Megoldásvázlatok a 2021/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$,

b) $\dfrac{1}{\cos x+1}+\dfrac{1}{\cos x-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}$. (*12 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A négyzetgyökök miatti kikötés $x\geqslant 0$. Emeljük négyzetre mindkét oldalt. $x+8-2\sqrt{x+8}\sqrt{x}+x=x+3$, rendezve $x+5=2\sqrt{x(x+8)}$, újabb négyzetre emelés után $x^2+10x+25=4(x^2+8x)$, 0-ra redukálva $0=3x^2+22x-25$.

A megoldóképletbe helyettesítve:

$$x_{1,2}=\frac{-22\pm\sqrt{22^2-4\cdot 3\cdot(-25)}}{6}=\frac{-22\pm 28}{6}\ \Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=-\frac{25}{3}.$$

Az x_2 nem lehet megoldás, mert negatív. Ellenőrizzük x_1-et: $\sqrt{1+8}-\sqrt{1}=\sqrt{1+3}$, vagyis $3-1=2$. Igaz kijelentést kaptunk, tehát az egyenlet megoldása: $x=1$.

II. megoldás. A kikötés után adjunk az egyenlet mindkét oldalához $\sqrt{x}$-et, majd emeljünk négyzetre: $x+8=x+2\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x+3$, rendezve $5-x=2\sqrt{x^2+3x}$. Újabb kikötés adódott: $5-x\geqslant 0$, tehát $0\leqslant x\leqslant 5$. A négyzetre emelés után most a $25-10x+x^2=4(x^2+3x)$ egyenletet kaptuk, ami a 0-ra redukálás után megegyezik az I. megoldásban látható egyenlettel, a befejezés ugyanúgy történik.

b) Alkalmazzuk a négyzetes összefüggést:

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

Ezt felhasználva:

$$\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\quad(\cos x\neq\pm 1),$$

szorozzunk $(1+\cos x)(1-\cos x)$-szel:

$$1-\cos x-(1+\cos x)=\sqrt{3},\quad -2\cos x=\sqrt{3},$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ x_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=\frac{7\pi}{6}+2l\pi\ (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Mivel $\cos x_{1,2}\neq\pm 1$, ezért mindkét gyök megoldása az egyenletnek.

2. *Ha a fonyódi hajóállomás mólójának* (F) *végéről a badacsonyi kikötő* (B) *felé nézünk, akkor ettől az iránytól jobbra* $75°$*-os szögben Révfülöp kikötője* (R), *balra* $28°$*-os szögben pedig Szigliget kikötője* (S) *látszik. Tudjuk, hogy az* FRB *háromszög egyenlő szárú, melynek alapja* FB, *valamint azt is, hogy az* FBS *háromszög is* *egyenlő szárú, amelynek alapja az FS szakasz. Egy vitorlás hajó egyik nap Fonyódról Révfülöpre, onnan Badacsonyba, majd Szigligetre vitorlázott, ahol a hajón utazók megebédeltek, és visszatértek Fonyódra. Fonyód a Balaton déli partján, Badacsony vele szemben, a Balaton északi partján található. A badacsonyi kikötő a fonyóditól* 5,2 km*-re van* ($FB = 5{,}2$ km)*, a Föld görbületétől eltekinthetünk.*

a) Számítsuk ki, hogy legalább hány km*-t tett meg ezen a napon a vitorlás. A végeredményt egész számra kerekítve* km*-ben adjuk meg.*

Kiderült, hogy a hajón tartózkodók közül néhányan már korábban is ismerték egymást (az ismeretség kölcsönös). Egy n csúcsú gráffal ábrázoltuk ezeket az ismeretségi viszonyokat, ahol a személyeket a csúcsok jelképezték, két csúcsot akkor és csak akkor kötött össze él, ha a csúcsoknak megfelelő személyek korábban már ismerték egymást. Olyan egyszerű, összefüggő gráfot kaptunk, amelynek 10 *éle lett. Jelölje A az n csúcsú egyszerű, összefüggő gráf élei számának lehetséges legkisebb, B pedig a lehetséges legnagyobb értékét.*

