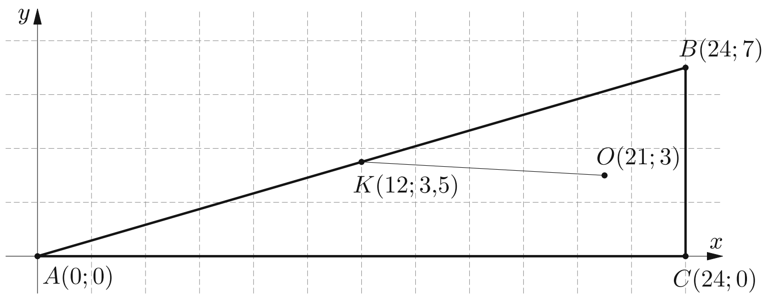
$$r = \frac{7 + 24 - 25}{2} = 3$$

adódik.



II. megoldás. Helyezzük el a háromszöget derékszögű koordinátarendszerben, a csúcsok legyenek $A(0;0)$, $B(24;7)$, $C(24;0)$. Thalész tételének megfordítása miatt a háromszög köré írt kör középpontja az átfogó felezőpontja, azaz $K\left(12; \frac{7}{2}\right)$.

Az ABC háromszög területe $T = \frac{7 \cdot 24}{2} = 84$. Félkerülete $s = 28$, ezért beírt körének sugara $r = \frac{T}{s} = 3$, és így a beírt kör középpontjának koordinátái $O(21;3)$. A feladat kérdése az KO távolság meghatározása: $KO = \frac{\sqrt{325}}{2} \approx 9{,}01$.



c) I. megoldás. A hosszabb befogón 23 darab, a rövidebb befogón pedig 6 osztópont található. Háromszög akkor jön létre, ha az egyik befogó pontjai közül kettőt és a másik befogó pontjai közül egyet kiválasztunk. A háromszögek száma

$$\binom{23}{2}\cdot\binom{6}{1}+\binom{23}{1}\cdot\binom{6}{2}=1518+345=1863.$$

II. megoldás. A hosszabb befogón 23 darab, a rövidebb befogón pedig 6 osztópont található. Komplementer módszerrel dolgozunk. Az összes ponthármasok száma $\binom{29}{3}=3654$. A rossz esetek jelenleg azt jelentik, hogy a kiválasztott 3 pont egy egyenesre illeszkedik.

Ezek száma $\binom{23}{3}+\binom{6}{3}=1771+20=1791$. A háromszögek száma

$$3654-1791=1863.$$

6. *a) Ottónak* 55 *emelt matekos diákja van, akikkel tesztet írat koordinátageometriából.*

A teszten 3 *kérdés van és minden egyes kérdésre* 3 *válaszlehetőség, melyek közül pontosan* 1 *helyes válasz van. Mutassuk meg, hogy van legalább* 3 *olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet. (Két tesztkitöltést akkor tekintünk azonosnak, ha az egyes kérdésekre adott válasz minden egyes esetben megegyezik.)* (*5 pont*)

b) A fenti 55 *diák közül András, Bogi, Csaba, Dani, Emese, Feri, Gizi és Huba úgy töltötték ki a teszt első kérdését, hogy minden egyes válaszlehetőség legalább egyszer előfordult a válaszaik között* (3 *válaszlehetőség volt minden egyes kérdésre*)*. Hányféle különböző kitöltést tud adni a* 8 *tanuló csak az első kérdésre, ha csak az számít, hogy az egyes válaszlehetőségeket hányan jelölték meg?* (*6 pont*)

c) A diákok közül Ilona, József, Kati, Laci, Marci és Nóri nagyon rosszul teljesítettek a teszten, ezért Ottó úgy döntött, hogy a jobb teljesítés érdekében alakítsanak ki tanulópárokat (*azaz* 2 *diákból álló csoportokat*)*. Hányféleképpen alakíthat ki a* 6 *diák tanulópárokat, ha az egyes tanulópárok között és a tanulópárokon belül sincs kitüntetettség a diákok között?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Mindhárom kérdésre egymástól függetlenül háromféleképpen válaszolhatnak a diákok, ezért a tesztet $3^3=27$ különböző módon lehet kitölteni.

