**B. 5195.** Mutassuk meg, hogy minden $(x;y)$ pozitív valós számokból álló számpár és minden $0<p<1$ valós szám esetén fennáll az $x^p\cdot y^{1-p}<x+y$ egyenlőtlenség.

(*3 pont*)

**B. 5196.** Legyen $p(x)=2x+1$. Az $A$ az $S=\{1,2,\ldots,2021\}$ halmaz olyan részhalmaza, mely minden $n$-re az $n$, $p(n)$, $p\big(p(n)\big)$ számok közül legfeljebb egyet tartalmaz, de újabb $S$-beli elem hozzávétele esetén már nem teljesül ez a feltétel. Hány elemű lehet az $A$ halmaz?

(*6 pont*)

**B. 5197.** Jelölje $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát, és legyen $k$ adott pozitív egész. Van-e olyan monoton növő $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+x+k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

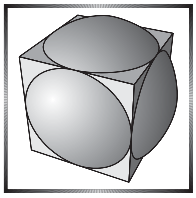
(*6 pont*)

❄

**Beküldési határidő: 2021. november 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

## Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (806–808.)



**A. 806.** Adott a síkon négy különböző egyenes, melyek nem mennek át egy ponton, és nincs köztük három párhuzamos. Bizonyítandó, hogy a síkon lehet találni négy pontot, $A$-t, $B$-t, $C$-t és $D$-t, melyekre teljesülnek a következők:

($i$) $A$, $B$, $C$ és $D$ ebben a sorrendben egy egyenesre esnek,

($ii$) $AB=BC=CD$,

($iii$) a négy adott egyenes alkalmas sorrendje mellett $A$ az első, $B$ a második, $C$ a harmadik és $D$ a negyedik egyenesre esik.

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

**A. 807.** Adott egy $n\geqslant 2$ egész szám. Legyen $G$ egy véges egyszerű gráf, melynek minden élén legfeljebb $n$ kör halad át. Bizonyítandó, hogy a gráf kromatikus száma legfeljebb $n+1$.

Javasolta: *Schweitzer Ádám* (Budapest)

**A. 808.** Keressük meg az összes páronként relatív prím $a$, $b$, $c$ pozitív egészt, melyekre

$$a^2+3b^2c^2=7^c.$$

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

**Beküldési határidő: 2021. november 10.**
**Elektronikus munkafüzet:** `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

## „Titkos üzenet száll a széllel” I.*

### Előzmények dióhéjban

Amióta ember él a Földön, akadtak olyanok, akiknek voltak titkaik. Ezeket persze csak egy vagy néhány emberrel szerették volna megosztani. A titoktartás akkor kezdett nehézkessé válni, amikor az a bizonyos másik messze volt, üzenni kellett neki. Hamar rájöttek, hogy az üzenet elrejtése nehézkes, mert ha valaki megtalálja az üzenetet, vége a titoknak. Az üzenet értelmét kellett elrejteni. hogy fellelése esetén ne lehessen kihámozni a tartalmát. (Ma már tudjuk, hogy inkább arra kell törekedni, hogy ne legyen érdemes a titkosított tartalmat visszaalakítani, hiszen a megoldási technikák idő- és erőforrásigénye miatt talán a megfejtés időpontjára az üzenet elavul, vagy a megfejtés többe kerül, mint amekkora hasznot az üzenet hozhat.)

Első lépésként a nyelvi rendszertől kell megszabadulni, vagyis a kis- és nagybetűk megkülönböztetésétől, a szóközöktől és az írásjelektől. Az üzenet olvashatóságát ezek alig rontják, viszont a megfejtőnek sokat segítenének.

A kialakuló titkosítási módszereket két nagy csoportba sorolhatjuk:

- Az üzenet eredeti karaktereit megtartjuk, csak valamilyen szabályszerűség szerint megváltoztatjuk a sorrendjüket, ez az úgynevezett *keverő módszer.*
- Az üzenet eredeti karaktersorrendjét megtartjuk, csak az egyes karaktereket cseréljük le egy szabálynak megfelelően, ezt nevezzük *cserélő módszernek.*

A mai számítógépek kapacitása mellett a keverő módszernek nem sok értelme van, a gép pillanatok alatt végigpróbálhat néhány tízezer keverési lehetőséget. Az értelmes keverési módok száma nagyságrendileg ebbe a tartományba esik.

A legegyszerűbb cserélő technikák már Julius Caesar korában is elavultnak voltak mondhatók, hiszen arab tudósok már időszámításunk kezdete előtt rájöttek az így titkosított – úgynevezett *monoalfabetikus* módszer – megfejtésére.

A titkosítási módszer hiányában is lehetséges volt az így titkosított üzenet megfejtése. A visszafejtésre azért volt lehetőség, mert a nagybetűs írással, a szóközök

*A cím a TNT együttes *Titkos üzenet* című dalának szövegét idézi.