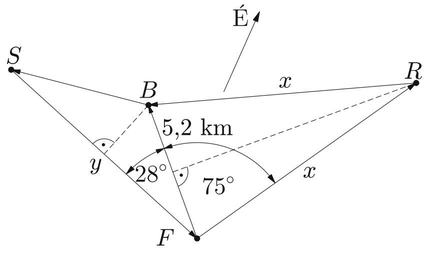
b) Hányan utaztak a hajón, ha $\frac{A+B}{2} = 10$*?* *(12 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Készítsünk vázlatot a kikötők elhelyezkedéséről. Az egyenlő szárú háromszögek alapjainak felezőmerőlegeseit berajzolva felírhatjuk, hogy $\frac{2{,}6}{FR} = \cos 75°$; innen $FR = 10{,}05$ km, valamint

$$\frac{\frac{SF}{2}}{5{,}2} = \cos 28° \ \Rightarrow\ SF = 9{,}18 \text{ km}.$$

A vitorlás hajó a kikötőket érintve legalább $2 \cdot 10{,}05 + 5{,}2 + 9{,}18 = 34{,}48$ km $\approx$ ≈ 34 km utat tett meg.

II. megoldás. Legyen $FR = RB = x$; $SF = y$, majd írjuk fel a koszinusztételt BR-re:



$$x^2 = x^2 + 5{,}2^2 - 2x \cdot 5{,}2 \cdot \cos 75°,$$

ebből $x = 10{,}05$ km.

$FBS\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 28° = 124°$. Felírva a szinusztételt:

$$\frac{y}{5{,}2} = \frac{\sin 124°}{\sin 28°},$$

ahonnan $y = 9{,}18$ km.

Az út hossza legalább $2x + 5{,}2 + y = 34{,}48$ km ≈ 34 km.

További megoldások is vannak.

b) Az n csúcsú egyszerű, összefüggő gráf éleinek száma akkor minimális, ha a gráf fagráf, ebben az esetben $n-1$ éle van; akkor maximális, ha teljes gráf, amelynek $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van.

A megoldandó egyenlet:

$$\frac{(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}}{2}=10,$$

rendezve: $n^2+n-42=0$.

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 42}}{2}=\frac{-1\pm 13}{2}\ \Rightarrow\ n_1=6,\quad (n_2=-7).$$

A hajón hatan utaztak.

Ellenőrzés: ha a 6 csúcsú gráf fagráf, akkor 5 éle van; ha teljes gráf, akkor $\frac{6\cdot 5}{2}=15$; $\frac{5+15}{2}=10$.

3. *Tekintsük az alábbi kijelentéseket:*

A) Ha egy egyszerű gráf csúcsainak száma páratlan, akkor van páros fokú csúcsa.

B) Ha egy számtani sorozat konvergens, akkor különbsége pozitív szám.

C) Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem korlátos.

D) Ha egy mértani sorozat hányadosának abszolút értéke egynél kisebb, akkor a sorozat konvergens.

a) Igazak vagy hamisak az állítások?

b) Fogalmazzuk meg az A) és D) kijelentések megfordítását, majd döntsük el ezek logikai értékét.

Minden esetben indokoljuk válaszunkat. *(14 pont)*

Megoldás. *a) A)* Igaz. Ha nem lenne páros fokú csúcsa, akkor a fokszámok összege páratlan szám lenne (mert páratlan számú páratlan szám összege páratlan), ami lehetetlen, a fokszámok összegének páros számnak kell lennie.

B) Hamis. Ha a különbség bármilyen kicsi pozitív szám volna, kellően sokszor véve a többszöröse akármilyen nagy számnál nagyobb volna, azaz a sorozat felülről nem korlátos, így konvergens sem lehet.

Precízebben ugyanez: $d>0; a_n=a_1+(n-1)d$. Legyen $K>0$, ekkor

$$a_1+(n-1)d>K\ \Rightarrow\ n>\frac{K-a_1}{d}+1.$$

Legyen $n_0\geqslant\frac{K-a_1}{d}+1$ pozitív egész szám – vagyis akármekkora pozitív K-hoz van küszöbindex, hogy az ennél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak mind nagyobbak K-nál.

A sorozat felülről nem korlátos, nem lehet konvergens.

(*Megjegyzés.* Csak a konstans számtani sorozatok konvergensek, határértékük a konstans.)

C) Hamis. Ellenpélda: $a_n=(-1)^n$.

