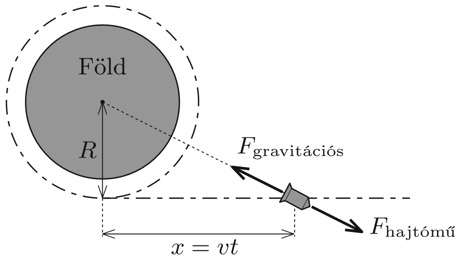
A Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny 1. elméleti fordulójában szereplő feladatok megoldása[*]

1. feladat. Jelölje a Föld tömegét M, sugarát R, a gravitációs állandót pedig γ! A körpályán keringő űrhajó mozgásegyenlete



$$\gamma \frac{m_0 M}{R^2} = m_0 \frac{v^2}{R},$$

ahonnan az űrhajó sebessége $v = \sqrt{\gamma M / R}$.

A körpályáról való letérés után t idővel, $x = vt$ út megtétele után az űrhajóra ható $\gamma m M/(R^2 + x^2)$ gravitációs erővel tart egyensúlyt a hajtómű által kifejtett $-u\dot{m}$ erő, ahol $m(t)$ az űrhajó pillanatnyi tömege, $\dot{m}$ pedig annak az idő szerinti deriváltja. Így a

$$\gamma \frac{m(t) M}{R^2 + v^2 t^2} = -u \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

differenciálegyenlethez jutunk, ami a változók szétválasztásával megoldható:

$$\gamma M \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{R^2 + v^2 t^2} = -u \int_{m_0}^{m_\infty} \frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

Itt már figyelembe vettük az $m(0) = m_0$ kezdeti feltételt, valamint bevezettük az űrhajó végső tömegére az m_∞ jelölést. A kijelölt integrálásokat elvégezve:

$$\frac{\gamma M}{R^2} \frac{R}{v} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{vt}{R} \right) \right]_0^\infty = -u [\ln m]_{m_0}^{m_\infty},$$

ebből:

$$\frac{\gamma M}{Rv} \cdot \frac{\pi}{2} = -u \ln \left(\frac{m_\infty}{m_0} \right).$$

Felhasználva a v keringési sebességre korábban kapott értéket, kifejezhetjük az űrhajó végső tömegét:

$$m_\infty = m_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi v}{2u}}.$$

Megjegyzések. 1. A feladat megoldható úgy is, hogy az űrhajó helyzetét a vezérsugár szögével paraméterezzük. Ekkor a kapott differenciálegyenlet azonos alakú a radioaktív bomlásokat (vagy egy kondenzátor kisülését) leíró differenciálegyenlettel, melynek megoldása a jól ismert exponenciális lecsengés.

[1] A feladatok szövegét a KöMaL múlt havi számában közöltük.

2. Több versenyző előjelhibát vétett a differenciálegyenlet felírásakor. Ez az elsőre ártalmatlannak tűnő hiba pozitív kitevőt eredményez a végső tömeg kifejezésében, mely szerint az űrhajó tömege a mozgás során növekedne! Ekkor észre kell venni, hogy az eredmény fizikailag értelmetlen, és megkeresni a hiba okát.

2. feladat. Legyen a gáz nyomása kezdetben p_0, térfogata V_0, az M tömegű dugattyú távolsága a henger aljától $h_0 = V_0/A$, ahol A a henger keresztmetszetterülete. Legyen a ráhelyezett súly tömege m. Súly nélkül a dugattyú egyensúlyi helyzetében $p_0 = Mg/A$, ha pedig a súly is jelen van, akkor egyensúlyban $1{,}25\,p_0 = (m+M)g/A$.

A gáz hőszigetelt tartályban van elzárva hőszigetelt dugattyúval, ezért az első főtétel alapján a gáz belső energiájának megváltozása megegyezik a gázon végzett munkával. Mivel a gázon csakis a nehézségi erőtér végez munkát (a rendszer vákuumban van), ezért ezt közvetlenül könnyen ki tudjuk számítani. Felmerülhet az adiabatikus folyamatokra érvényes Poisson-egyenlet (pV^κ =állandó) használata is, ez azonban a kezdő- és végállapot között *nem érvényes!* Igaz ugyan, hogy a gáz nem vesz fel/ad le hőt, mégsem adiabatikus folyamaton megy keresztül. Az adiabatikus folyamat egyik feltétele ugyanis a reverzibilitás, ami ebben a feladatban nem áll fenn. Amikor a súlyt rátesszük a dugattyúra, vagy arról levesszük, akkor a dugattyú (nem harmonikus) rezgésbe kezd. Noha nincsen súrlódás, a gáz viszkozitása miatt ez az oszcilláció lassan csillapodik (irreverzibilitás), majd a dugattyú egyensúlyba kerülve megáll. Határozzuk meg a dugattyú ezen egyensúlyi helyzeteit!

