A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásai II.

III.

Ha a és b tetszőleges valós számok, akkor abszolút értékükre teljesül, hogy $|a+b| \leqslant |a|+|b|$. Ezt nevezzük a valós számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségnek. A bizonyítás pl. négyzetre emeléssel történhet, hiszen bármely x és y valós számra $|x|^2 = x^2$, továbbá $|x| \cdot |y| = |xy|$, ezért ekvivalens egyenlőtlenségekkel dolgozva

$$\begin{aligned} |a+b| &\leqslant |a|+|b|, \\ |a+b|^2 &\leqslant (|a|+|b|)^2, \\ (a+b)^2 &\leqslant a^2+2|a||b|+b^2, \\ 2ab &\leqslant 2|ab|, \end{aligned}$$

ami az abszolútérték definíciója miatt igaz. Egyenlőség csakis akkor áll fenn, ha a számok előjele azonos.

A háromszög-egyenlőtlenség véges sok valós számra:

$$|x_1+x_2+\ldots+x_n| \leqslant |x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|.$$

Ennek igazolása teljes indukcióval nem nehéz.

12. példa. *Legyenek adottak az $a \leqslant b$ valós számok. Igazoljuk, hogy a valós számokon értelmezett $f(x) = |x-a|+|x-b|$ függvény minimális értéke $b-a$, melyet pontosan akkor vesz fel, ha $a \leqslant x \leqslant b$.*

Megoldás. Felhasználva, hogy tetszőleges valós számokra $|x|+|y| \geqslant |x+y|$, valamint $|a| = |-a|$, kapjuk:

$$f(x) = |x-a|+|x-b| = |x-a|+|b-x| \geqslant |x-a+b-x| = b-a,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor, ha $x-a$ és $b-x$ előjele azonos, vagyis $a \leqslant x \leqslant b$.

13. példa. *Határozzuk meg a valós számokon értelmezett*

a) $$f(x) = |x+1|+|x|+|x-2|,$$

b) $$g(x) = |x+1|+|x-2|+|x-3|+|x-7|$$

függvény minimális értékét és a minimumhelyét.

Megoldás. Tekintsük a számegyenesen azokat a helyeket, ahol az abszolútérték jeleken belüli kifejezés értéke 0 és az előző példa állításának megfelelően végezzünk becsléseket.

a) $$f(x)=|x+1|+|2-x|+|x|\geqslant|x+1+2-x|+|x|=3+|x|\geqslant 3,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x=0$, ez a minimumhelye.

b) $$\begin{aligned} g(x)&=|x+1|+|7-x|+|x-2|+|3-x|\geqslant\\ &\geqslant|x+1+7-x|+|x-2+3-x|=8+1=9, \end{aligned}$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $-1\leqslant x\leqslant 7$ és $2\leqslant x\leqslant 3$, azaz $2\leqslant x\leqslant 3$, így ezek mindannyian minimum helyek.

Megjegyzés. A megoldásban leírt módon kereshető meg az

$$f(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\ldots+|x-a_n|$$

függvény minimuma, ahol az a_i-k adott valós számok. Páratlan n-re az a) esettel, páros n-re pedig a *b*) esettel analóg eredmény adódik. Ennek a problémának pl. a statisztikában van szerepe: az ún. eltérésösszeg függvénynek a medián zérushelye lesz.

14. példa. *Mutassuk meg, hogy ha x, y, z valós számok, akkor*

$$|x|+|y|+|z|\leqslant|x-y+z|+|x+y-z|+|-x+y+z|.$$

Megoldás. Vegyük észre, hogy

$$\frac{x+y-z}{2}+\frac{x-y+z}{2}=x,$$

így a háromszög-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{|x+y-z|}{2}+\frac{|x-y+z|}{2}\geqslant|x|.$$

Ugyanígy becsülhető meg felülről $|y|$ és $|z|$ is. A három egyenlőtlenséget összeadva adódik a bizonyítandó állítás. Az egyenlőség esetének vizsgálatát az olvasóra hagyjuk.