D) Igaz. $a_n=a_1q^{n-1}$. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, ha $|q|<1$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=a_1\cdot 0=0.$$

b) *A*) megfordítása: Ha egy egyszerű gráfnak van páros fokú csúcsa, akkor csúcsainak száma páratlan.

A kijelentés logikai értéke hamis. Ellenpélda: a gráf csúcsai egy négyzet csúcsai, élei a négyzet oldalai. (Minden olyan gráf jó ellenpéldának, amely tartalmaz legalább egy páros fokú csúcsot, és csúcsainak száma páros szám.)

D) megfordítása: Ha egy mértani sorozat konvergens, akkor $|q|<1$.

A kijelentés logikai értéke hamis. Ellenpélda: $a_n=2021$. A sorozat határértéke 2021, hányadosa 1. (Minden konstans sorozat megfelel ellenpéldának.)

4. *a*) *Számítsuk ki az y tengely azon pontjának koordinátáit, amelyből az $A(-1;1)$, $B(3;9)$ pontok derékszögben látszanak.*

Az $A(-1;1)$, $B(3;9)$, továbbá a C pont illeszkedik az $y=x^2$ egyenletű parabolára, C rajta van a parabola A és B közé eső ívén.

b) *Határozzuk meg C koordinátáit, ha az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb.* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Az AB szakasz Thalész-körének középpontja $O\left(\frac{-1+3}{2};\frac{1+9}{2}\right)$, egyenlete:

$$(x-1)^2+(y-5)^2=(3-1)^2+(9-5)^2,$$

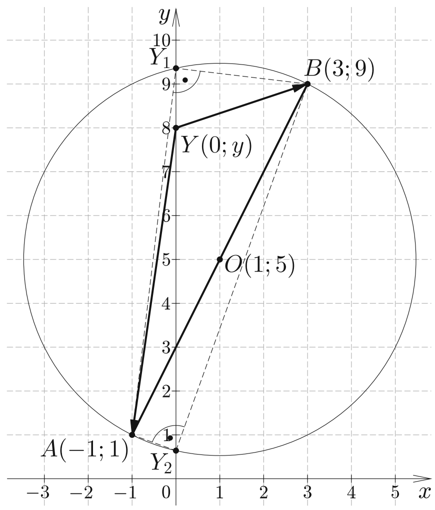
$$(x-1)^2+(y-5)^2=20.$$

Az y tengely pontjainak első koordinátája (abszcisszája) 0, így az egyenlet: $(y-5)^2=19$,

$$|y-5|=\sqrt{19}\ \Rightarrow\ y_1=5+\sqrt{19},$$

$y_2=5-\sqrt{19}$. A pontok tehát:

$$Y_1\left(0;5+\sqrt{19}\right),\quad Y_2\left(0;5-\sqrt{19}\right).$$



a) *II. megoldás.* A keresett pont $Y(0;y)$. $\overrightarrow{YA}(-1;1-y)$, $\overrightarrow{YB}(3;9-y)$. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz:

$$(-1)\cdot 3+(1-y)(9-y)=0.$$

Rendezve: $y^2-10y+6=0$. $y_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{76}}{2}=5\pm\sqrt{19}$.

Megkaptuk az I. megoldásban szereplő koordinátákat.

b) *I. megoldás.* $x\in[-1;3]$ (ez nyilvánvaló, a további megoldásokban nem ismétlem meg). Az $ADEB$ trapéz területe: $\frac{(1+9)4}{2}=20$ területegység (te).

$t_\triangle = 20 - (t_1 + t_2)$, ahol

$$t_1 = t_{ADFC} = \frac{(1+x^2)(x+1)}{2} = \frac{x^3+x^2+x+1}{2},$$

$$t_2 = t_{CFEB} = \frac{(x^2+9)(3-x)}{2} = \frac{-x^3+3x^2-9x+27}{2},$$

$$t_1 + t_2 = \frac{4x^2-8x+28}{2} = 2x^2-4x+14,$$

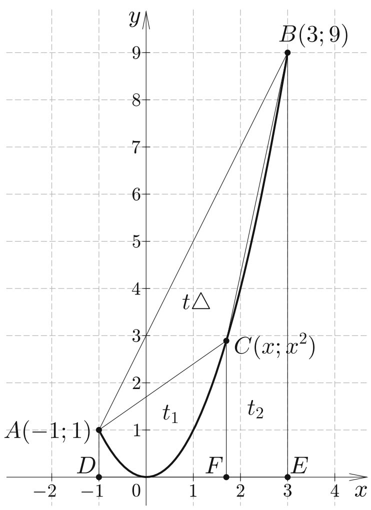
$$t_\triangle = 20 - 2x^2 + 4x - 14 = -2x^2 + 4x + 6.$$