Mivel $55 = 2\cdot 27+1$, ezért a skatulyaelv szerint biztosan lesz legalább 3 olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet.

b) I. megoldás. A feladat feltétele szerint mindegyik válaszlehetőséget legalább egy diák megjelölte, ezért lényegében az a feladatunk, hogy a maradék 5 diákot osszuk szét. Az alábbi esetek adódnak:

1. eset: $5+0+0$, ebből 3 lehetőségünk van.

2. eset: $4+1+0$, ebből 6 lehetőségünk van.

3. eset: $3+2+0$, ebből 6 lehetőségünk van.

4. eset: $3+1+1$, ebből 3 lehetőségünk van.

5. eset: $2+2+1$, ebből 3 lehetőségünk van.

Tehát összesen 21 különböző kitöltést tud adni a 8 diák.

II. megoldás. Az egyes válaszlehetőségekre érkezzen rendre x; y; z válasz. Ekkor x; y; z olyan pozitív egész számok, amelyekre $x+y+z=8$. Képzeljük el azt, hogy 8 almát (az ábrán a pöttyök szemléltetik az almákat) osztunk szét három gyerek között, akik mindegyike kap legalább egy almát. Annyiféleképpen tudjuk felbontani a 8-at három összeadandóra, ahányféleképpen a köztük lévő 7 résnél elhelyezünk két összeadás jelet. Ezek száma $\binom{7}{2}=21$.

$$\bullet \quad \bullet + \bullet \quad \bullet + \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet$$

c) I. megoldás. A rosszul teljesítő diákok legyenek A; B; C; D; E; F. Először keressünk tanulópárt A-nak. A többi 5 diák közül akármelyik lehet a párja, ez 5 lehetőség, legyen pl. B. Most keressünk tanulópárt C-nek. A többi 3 diák közül akármelyik lehet a párja, ez 3 lehetőség, legyen pl. D. A maradék két diák pedig egy párt alkot. Az összes lehetőségek száma $5\cdot 3\cdot 1=15$.

II. megoldás. Először a 6 diákból kijelölünk egy párt. Ezt $\binom{6}{2}=15$-féle módon tehetjük meg. A maradék 4 diákból kiválasztunk egy másik párt, ezt $\binom{4}{2}=6$ különböző módon tehetjük meg. A megmaradt 2 tanuló pedig egy párt fog alkotni. Ekkor minden párt $3!=6$-szor számoltunk meg, ezért az összes lehetőségek száma $\frac{15\cdot 6}{6}=15$.

Megjegyzés. Ha 6 helyett $2n$ számú diákot kellene párokba rendezni, akkor azt az első megoldás alapján $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$-féle módon tehetnénk meg. A második megoldás alapján pedig

$$\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2n}{2}}{n!}$$

féle módon. Ebből adódik, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén:

$$\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2n}{2}}{n!}=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1).$$

7. *Szorgalmas Szonja elhatározza, hogy koordinátageometriai hiányosságait szorgos gyakorlással orvosolja. Ezért minden egyes nap megold* 20 *ilyen jellegű feladatot. Még nem megy neki olyan jól, ugyanis minden nap csak* 5 *feladatot tud helyesen megoldani.*

Egy héten át minden egyes nap megkéri Lusta Lujzát, hogy ellenőrizze le mind a 20 *feladatot. Lujza nem nézi végig az összes feladatot. Minden egyes nap csak* 3*, általa véletlenszerűen kijelöltet ellenőriz le.*

a) Mutassuk meg, hogy három tizedesjegyre kerekítve 0,601 *annak a valószínűsége, hogy az adott napon a* 3 *ellenőrzött feladatból lesz helyesen megoldott feladata Szonjának.* (*4 pont*)

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 7 *nap alatt legfeljebb egyszer fordul elő az, hogy lesz helyesen megoldott feladata Szonjának? Válaszunkat* 4 *tizedesjegyre kerekítve adjuk meg.* (*5 pont*)

c) Legalább hány napon keresztül kell Lujzának átnéznie a feladatokat az ő sajátos módszerével, hogy legalább 99,99%*-os valószínűséggel legyen olyan nap, amikor van helyesen megoldott feladata Szonjának?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Komplementer módszerrel fogunk dolgozni.