15. példa. *Az a, b, c adott valós számok olyanok, hogy $|x|\leqslant 1$ esetén $|ax^2+bx+c|\leqslant 1|$. Igazoljuk, hogy akkor $|x|\leqslant 1$ esetén $|cx^2+bx+a|\leqslant 2$.*

Megoldás. A háromszög-egyenlőtlenség, valamint $0\leqslant 1-x^2\leqslant 1$ miatt

$$\begin{aligned} |cx^2+bx+a|&=|cx^2-c+c+bx+a|\leqslant|cx^2-c|+|c+bx+a|=\\ &=|c|(1-x^2)+|c+bx+a|\leqslant|c|+|bx+c+a|. \end{aligned}$$

Legyen $x=0$, ekkor a feltétel szerint $|c|\leqslant 1$. Mivel $f(x)=bx+c+a$ lineáris függvény, így a $[-1;1]$ intervallumon maximális értékét valamelyik végpontban felveszi. Tekintettel arra, hogy $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$, a feltétel szerint pedig ezek abszolút értéke legfeljebb 1, kapjuk, hogy

$$|cx^2+bx+a|\leqslant |c|+|bx+c+a|\leqslant 1+1=2,$$

amit éppen bizonyítani szerettünk volna.

IV.

Ha z_1 és z_2 komplex számok, akkor teljesül rájuk, hogy $|z_1+z_2|\leqslant |z_1|+|z_2|$, ahol $|z|$ a z komplex szám abszolút értékét jelöli. Egyenlőség pontosan akkor, ha $z_1=\lambda z_2$, ahol λ pozitív valós szám. Ennek az állításnak a bizonyítása könnyen jön abból, ha tudjuk, hogy a komplex számok azonosíthatók a sík helyvektoraival. Természetesen algebrai úton is belátható az abszolút érték definíciója, valamint mechanikus számolás segítségével. Most is érvényes természetes általánosítás:

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n|\leqslant |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|.$$

16. példa. *Bizonyítsuk be a 2. példában szereplő állítást komplex számok segítségével.*

Megoldás. Mivel a $z=a+bi$ komplex szám abszolút értéke $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, ezért a háromszög-egyenlőtlenség komplex számokra érvényes alakját felhasználva

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}&=|1+xi|+|1+yi|+|1+zi|\geqslant\\&\geqslant \big|3+i(x+y+z)\big|=|3+i|=\sqrt{10}\,.\end{aligned}$$

A feladat állítása könnyen általánosítható n darab pozitív számra, melyek összege 1. Ha $x_1,x_2,\ldots,x_n>0$ és $x_1+x_2+\ldots+x_n=1$, akkor

$$\sqrt{1+x_1^2}+\sqrt{1+x_2^2}+\ldots+\sqrt{1+x_n^2}\geqslant\sqrt{1+n^2}.$$

A megoldás hasonlóan történhet, mint három változó esetén.

17. példa. *Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ konvex négyszögre*

$$AB\cdot CD+BC\cdot DA\geqslant AC\cdot BD.$$

Mikor teljesül egyenlőség?

Megoldás. Helyezzük el a négyszöget a komplex számsíkon és feleltessük meg az A, B, C, D csúcsoknak rendre az a, b, c, d komplex számokat. A bizonyítandó állítással ekvivalens, hogy

$$|b-a|\cdot|d-c|+|c-b|\cdot|d-a|\geqslant|c-a|\cdot|d-b|.$$

Ismert, hogy tetszőleges z_1, z_2 komplex számokra $|z_1|\cdot|z_2|=|z_1z_2|$, ezért a háromszög-egyenlőtlenséget is figyelembe véve

$$\big|(b-a)(d-c)\big|+\big|(c-b)(d-a)\big|\geqslant\big|(c-a)(d-b)\big|,$$
$$|bd-bc-ad+ac|+|cd-ac+ab-bd|\geqslant|cd-bc-ad+ab|.$$

Vizsgáljuk most meg az egyenlőség esetét. Ez pontosan akkor áll fenn, ha valamely $\lambda > 0$ valós számra

$$(b-a)(d-c) = \lambda(c-b)(d-a),$$

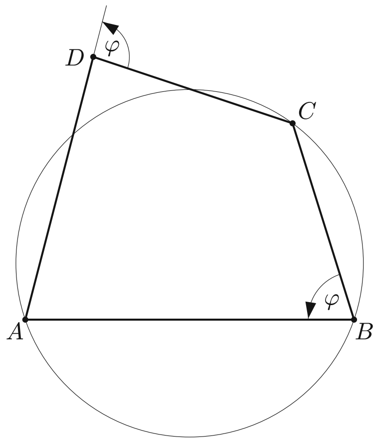
azaz

$$\frac{a-b}{c-b} = \lambda\frac{d-a}{c-d}.$$

Ami ekvivalens azzal, hogy

$$\arg\frac{a-b}{c-b} = \arg\frac{d-a}{c-d} = \varphi,$$

ami a húrnégyszögek tétele és megfordítása szerint pontosan akkor teljesül, ha az $ABCD$ konvex négyszög húrnégyszög.



A feladat állítása az ún. általánosított Ptolemaiosz-tétel. Ez speciális esetként (egyenlőség) tartalmazza a már az ókorban is ismert, húrnégyszögekre érvényes tételt. További alkalmazásokat, érdekességeket illetően javasolt irodalom: [4] és [5].