(1) befejezés: $t_\triangle = -2(x^2-2x+1)+6+2 = 8-2(x-1)^2$. Ez akkor a legnagyobb, ha a 8-ból a lehető legkevesebbet vonunk ki, ami akkor következik be, ha $x=1$. Tehát a háromszög területe akkor a legnagyobb, ha $C(1;1)$.

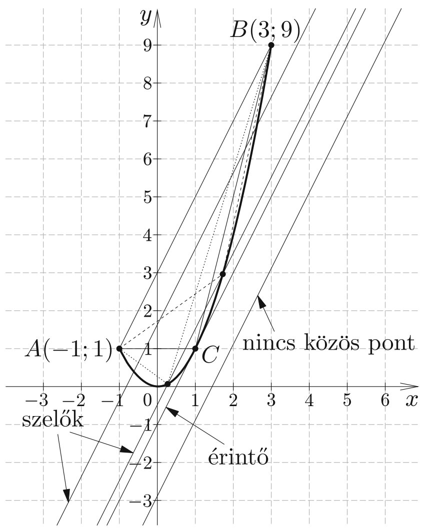
(2) befejezés: a $t_\triangle = -2x^2+4x+6$ függvény grafikonja egy „lefelé nyíló” parabola, melynek az x tengellyel vett metszéspontjait a $-2x^2+4x+6=0$ gyökei adják. A görbe szimmetria tulajdonsága miatt a maximumhely a két gyök számtani közepénél van, tehát:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4(-2)6}}{-4} = \frac{-4\pm 8}{-4} \;\Rightarrow\; x_1=-1,\; x_2=3 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

(A két gyök összegét megkaphattuk volna a Viète-formula alkalmazásával, a gyökök kiszámítása nélkül is: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$.)



I. megoldás



II. megoldás

II. megoldás. Az AB húrral párhuzamos egyeneseket három csoportba oszthatjuk (a parabola szelője, érintője, vagy nincs közös pontjuk). Gondolatban futtassuk végig C-t az AB íven. Akkor kerül az AB húrtól a legmesszebbre, ha éppen az érintővel vett érintési pontban van. Ha ugyanis egy szelővel vett metszéspontban volna, akkor a szelő „túloldalán" (abban a félsíkban, mely nem tartalmazza az AB húrt), találnánk további pontokat, amelyek messzebb volnának AB-től, mint C.

Az AB egyenes meredeksége $m=\frac{9-1}{3-(-1)}=2$. Párhuzamos egyenesek meredeksége egyenlő. Az egyenes egyenletét keressük $y=2x+b$ alakban. Tekintsük az

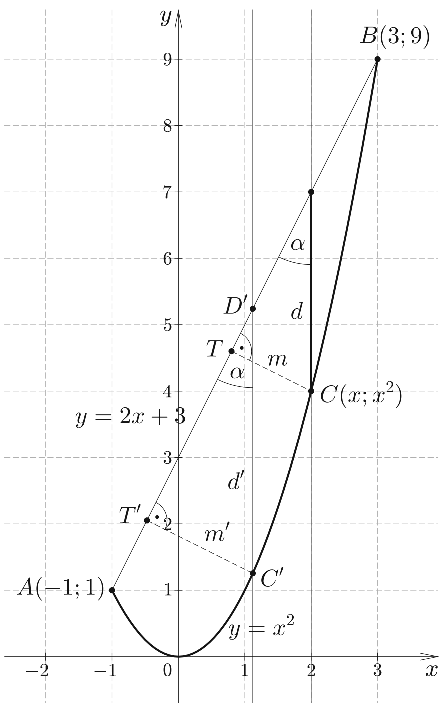
$$y=x^2,$$
$$y=2x+b$$

paraméteres egyenletrendszert. Ennek akkor lesz egy megoldása (akkor érinti egymást a két alakzat), ha az $x^2=2x+b$ paraméteres egyenlet diszkriminánsa 0.