Legyen a súllyal terhelt dugattyú egyensúlyi helyzetében a gáz térfogata V_1, a dugattyú magassága a henger aljától mérve pedig h_1. Az első főtétel alapján

$$\frac{5}{2}(1{,}25\,p_0V_1 - p_0V_0) = W_{\text{neh}}.$$

A nehézségi erőtér munkáját a kezdeti és a végállapot határozza meg, azaz

$$W_{\text{neh}} = (m+M)g\frac{V_0 - V_1}{A} = 1{,}25\,p_0(V_0 - V_1).$$

Ezen két egyenletből:

$$V_1 = \frac{6}{7}V_0 \quad \to \quad h_1 = \frac{6}{7}h_0.$$

Ezután a súlyt levesszük, a dugattyú újra rezegni kezd, majd megáll h_2 magasságban, ahol a gáz térfogata V_2. Az első főtétel szerint

$$\frac{5}{2}(p_0V_2 - 1{,}25\,p_0V_1) = W'_{\text{neh}}.$$

A nehézségi erő munkája

$$W'_{\text{neh}} = -Mg\frac{V_2 - V_1}{A} = -p_0(V_2 - V_1).$$

Ez utóbbi két egyenletből:

$$V_2 = \frac{33}{28}V_1 = \frac{99}{98}V_0 \quad \to \quad h_2 = \frac{33}{28}h_1 = \frac{99}{98}h_0.$$

A magasságokra kapott eredmények minden ciklusban igazak. N darab ciklus után a két egyensúlyi helyzet:

$$h_{1N}=\frac{28}{33}\left(\frac{99}{98}\right)^N h_0,\quad h_{2N}=\left(\frac{99}{98}\right)^N h_0.$$

Ezen egyenletekből azt kapjuk, hogy N ciklus és a súly végső eltávolítása után dugattyú egyensúlyi helyzete akkor lesz magasabban, mint $2h_0$, ha

$$\left(\frac{99}{98}\right)^N h_0>2h_0\quad N=\frac{\lg 2}{\lg(99/98)}\approx 68{,}3.$$

Ez az eredmény azonban csak akkor lenne helyes, ha a gázt tartalmazó henger magassága $2h_0$-nál jóval magasabb lenne. Mivel a fenti számolással kapott egyensúlyi helyzetek csak sok rezgést követően alakulnak ki, a rezgés során a dugattyú átlendül ezeken a helyzeteken, azaz már ennél kevesebb ciklus esetén is elhagyhatja a dugattyú a hengert. Az első egyensúlyi helyzet körüli rezgés során a dugattyú nem hagyhatja el a hengert, hiszen annak kialakulását megelőzően olyan helyzetből indult a rezgés, ahol a dugattyú még a hengerben helyezkedik el. Vagyis a rezgés közbeni kirepülés csakis a második egyensúlyi helyzet körüli oszcilláció esetén jöhet szóba. Tehát meg kell határoznunk azt, hogy melyik ciklusban történik meg, hogy a dugattyú a második egyensúlyi helyzeten való első áthaladást követően eléri a henger tetejét.

Azonban ez nem egyszerű feladat, mert a rezgés során a dugattyú második egyensúlyi magassága kúszik felfelé, ahogy a csillapodás miatt egyre kisebb lesz a dugattyú egyensúlyi helyzetén való áthaladásakor vett maximális sebessége. Mivel a rezgés csillapítása kicsiny, így a dugattyú a súly levételét követően a maximális magasságot gyorsan eléri, valamint egy periódus alatt az egyensúlyi és a szélsőhelyzetek eltolódása kicsiny, ezért a gyors folyamatot adiabatikusnak tekinthetjük (lényegében az ilyen rövid folyamat reverzibilisnek tekinthető, de a teljes rezgésmegállásig vizsgálva már nem).