18. példa. *Mutassuk meg, hogy ha P az ABC háromszög síkjának valamely pontja, akkor*

$$\frac{PA\cdot PB}{CA\cdot CB} + \frac{PB\cdot PC}{AB\cdot AC} + \frac{PC\cdot PA}{BC\cdot BA} \geqslant 1.$$

(AMM)

Megoldás. Helyezzük el a pontokat a komplex számsíkon. Például az A pontnak feleljen meg az a komplex szám, a P pontnak a p komplex szám és így tovább. Ekkor a bizonyítandó állítás:

$$(*)\qquad \frac{|p-a|\cdot|p-b|}{|c-a|\cdot|c-b|} + \frac{|p-b|\cdot|p-c|}{|a-b|\cdot|a-c|} + \frac{|p-c|\cdot|p-a|}{|b-c|\cdot|b-a|} \geqslant 1.$$

Ismert, hogy bármely z_1, z_2 komplex számokra $|z_1|\cdot|z_2| = |z_1z_2|$ és $z_2 \neq 0$ mellett $\frac{|z_1|}{|z_2|} = |\frac{z_1}{z_2}|$, így a háromszög-egyenlőtlenséget is felhasználva $(*)$-hoz elegendő igazolnunk, hogy

$$\left|\frac{(p-a)(p-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(p-b)(p-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(p-c)(p-a)}{(b-c)(b-a)}\right| \geqslant 1.$$

Most megmutatjuk, hogy az abszolút érték jelen belüli mennyiség értéke 1. (Ez mechanikus számolással is megy természetesen, most mégis inkább egy elegánsabb módszert alkalmazunk). A kifejezés felírható

$$(p-a)(p-b)(p-c)\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{(c-a)(c-b)}\cdot\frac{1}{p-c} + \frac{1}{(a-b)(a-c)}\cdot\frac{1}{p-a} + \frac{1}{(b-c)(b-a)}\cdot\frac{1}{p-b}\right)$$

alakban. Legyen $P(x)$ legfeljebb másodfokú polinom, valamint a, b és c páronként különböző számok. A Lagrange-féle interpolációs formula szerint

$$(**)\qquad P(x)=A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+C(x-a)(x-b)=$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)\left(\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right),$$

ahol

$$A=\frac{P(a)}{(a-b)(a-c)},\quad B=\frac{P(b)}{(b-c)(b-a)},\quad C=\frac{P(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

Ha most a $P(x)\equiv 1$ választással élünk, akkor $(**)$ miatt

$$\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}=\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Innen $x=p$ helyettesítéssel kapjuk az állításunkat.

Megjegyzés. Tegyük fel, hogy n páronként különböző helyen ismert a legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $P(x)$ polinom értéke: $P(x_i)=y_i$, ahol $i=1,2,\ldots,n$. A Lagrange-féle interpolációs polinom egyértelműen megadja a $P(x)$ polinomot a következő alakban:

$$P(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}.$$

A $(**)$ állítás a következő gondolatmenettel is megkapható. Legyen

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c},$$

ahol $P(x)$ tetszőleges, legfeljebb másodfokú polinom, valamint a, b és c páronként különböző számok. (Elemi törtekre bontás.) Innen $(x-a)$-val történő szorzás után

$$\frac{P(x)}{(x-b)(x-c)}=A+(x-a)\left(\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}\right).$$

Ha most tekintjük az $x\to a$, $x\neq a$ határátmenetet, akkor

$$A=\frac{P(a)}{(a-b)(a-c)}.$$

Hasonlóan adódnak a B-re és C-re vonatkozó formulák is.

A fentebb látott gondolatmenetekre még egy szép alkalmazást mutatunk. Legyenek $a_1,a_2,\ldots,a_n$ páronként különböző valós számok, valamint $0\leqslant k\leqslant n$ természetes szám. Tekintsük az

$$S_n(k)=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}$$

összeget. Ekkor

$$S_n(k)=\begin{cases}0, & \text{ha } 0\leqslant k\leqslant n-2,\\ 1, & \text{ha } k=n-1,\\ \sum a_i, & \text{ha } k=n.\end{cases}$$

Induljunk ki abból, hogy bármely, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú $P(x)$ polinomra

$$(*)\qquad \frac{P(x)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{x-a_i},$$

ahol A_i alkalmas konstans. Akár a Lagrange-féle interpolációs polinomot, akár a fentebb látott, határérték számítást használó gondolatmenetet alkalmazzuk, kapható, hogy bármely i-re

$$A_i=\frac{P(a_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)},$$

továbbá

$$(**)\qquad P(x)=\sum_{i=1}^{n}A_i\prod_{j\neq i}(x-a_j)=\sum_{i=1}^{n}P(a_i)\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$