Rendezve: $x^2-2x-b=0 \Rightarrow D=(-2)^2-4(-b)=0$, innen $b=-1$, az egyenlet $x^2-2x+1=0$; $(x-1)^2=0$; gyöke: $x=1$.

(A fenti helyett ismét alkalmazhatjuk a gyökök és együtthatók közötti egyik Viète-formulát: most a két gyök egyenlő, ezért összegük $x_1+x_2=2x=-\frac{-2}{1} \Rightarrow x=1$.)

III. megoldás. Ha C-n át párhuzamost húzunk az y tengellyel, ez az egyenes D-ben metszi AB-t. Az ABC háromszög AB alapjához tartozó magasság talppontja legyen T.



Ha C helyett egy C'-t veszünk, akkor a megfelelő D', T' pontokkal együtt a $C'D'T'$ háromszög hasonló az CDT háromszöghöz, mert szögeik megegyeznek. Tehát az ABC háromszög magassága (így területe is) akkor lesz a legnagyobb, ha a CDT derékszögű háromszög átfogója a lehető legnagyobb.

Az AB egyenes egyenlete: $m==\frac{9-1}{3-(-1)}=2$, $y-9=2(x-3)$, $y=2x++3$, amiből

$$DC=d(x)=2x+3-x^2.$$

A $d(x)$ függvény maximumhelyének meghatározása a korábbi megoldásokban látottak alapján többféleképpen befejezhető.

Legyen pl. ez: $d(x)=2x+3-x^2=4-(x-1)^2\leqslant 4$. $d(x)$ akkor a legnagyobb, ha $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$, $C(1;1)$.

Megjegyzés. További megoldások is léteznek, pl. a szélsőérték problémák általános megoldására szolgáló differenciálszámítás módszere, azonban itt ezt tudatosan mellőztük.

Egy másik megoldás lehet az, ha a függvénytáblázatban található „Pont távolsága egyenestől” képletet alkalmazza a megoldó, majd megkeresi a számlálóban keletkezett függvény szélsőértékét.

II. rész

5. *Egy* 100 *lakásos társasház lakói az éves rendes közgyűlésre készülnek. A Lakóbizottság a közelgő nagy felújítás költségeinek biztosítására a jelenlegi közös költség emelését fogja javasolni. A korábbi tapasztalatok szerint azonban p%-os emelés esetén a lakók $\frac{p}{3}$%-a csak az emelés előtti összeget hajlandó fizetni (velük szemben jogi eljárást indíthat a Lakóbizottság, ami hosszabb távon eredményre vezethet, de a közelgő felújításig nem fog befejeződni), a többiek fizetik az emelt költséget. Most minden lakás tulajdonosa fizeti a havi* 10 000 Ft*-os közös költséget.*

a) Összesen mennyi pénzt fizetnének be a tulajdonosok havonta a társasház számlájára, ha 15%*-kal növekedne a közös költség?*

A Lakóbizottság tagjai tudják, hogy nagymértékű emelést a közgyűlés nem fogadna el, ezért a felújításhoz minimálisan szükséges emelést fogják javasolni. A társasház folyószámláján 3 millió 430 ezer Ft *van, a* 36 hónap *múlva kezdődő felújításig a számlán legalább* 50 millió Ft*-nak kell lennie. A társasháznak a lakók befizetésén kívül más bevétele nincs, a folyószámlát kezelő bank által fizetett kamat elfogy a banki költségekre és egyéb apróbb kiadásokra.*

b) Számítsuk ki, hogy mennyi legyen a lakásonként fizetendő megemelt havi közös költség a megadott feltételekkel. Az eredményt 100 Ft*-ra kerekítve adjuk meg.*

A közös képviselő a korábbi közgyűlési jegyzőkönyveket tanulmányozva érdekes dolgot figyelt meg. Hét olyan közgyűlés volt, amelyen a résztvevők létszáma – megfelelő sorrendbe rakva – egy számtani sorozat szomszédos elemeit képezte. A hét adat mediánja 66*, szórása* 6*.*

c) Mekkora az adatok terjedelme? *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Ha 15%-kal emelkedne a havi közös költség, akkor ez 11 500 Ft lenne. A tulajdonosok 5%-a, azaz 5-en továbbra is 10 000 Ft-ot, a többiek, 95-en pedig 11 500 Ft-ot fizetnének, így a számlára összesen $5\cdot 10\,000+95\cdot 11\,500 = 1\,142\,500$ Ft folyna be minden hónapban.

b) Legyen az emelés p%-os. Ekkor az a lakástulajdonos, aki fizeti ezt az emelt összeget, $10\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$ Ft-ot fog befizetni havonta.

