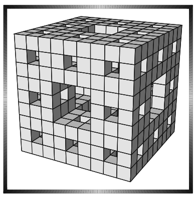
C. 1688. Hány eleme lehet annak az adathalmaznak, melynek egyetlen módusza a 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5?

Beküldési határidő: 2021. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5190–5197.)

B. 5190. Egy n sorból és k oszlopból álló táblázat mindegyik mezőjébe -1 van írva. Egy lépésben egy sort és egy oszlopot kijelölünk és előbb a kijelölt sor, majd a kijelölt oszlop mindegyik számát az ellentettjére változtatjuk.

Mely n és k esetén érhető el, hogy mindegyik mezőben 1-esek legyenek?

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5191. Van egy derékszögű favonalzónk, amelynek az átfogóját megrágta a nyúl. A vonalzó segítségével össze tudunk kötni közeli pontokat, az egyes szakaszokat meg tudjuk hosszabbítani, és az egyenesekre bármelyik pontjukban merőlegest tudunk állítani. Meg tudjuk-e szerkeszteni egy tetszőlegesen nagy kör középpontját?

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 5192. Nyolc gyerek elhatározta, hogy az őszi szünet első hét napján egy-egy focimeccset játszanak, négy a négy ellen. Meg tudják-e úgy szervezni a meccseket, hogy bármelyik három gyerek legalább egyszer ugyanabban a csapatban játsszon?

(*5 pont*) *Gáspár Merse Előd* (Budapest) ötletéből

B. 5193. Az ABC hegyesszögű háromszögben $BCA\sphericalangle = 45°$, a magasságok talppontjai a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, a háromszög magasságpontja M. Tudjuk, hogy az F pont az AB szakaszt $AF : FB = 2 : 3$ arányban osztja. Az AC oldalon megjelöljük azt a G pontot, amelyre $CG = BM$. Mutassuk meg, hogy az ABG háromszög súlypontja M.

(*4 pont*)

B. 5194. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$. Az AB oldal a beírt kört az E pontban érinti, a C-ből induló szögfelezőt az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AF = 2BE$.

(*4 pont*)

B. 5195. Mutassuk meg, hogy minden $(x;y)$ pozitív valós számokból álló számpár és minden $0<p<1$ valós szám esetén fennáll az $x^p \cdot y^{1-p} < x+y$ egyenlőtlenség.

(*3 pont*)

B. 5196. Legyen $p(x)=2x+1$. Az A az $S=\{1,2,\ldots,2021\}$ halmaz olyan részhalmaza, mely minden n-re az n, $p(n)$, $p\big(p(n)\big)$ számok közül legfeljebb egyet tartalmaz, de újabb S-beli elem hozzávétele esetén már nem teljesül ez a feltétel. Hány elemű lehet az A halmaz?

(*6 pont*)

B. 5197. Jelölje $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát, és legyen k adott pozitív egész. Van-e olyan monoton növő $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+x+k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

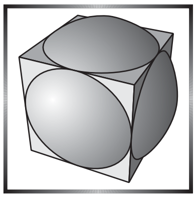
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2021. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (806–808.)



A. 806. Adott a síkon négy különböző egyenes, melyek nem mennek át egy ponton, és nincs köztük három párhuzamos. Bizonyítandó, hogy a síkon lehet találni négy pontot, A-t, B-t, C-t és D-t, melyekre teljesülnek a következők:

(*i*) A, B, C és D ebben a sorrendben egy egyenesre esnek,

(*ii*) $AB=BC=CD$,

(*iii*) a négy adott egyenes alkalmas sorrendje mellett A az első, B a második, C a harmadik és D a negyedik egyenesre esik.

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

A. 807. Adott egy $n\geqslant 2$ egész szám. Legyen G egy véges egyszerű gráf, melynek minden élén legfeljebb n kör halad át. Bizonyítandó, hogy a gráf kromatikus száma legfeljebb $n+1$.

Javasolta: *Schweitzer Ádám* (Budapest)