Legyen először $P(x)\equiv x^{k+1}$, ahol $0\leqslant k\leqslant n-2$ természetes szám. A $(*)$ összefüggés miatt, ha $x=0$, akkor

$$0=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^k}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}\ \Leftrightarrow\ S_n(k)=0.$$

A $(**)$ formulát a $P(x)\equiv x^{n-1}$ polinomra alkalmazva kapjuk, hogy

$$x^{n-1}=\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1}\prod_{j\neq i}\frac{x-a_j}{a_i-a_j}.$$

Mivel ez azonosság, ezért a jobb oldalon álló polinomban x^{n-1} együtthatója 1, vagyis

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{n-1}}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}=1.$$

Végül tekintsük a $P(x)\equiv x^n-\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$, legfeljebb $(n-1)$-ed fokú polinomot. Ebben a polinomban x^{n-1} együtthatója $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$, így $(**)$ miatt

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad \text{ahol}\quad A_i=\frac{a_i^n}{\prod\limits_{j\neq i}(a_i-a_j)}.$$

Ezzel beláttuk az $S_n(k)$ összegre vonatkozó mindhárom állítást.

Feladatok önálló gondolkodásra

1. Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszög a, b, c oldalhosszaira

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a}{c}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right|<1.$$

2. Tudjuk, hogy $a_i>0$, $b_i>0$, ahol $i=1,2,\ldots,n$. Bizonyítsuk, hogy

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2}\geqslant$$
$$\geqslant\sqrt{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2+(b_1+b_2+\ldots+b_n)^2}\,.$$

3. Bizonyítsuk, hogy tetszőleges a, b, c valós számokra

$$\sqrt{a^2-a+1}+\sqrt{b^2-b+1}+\sqrt{c^2-c+1}\geqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2+a+b+c+3}\,.$$

4. Mutassuk meg, hogyha az a, b és c valós számokra

$$|a-b|\geqslant|c|,\quad |b-c|\geqslant|a|,\quad |c-a|\geqslant|b|,$$

akkor a három szám közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével.

5. Határozzuk meg az összes olyan a és b valós számot, melyekre teljesül, hogy minden $0\leqslant x\leqslant 1$ esetén $|x^2-ax-b|\leqslant\frac{1}{8}$.

(*KöMaL*)

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c komplex számokra

$$|a|+|b|+|c|+|a+b+c|\geqslant|a+b|+|b+c|+|c+a|.$$

(*Hlawka*)

7. Igazoljuk, hogy ha $a,b,c>0$, akkor

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}\leqslant$$
$$\leqslant a+b+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca}\,.$$

(*AoPS*)

8. Igazoljuk, hogy ha M és N az ABC háromszög síkjának két, egymástól különböző pontja, akkor

$$\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}+\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BC\cdot BA}\geqslant 1.$$

(*Hayashi*)

Szakirodalom

[4] Reiman István: *Geometria és határterületei,* Gondolat (1986).

[5] Titu Andreescu – Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z,* Birkhäuser (2006).

Schultz János

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Felírjuk az 1; 2; 3; 4; 5 számjegyek sorbarendezésével képezhető összes ötjegyű számot.

a) Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege? (*6 pont*)

b) Hány olyan számtani sorozat létezik, melynek első tagja 12 345, szerepel benne az 54 321 is, és a differenciája pozitív egész szám? (*6 pont*)

2. Egy sorsjegy ára 1000 Ft. A sorsjegy lehetséges nyereményei: 2 000 Ft, 5 000 Ft, 20 000 Ft, 100 000 Ft, 500 000 Ft.

Ezek valószínűsége rendre: 11%, 5%, 0,81%, 0,17%, 0,02%.

a) Mennyi a nyeremény várható értéke? (*3 pont*)

b) Mekkora a valószínűsége, hogy nem nyerünk, ha egy sorsjegyet vásárolunk? (*2 pont*)

Tíz alkalommal veszünk egy-egy sorsjegyet. Mekkora a valószínűsége, hogy

c) legalább kétszer nyerünk; (*5 pont*)

d) pontosan háromszor nyerünk? (*3 pont*)

3. Egy 10 cm oldalú, szabályos hatszög alakú fehér tálca pereme mellett végiggörgetünk egy 6 cm átmérőjű, alul festékes korongot. Mekkora az ilyen módon beszínezett terület? A választ mm^2 pontossággal adjuk meg. (*12 pont*)