Ilyen tulajdonos $100\cdot\left(1-\frac{p}{300}\right)$ lesz, $\frac{p}{3}$ számú tulajdonos pedig a korábbi 10 000 Ft-ot fogja fizetni, így a havi befizetés összesen:

$$h(p)=10\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(100-\frac{p}{3}\right)+10\,000\cdot\frac{p}{3}=10\,000\left(-\frac{p^2}{300}+p+100\right)\text{Ft}$$

lesz.

A társasház számláján 36 hónap múlva legalább 50 millió Ft-nak kell lennie, felírhatjuk tehát, hogy

$$50\,000\,000 \leqslant 36\left[10\,000\left(-\frac{p^2}{300}+p+100\right)\right]+3\,430\,000,$$

$$46\,570\,000 \leqslant 360\,000\left(-\frac{p^2}{300}+p+100\right); \quad \frac{4657}{36} \leqslant -\frac{p^2}{300}+p+100,$$

$$\frac{465\,700}{12} \leqslant -p^2+300p+30\,000, \quad p^2-300p+\frac{26\,425}{3} \leqslant 0,$$

$$p_{1,2}=\frac{300 \pm \sqrt{300^2-4\cdot\frac{26\,425}{3}}}{2}=\frac{300 \pm 234{,}02}{2},$$

$$p_1=32{,}99; \quad p_2=267{,}01.$$

Így az egyenlőtlenség megoldása: $32{,}99 \leqslant p \leqslant 267{,}01$.

A Lakóbizottság tehát 33%-os emelést fog javasolni a közgyűlésen, az új közös költség 13 300 Ft/hó lesz.

Ellenőrzés: a 13 300 Ft-ot 11 tulajdonos nem fogja fizetni, ők maradnak a havi 10 000 Ft-nál, a többi 89 tulajdonos pedig az emelt díjat fizeti.

A havonta befizetett összeg $89\cdot 13\,300+11\cdot 10\,000=1\,293\,700$ Ft lesz, ez 36 hónap alatt összesen 46 573 200 Ft-ot eredményez, a meglévő 3 430 000 Ft-tal együtt 50 003 200 Ft, ami a felújításhoz éppen elegendő.

c) Ha egy számtani sorozat első hét tagját nemcsökkenő sorrendben felsoroljuk, akkor a 4. helyen éppen a medián lesz, ami esetünkben 66. Legyen a sorozat különbsége d, ekkor az elemek rendre: $66-3d$, $66-2d$, $66-d$, 66, $66+d$, $66+2d$, $66+3d$, ezek átlaga 66, tehát a szórás:

$$\sqrt{\frac{(3d)^2+(2d)^2+d^2+0^2+(-d)^2+(-2d)^2+(-3d)^2}{7}}=6,$$

$$\sqrt{\frac{28d^2}{7}}=6, \quad 2d=6 \;\Rightarrow\; d=3(d\geqslant 0).$$

A hét szám: 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, a terjedelem 18.

6. *Értelmezzük a valós számok halmazán az „újösszeg” (jele: $\oplus$) műveletet a következőképpen:*

$$a\oplus b=a+b+ab \quad (a,b\in\mathbb{R}),$$

valamint az „újszorzat” (jele: $\odot$) műveletet az alábbiak szerint:

$$a\odot b=\frac{ab}{a+b} \quad (a,b\in\mathbb{R},\ a+b\neq 0).$$

a) *Melyek azok a valós számok, amelyeknek „újösszege” 90, „újszorzata” 4?*

b) Igazoljuk, hogy az „újösszeg” műveletre teljesül a csoportosíthatósági tulajdonság (asszociativitás), azaz

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

vagyis elhagyhatók a zárójelek $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

c) Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x \oplus y \oplus z = 2021$ *egyenletet.*
(*16 pont*)

Megoldás. *a*) A keresett valós számok legyenek a, b. Az

$$a + b + ab = 90,$$

$$\frac{ab}{a+b} = 4$$

egyenletrendszert kell megoldani.