Jelöljük a dugattyú maximális h magasságához tartozó gáznyomást p-vel, a térfogatot V-vel. Az energiamegmaradás a kiinduló h_1 magasságú és a h magasságú helyzet között

$$\frac{5}{2}(pV-1{,}25\,p_0V_1)=-Mg\frac{V-V_1}{A}=-p_0(V-V_1).$$

Az adiabatikus egyenlet ($\kappa=7/5$):

$$pV^\kappa=1{,}25\,p_0V_1^\kappa.$$

A p nyomás kiküszöbölésével a

$$\frac{25}{8}\left(\frac{V_1}{V}\right)^\kappa+1=\frac{33}{8}\frac{V_1}{V}$$

egyenlet adódik. Ezt numerikusan (pl. iterációval) tudjuk megoldani, eredményül $V_1/V\approx 0{,}73$-at kapunk, azaz $h\approx 1{,}37h_1$.

Most már válaszolhatunk a feladat kérdésére. A dugattyú akkor hagyja el a hengert, ha

$$h_N = 1{,}37 h_{1N} > 2h_0, \qquad \left(\frac{99}{98}\right)^N > 1{,}72.$$

Ez akkor teljesül, ha $N > 53{,}4$, azaz az 54. ciklusban a dugattyú elhagyja a hengert.

3. feladat. Az *a*) kérdés segít a *b*) kérdés elemi megoldásához, de a *b*) kérdés (több számolással) megoldható az első kérdéstől függetlenül is. A *b*) kérdést kétféle úton is megoldjuk.

A rendszer a gyűrű függőleges tengelyére nézve forgásszimmetriát mutat, ezért célszerű hengerkoordináta-rendszerben gondolkozni; a gyűrű síkjától mért távolságot a z koordináta jellemzi, a gyűrű tengelyétől mért távolságot pedig r. A rendszer szimmetriája miatt sem a potenciál, sem a térerősség nem függ a harmadik hengerkoordinátától, ami a tengely körüli forgásszög. Az is egyszerű következménye a szimmetriának, hogy az elektromos térnek csak függőleges (E_z) és sugárirányú (E_r) komponense van.

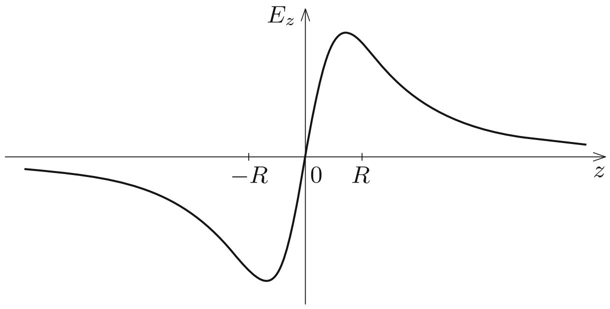
a) A rendszer forgásszimmetriája miatt a gyűrű függőleges tengelyén az elektromos térerősség tengelyirányú, és z magasságban a nagysága:

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R^2+z^2}\cos\varphi = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0}\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Itt φ a gyűrű és a vizsgált tengelypont által alkotott kúp félnyílásszöge, $\cos\varphi = z/\sqrt{R^2+z^2}$. Abban az esetben, ha $|z| \ll R$, ez a térerősség így közelíthető:

$$E_z(z) \approx \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Tehát $|z| \ll R$ esetén $E_z(z)$ közel lineáris, és $z \to \pm\infty$ esetén $E_z \to 0$, ahogy az *ábrán* is látható.



b) *I. megoldás: Gauss-törvénnyel.* A gyűrűnek az átmérőjére vett tükörszimmetriája miatt a gyűrű síkjában a térerősség sugárirányú. A középponttól $r \ll R$ távolságra a térerősség $E_r(r)$ nagyságát úgy kaphatjuk meg, hogy a Gauss-törvényt alkalmazzuk egy kis hengerre, melynek középpontja és tengelye egybeesik a gyűrű középontjával és tengelyével. A kis henger sugara legyen $r \ll R$, magassága

$2z \ll R$. A paláston a térerősség felületre merőleges komponense $E_r(r)$, az alaplapokon $E_z(z)$, így a Gauss-törvény szerint[2] $0 = 4\pi r z E_r(r) + 2\pi r^2 E_z(z)$, ahonnan

$$E_r(r) \approx -\frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

A közelítés $r \ll R$ esetén érvényes, és a negatív előjel azt jelzi, hogy a gyűrű síkjában a térerősség a gyűrű középpontja felé mutat.

