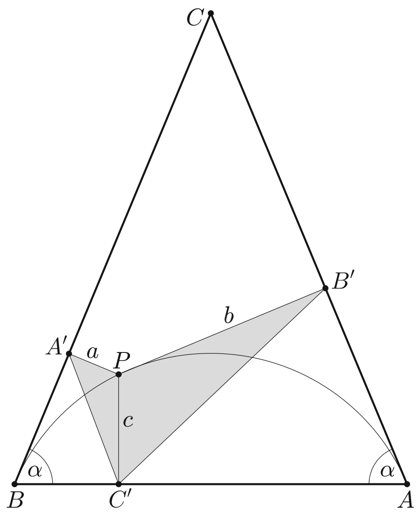
Matematika feladat megoldása

B. 5032. *Mi a mértani helye egy egyenlő szárú háromszög belsejében azoknak a pontoknak, amelyeknek a száraktól mért távolságaik mértani közepe az alaptól mért távolsággal egyenlő?*

(*4 pont*)

Megoldás. Jelölje a P pont háromszög oldalaitól mért távolságát a, b és c az *ábra* szerint. A feltétel szerint $\sqrt{ab}=c$, amiből $ab=c^2$, majd $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$ következik.



$AB'PC'$ húrnégyszög, mivel B'-nél és C'-nél lévő szögei derékszögek, ezért összegük 180°. Így

$$B'PC'\sphericalangle=180^\circ-\alpha.$$

Hasonló okból húrnégyszög a $BC'PA'$ négyszög is, amiből pedig $C'PA'\sphericalangle=180^\circ-\alpha$ következik.

Vagyis $C'PA\triangle\sim B'PC\triangle$, hiszen két szomszédos oldaluk aránya és az általuk közrezárt szög megegyezik. Ekkor $PA'C'\sphericalangle=PC'B'\sphericalangle$ is teljesül.

A kerületi szögek tétele miatt

$$PA'C'\sphericalangle=PBC'\sphericalangle,\quad \text{illetve}\quad PB'C'\sphericalangle=PAC'\sphericalangle.$$

Továbbá az előző hasonlóság miatt ennek a két szögnek az összege

$$180^\circ-B'PC'\sphericalangle=180^\circ-(180^\circ-\alpha)=\alpha.$$

Tehát $PBA\sphericalangle+PAB\sphericalangle=\alpha$. Mivel egy háromszög belső szögeinek összege 180°, így ebből $BPA\sphericalangle=180^\circ-\alpha$ következik, vagyis P rajta van az AB szakasz C felé eső $180^\circ-\alpha$ szögű látókörívén.

A gondolatmenet működik visszafelé is: ha P a látókörív egy belső pontja, akkor $PBA\sphericalangle+PAB\sphericalangle=\alpha$. Mivel $AB'PC'$ és $BC'PA'$ húrnégyszögek, így ebből a kerületi szögek tétele miatt $PA'C'\sphericalangle+PB'C'\sphericalangle=\alpha$ következik. A két húrnégyszögből

$$C'PB'\sphericalangle=C'PA'\sphericalangle=180^\circ-\alpha$$

és így

$$PC'B'\sphericalangle+PB'C'\sphericalangle=PA'C'\sphericalangle+PC'A'\sphericalangle=\alpha$$

is következik. Tehát $PC'B'\sphericalangle = PA'C'\sphericalangle (= \alpha - PB'C'\sphericalangle)$ és így

$$C'PA'\triangle \sim B'PC'\triangle,$$

mert szögeik páronként megegyeznek. Ebből következik, hogy a megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, amiből már látható, hogy $\sqrt{ab} = c$ is teljesül.

Vagyis a keresett mértani hely az AB szakasz $180^\circ - \alpha$ szögű látókörívének a háromszög belsejébe eső része, ahol α a háromszög alapokon fekvő szögét jelöli.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

33 dolgozat érkezett. 4 pontos 24, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (699–703.)

K. 699. Van hat korongunk, az egyik oldalukon betűjelek vannak (A, B, C, D, E, F), a másik oldalukon számok (valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6). A korongok úgy vannak letéve az asztalra, hogy a betűs oldalát látjuk. Tudjuk viszont, hogy az A, B és C jelű korongokon lévő számok összege 14, az A, D és E jelű korongokon lévő számok összege pedig 12. Legalább hány korongot kell megfordítanunk ahhoz, hogy megtudjuk, melyik betűjelű korongon melyik szám áll?

K. 700. Van tíz számkártyánk, melyeken az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 számok állnak. A kártyákat egymás mellé tesszük az asztalra és hármasával összeadjuk a rajtuk álló számokat: először az 1., 2., 3.; majd a 2., 3., 4.; a 3., 4., 5.; és így tovább; végül a 8., 9., 10. kártyákon lévőket. Így rendre az alábbi összegeket kapjuk: 14, 18, 24, 23, 24, 21, 16, 12. Mennyi az első és az utolsó kártyára írt számok összege?

K. 701. Egy bolha ül a számegyenesen a 0 számon és ugrani készül. A bolha minden ugrásánál jobbra vagy balra ugrik 3-at vagy 5-öt. A bolha célja, hogy 1-től 20-ig eljusson minden egész számra. Adjunk meg egy legfeljebb 22 ugrásból álló ugrássorozatot, amellyel ezt a célját el tudja érni.

K/C. 702. Öt nem figurás lapot húztunk egy pakli 52 lapos franciakártyából. Tudjuk, hogy mind a négy színből van köztük legalább egy. A kártyák értékét jelző páros számok összege ugyanannyi, mint a páratlanoké. Továbbá a pikkek összege 14, a pirosak összege 10, a legkisebb kártya pedig kőr. Melyik lapokat húztuk?