$$P(\text{lesz jó feladat}) = 1 - P(\text{mindhárom rossz}) = 1 - \frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{137}{228},$$

ami 3 tizedesjegyre kerekítve 0,601.

b) Mivel $P(\text{lesz jó feladat}) \approx 0{,}601$, ezért $P(\text{mindegyik rossz}) \approx 0{,}399$.

$$\begin{aligned} &P(\text{legfeljebb egyszer lesz jó feladat}) = \\ &= P(\text{7 csak rossz}) + P(\text{1 van jó és 6 csak rossz}) = \\ &= 0{,}399^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}601 \cdot 0{,}399^6 \approx 0{,}018\,58, \end{aligned}$$

ami 4 tizedesjegyre kerekítve 0,0186.

c) Lujza a feladatokat n napon keresztül nézze át. Ekkor a feltétel szerint

$$P(\text{van jó feladatos nap}) \geqslant 0{,}9999 \ \Rightarrow\ 1 - P(\text{mindegyik rossz}) \geqslant 0{,}9999,$$

azaz $0{,}0001 \geqslant P(\text{mindegyik rossz}) = 0{,}399^n$. Tehát meg kell oldjuk a $0{,}0001 \geqslant 0{,}399^n$ egyenlőtlenséget. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát és vegyük figyelembe, hogy ez szigorúan monoton növekvő függvény. Alkalmazzuk a logaritmus azonosságot:

$$0{,}0001 \geqslant 0{,}399^n \ \Rightarrow\ \lg 0{,}0001 \geqslant \lg 0{,}399^n \ \Rightarrow\ -4 \geqslant n \cdot \lg 0{,}399.$$

Mivel $\lg 0{,}399 < 0$, ezért az osztáskor fordul a relációsjel iránya. $\frac{-4}{\lg 0{,}399} \leqslant n$, azaz $10{,}02 \leqslant n$. Tehát Lujzának legalább 11 napon keresztül kell átnéznie Szonja feladatait a feltétel teljesüléséhez.

8. *a) Egy számtani sorozat első* 9 *tagjának összege* 198*. Mekkora a sorozat első tagja és differenciája, ha az első* 18 *tagjának összege* 639? (*4 pont*)

b) Egy mértani sorozat hányadosa 2*. A sorozat* n*-edik tagja* 16 *és az első* n *tag összege* 31,75*. Határozzuk meg* n *értékét.* (*5 pont*) *c) Igazoljuk, hogy az* $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ *sorozat szigorúan monoton növekedő.* *(5 pont)*

d) Adjuk meg az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ *sorozat legkisebb tagját.* *(2 pont)*

Megoldás. *a*) Ismert, hogy $S_n = \frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2} \cdot n$, ezért $S_9 = \frac{2a_1+8d}{2} \cdot 9$ és $S_{18} = \frac{2a_1+17d}{2} \cdot 18$. Tehát a feladat szövege szerint $2a_1 + 8d = 44$ és $2a_1 + 17d = 71$. Ez egy elsőfokú, lineáris egyenletrendszer, melyet pl. megoldhatunk úgy, hogy kivonjuk egymásból a két egyenletet. Kapjuk, hogy $(2a_1+17d)-(2a_1+8d) = 71-44$, azaz $d = 3$. Innen $a_1 = 10$ adódik.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

b) *I. megoldás.* Felhasználjuk, hogy $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ és $q \neq 1$ esetén $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$.

Tehát $a_1 \cdot 2^{n-1} = 16$ és $a_1 \cdot \frac{2^n-1}{2-1} = 31{,}75$. Azaz $a_1 \cdot 2^n = 32$ és $a_1 \cdot (2^n - 1) = 31{,}75$. Innen kapjuk, hogy $a_1 \cdot 2^n - a_1 = 31{,}75$, tehát $32 - a_1 = 31{,}75 \Rightarrow a_1 = 0{,}25$. Adódik, hogy $0{,}25 \cdot 2^{n-1} = 16$. Ez az exponenciális egyenlet átírható $2^{-2} \cdot 2^{n-1} = 2^4$ alakba, ahonnan már könnyen adódik, hogy $n = 7$.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

II. megoldás. Mivel $a_n = 16$ és $q = 2$, ezért $a_{n-1} = 8$; $a_{n-2} = 4$; $a_{n-3} = 2$ stb. Nyilván mindig pozitív tagokat kapunk, ezért elég azt megnézni, hogy meddig kell összeadni visszafelé ezeket a tagokat, hogy megkapjuk az $S_n = 31{,}75$ értéket. Mivel $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 0{,}5 + 0{,}25 = 31{,}75$, ezért $n = 7$.