II. megoldás: A potenciálra felírt integrálból. A kérdést megoldhatjuk az *a*) kérdés megválaszolása nélkül is, kicsit több számolással. A gyűrű síkjában a középponttól r távolságra az elektromos potenciál

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\alpha}},$$

ahol az α középponti szöggel paramétereztük a gyűrű pontjait, és az integrandus nevezőjében a koszinusztételt alkalmaztuk. A feladat megoldásához az integrálást nem kell elvégezni! Az elektromos térerősség $E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$ sugárirányú a gyűrű síkjában, és a középpontban zérus, hiszen $\Phi(r)$ páros függvény. Így $r \ll R$ esetén

$$E_r(r) \approx r\frac{\mathrm{d}E(0)}{\mathrm{d}r} = -r\frac{\mathrm{d}^2\Phi(0)}{\mathrm{d}r^2} =$$
$$= -\frac{Qr}{8\pi^2\varepsilon_0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(R^2+r^2-2Rr\cos\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{r=0}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Mivel a deriválás és az integrálás más változóra történik, a két művelet felcserélhető. Az integrálon belül a deriváltra $(3\cos^2\alpha - 1)R^{-3}$ adódik, így

$$E_r(r) \approx -\frac{Q}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(3\cos^2\alpha-1)\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Ez megegyezik a Gauss-törvény segítségével kapott értékkel.

c) Előző eredményeinket felhasználva a kis test mozgásegyenlete (kis kitérések esetén)

$$m\ddot{x} = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 R^3}x.$$

Ez egy harmonikus rezgőmozgást ír le, aminek periódusideje:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m R^3}{Qq}}.$$

[2]Valójában a térerősség $E_r(r,z)$ radiális és $E_z(r,z)$ függőleges komponense is függ mind az r, mind a z koordinátától a henger felületén. Azonban a rendszer szimmetriája miatt $E_r(r=0,z)=0$ és $E_z(r,z=0)=0$, így $r/R, z/R \ll 1$ esetén első rendben $E_r(r,z) \approx$ $\approx E_r(r,0) = E_r(r)$ és $E_z(r,z) \approx E_z(0,z) = E_z(z)$.

4. feladat. A feladat nem tesz említést az áramirányokról. Az alábbiakban feltesszük, hogy az áramok ellentétes körüljárás szerint folynak a csövek palástján. Az alább bemutatott számoláshoz hasonlóan megmutatható, hogy ha nem így lenne, akkor a belső cső kis kitérítésekor a mágneses mezőben tárolt energia növekedne, így a cső az elengedés után az eredeti helyzete körül rezgésbe jönne.

Tekintsünk először csak egy darab hosszú, szupravezető csövet! A szupravezető anyagba nem hatolhat be a mágneses tér, ezért a cső belsejében az indukcióvonalak a szimmetriatengellyel párhuzamos irányban futnak, majd a cső végeinél kilépnek és szerteágaznak. A szupravezető cső mágneses tere tehát nagyon hasonlít egy szolenoid tekercs teréhez azzal az apró különbséggel, hogy a szolenoid végeinek közelében a tekercs menetei között is lépnek ki indukcióvonalak. Emiatt a szupravezető cső palástján az árameloszlás (a végek kicsiny környezetétől eltekintve) egyenletes. A cső belsejében tehát a mágneses indukcióvektor nagysága $\mu_0 I/\ell$ (ahogy az a szolenoidra érvényes összefüggésből vagy a gerjesztési törvényből adódik), míg kívül elhanyagolható.

A két egymásba helyezett cső eredő mágneses terét szuperpozícióval lehet meghatározni. Az ellentétes áramirányok miatt csak a két cső közötti térrészben van mágneses mező (ennek indukcióját jelölje B_1). A kisebb, R_2 sugarú cső belsejében a mágneses indukció zérus ($B_2 = 0$), csakúgy, mint a nagyobb csövön kívül. A csövek közötti térrészben az indukcióvektor nagysága tehát:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{\ell}.$$

Amikor a „lövedék” elhagyja a nagyobb csövet, az árameloszlás megváltozik a csövekben, többé már nem lesz egyenletes, az erőhatások pedig bonyolult módon határozhatók meg. Mire azonban a két cső nagy távolságra kerül egymástól, az árameloszlások ismét egyenletessé válnak a palástok mentén. A szupravezető csövek által körülfogott mágneses fluxus eközben nem változhat meg, mert az végtelen nagy áramot indukálna bennük a nulla elektromos ellenállásuk miatt. A nagyobb, illetve a kisebb csövön áthaladó fluxus kezdetben:

$$\Phi_1 = \pi\big(R_1^2 - R_2^2\big)B_1, \qquad \Phi_2 = 0.$$

Az egymástól távol került csövek esetén a kisebb belsejében csak úgy maradhat nulla a fluxus, ha a végállapotban nem folyik benne áram. Ugyanebben a helyzetben a nagyobb cső fluxusa:

$$\Phi_1' = \pi R_1^2 B_1',$$

ahol B_1' a nagyobb cső belsejében kialakuló, jó közelítéssel homogén mágneses mező indukciója. Ez utóbbi kifejezhető a $\Phi_1' = \Phi_1$ egyenlőség felhasználásával:

$$B_1' = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2} B_1.$$

A rendszerben a szupravezető csövek miatt nincs disszipáció, ezért a mágneses mezőben tárolt energia csökkenése fedezi a lövedék mozgási energiáját:

$$E_{\text{mágn.}}^{\text{kezdeti}} = E_{\text{mágn.}}^{\text{végső}} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Ismert, hogy B indukciójú mágneses mező energiasűrűsége (azaz a mező egységnyi térfogatában tárolt energia) $B^2/(2\mu_0)$, ezért az energiamérleg így írható:

$$\frac{B_1^2}{2\mu_0}\pi\left(R_1^2-R_2^2\right)\ell=\frac{{B_1'}^2}{2\mu_0}\pi R_1^2\ell+\frac{1}{2}mv^2.$$

Behelyettesítve B_1 és B_1' korábban felírt értékeit, rövid rendezés után a következő eredményt kapjuk a „lövedék" végsebességére:

$$v=\frac{R_2}{R_1}I\sqrt{\frac{\pi\mu_0}{m\ell}\left(R_1^2-R_2^2\right)}.$$

Szász Krisztián, Tasnádi Tamás és **Vigh Máté**

Beszámoló az 5. Európai Fizikai Diákolimpiáról

Az 5. Európai Fizikai Diákolimpia (EuPhO) a COVID-19 járvány miatt az előző évhez hasonlóan online formában került megrendezésre június 19. és 26. között. A versenyen 27 európai és 19 Európán kívüli ország összesen 219 diákja vett részt. A versenyzők a legtöbb országban egy helyen, tanári felügyelettel írták meg a dolgozatokat, amelyeket beszedés után beszkenneltek, és elküldtek a verseny szervezőinek, akik azokat kijavították. A verseny tisztasága érdekében az egész folyamatot (dolgozatírás, szkennelés) videón közvetíteni kellett.

A verseny az 5 órás elméleti fordulóval indult, majd a következő nap a szintén 5 órás kíséletivel folytatódott (a feladatokat alább közöljük). A tavalyi versenyhez hasonlóan a kísérleti fordulóban két szimulációs programmal dolgoztak a diákok. A dolgozatokat a szervezők által felkért javítók pontozták. A pontok esetleges megnövelése, a *moderáció* most is a versenyzők feladata volt, ami szöveges formában beküldött kérés alapján történt. Az online módon tartott eredményhirdetésre június 26-án került sor, ahol kiderült, hogy a verseny abszolút győztese *Vlad Stefan Oros* Romániából 41,3 ponttal (a maximális pontszám 50 volt). Az aranyérem határa 23,5 pont volt, amit 15 versenyző ért el. Ezüstérmet 30, bronzérmet 66 és dicséretet 27 diák kapott.

A magyar csapat egy többkörös kiválasztási folyamat végén alakult ki (ennek részleteit az előző számban közöltük). A csapat és kiemelkedő eredményeik:

Kovács Balázs Csaba (Hatvan, Bajza József Gimnázium, 11. oszt.), *aranyérem* (26,6 pont), felkészítő tanára: *Maruzsiné Sevella Judit, Kovács László;*

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.), *ezüstérem* (22,4 pont), felkészítő tanára: *Schramek Anikó;*