Ellenőrzés a feladat szövege alapján.

c) Feladatunk megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül, hogy $a_{n+1} > a_n$. Ez ekvivalens azzal, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül, hogy $a_{n+1} - a_n > 0$. Ha

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}, \text{ akkor } a_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} - a_n = \\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{2}{2n+2} = \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.
\end{aligned}$$

Tehát megmutattuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekedő.

d) Mivel a *c*) feladatrész szerint a sorozat szigorúan monoton növekedő, ezért a legkisebb tagja éppen $a_1 = \frac{1}{2}$.

9. *Adott az* 3*;* 4*;* 5*;* $x+7$*;* $11-x$ *öt elemből álló minta.*

a) Mutassuk meg, hogy a minta szórásnégyzete $\frac{2x^2-8x+40}{5}$*. (A minta szórásnégyzete a minta szórásának a négyzete.)* *(5 pont)*

b) Írjuk fel az $f(x)=\frac{2x^2-8x+40}{5}$ *függvénynek az* $x_0=7$ *abszcisszájú pontjába húzható érintőjének az egyenletét. (Abszcissza: a pont első koordinátája.)* *(5 pont)*

c) Mekkora területet zár közre az x *tengely, az* $x=0$*;* $x=6$ *egyenes és az* $f(x)=$ $=\frac{2x^2-8x+40}{5}$ *függvény?* *(6 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Az átlaguk $\bar{x}=\frac{3+4+5+(x+7)+(11-x)}{5}=6$.

A szórásnégyzet

$$\sigma^2=\frac{(\bar{x}-x_1)^2+\ldots+(\bar{x}-x_5)^2}{5}=$$

$$=\frac{(6-3)^2+(6-4)^2+(6-5)^2+\big[6-(x+7)\big]^2+\big[6-(11-x)\big]^2}{5}.$$

Azaz

$$\sigma^2=\frac{9+4+1+(x^2+2x+1)+(x^2-10x+25)}{5}=\frac{2x^2-8x+40}{5}.$$

II. megoldás. Az átlaguk $\bar{x}=\frac{3+4+5+(x+7)+(11-x)}{5}=6$.

A szórásnégyzet

$$\sigma^2=\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2}{5}-\bar{x}^2=\frac{3^2+4^2+5^2+(x+7)^2+(11-x)^2}{5}-6^2=$$

$$=\frac{9+16+25+(x^2+14x+49)+(x^2-22x+121)}{5}-36=\frac{2x^2-8x+40}{5}.$$

b) Mivel $f(7)=\frac{2\cdot7^2-8\cdot7+40}{5}=16{,}4$ és $f'(x)=\frac{4x-8}{5}$ $\Rightarrow$ $f'(7)=\frac{4\cdot7-8}{5}=4$, ezért az érintő egyenlete az $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ iránytényezős egyenlet alapján $y-16{,}4=4\cdot(x-7)$, azaz $y=4x-11{,}6$.

c) A függvénynek nincs valós zérushelye. Ezt a megoldóképletből kapjuk vagy abból, hogy az *a)* feladat szerint egy nem állandó mintának a szórásnégyzetéről van szó.

Használjuk a Newton–Leibniz tételt:

$$T=\int_0^6 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^6\frac{2x^2-8x+40}{5}dx=\left[\frac{2}{15}x^3-\frac{4}{5}x^2+8x\right]_0^6=$$

$$=\left(\frac{2}{15}\cdot6^3-\frac{4}{5}\cdot6^2+8\cdot6\right)-(0)=48.$$

Fridrik Richárd
Szeged