A második egyenletből $ab = 4(a+b)$, az elsőbe írva: $a+b+4(a+b) = 90$, innen $a+b = 18$, azaz $b = 18-a$. Ezt felhasználva az $a(18-a) = 4 \cdot 18$, $0 = a^2 - 18a + 72$ egyenletet kaptuk, amelynek megoldása:

$$a_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 72}}{2} = \frac{18 \pm 6}{2}.$$

Ha $a_1 = 12$, akkor $b_1 = 6$, ha $a_2 = 6$, akkor $b_2 = 12$. A két szám a 6 és 12.

Ellenőrzés: $6 + 12 + 6 \cdot 12 = 90$, $\frac{6 \cdot 12}{6+12} = \frac{72}{18} = 4$.

b)
$$\begin{aligned}
a \oplus (b \oplus c) &= a + (b \oplus c) + a(b \oplus c) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = \\
&= a + b + c + bc + ab + ac + abc, \\
(a \oplus b) \oplus c &= (a \oplus b) + c + (a \oplus b)c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = \\
&= a + b + ab + c + ac + bc + abc.
\end{aligned}$$

A tagok sorrendjétől eltekintve ugyanazt kaptuk, tehát az „újösszeg” művelet asszociatív.

c) Legyen $x \leqslant y \leqslant z$ úgynevezett alapmegoldás, az összes megoldás ezek permutációja lesz.

$$x \oplus y \oplus z = xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2021.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet mindkét oldalához 1-et hozzáadva a bal oldalon az $(x+1)(y+1)(z+1)$ felbontott alakját kapjuk, tehát az $(x+1)(y+1)(z+1) = 2022$ egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán.

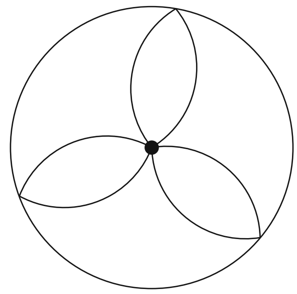
A 2022 prímtényezős felbontása: $2 \cdot 3 \cdot 337$. Ahhoz, hogy az ismeretlenek pozitív egész számok legyenek, és egymáshoz viszonyított nagyságuk is az előírt legyen, csak egyféleképpen adódhat megoldás: $x+1 = 2$, $y+1 = 3$, $z+1 = 337$. Így az egyenlet alapmegoldása: $x = 1$, $y = 2$, $z = 336$.

Ellenőrzés: $1 \cdot 2 \cdot 336 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 336 + 2 \cdot 336 + 1 + 2 + 336 = 2021$.

Az összes megoldás tehát:

x	1	1	2	2	336	336
y	2	336	1	336	1	2
z	336	2	336	1	2	1

7. *Az* ábra *egy játékokat készítő cég tervezett emblémáját mutatja, melyet a termékekre a kör középpontja körül elforgatható módon rögzítenek. A forgásszimmetrikus alakzat egyes tartományait úgy festik be, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok színe különbözik egymástól. Piros, sárga, kék és zöld szín közül lehet választani, és egy emblémán mind a négy színnek szerepelnie kell. Nevezzük a kör belsejében levő körívek határolta konvex tartományokat „szirom”-nak, a konkáv részeket pedig „háttér”-nek.*



a) Hányféleképpen színezhető ki az embléma, ha a „szirmok” színének különbözniük kell egymástól, továbbá azonos színezésűnek tekintjük azokat az emblémákat, amelyek a kör középpontja körüli elforgatással alak és szín szerint egymásba vihetők?

Az emblémák gyártásához használt berendezés üzembe helyezésekor 1000 *darabos nullszériát készítettek, amelynek minden példányát megvizsgálták. Dobozba gyűjtötték a hibás darabokat, ezekből összesen* 100 db *lett, majd feljegyezték, hogy* 57*-nek szín hibája,* 53*-nak pedig méret hibája van.*

Véletlenszerűen kivettünk ebből a dobozból egy emblémát, megállapítottuk hibájának típusát, ezután visszatettük a többi közé. Később megismételtük az előbbi eljárást még egyszer.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak méret hibás, vagy csak szín hibás emblémákat vettünk ki a dobozból? (*16 pont*)

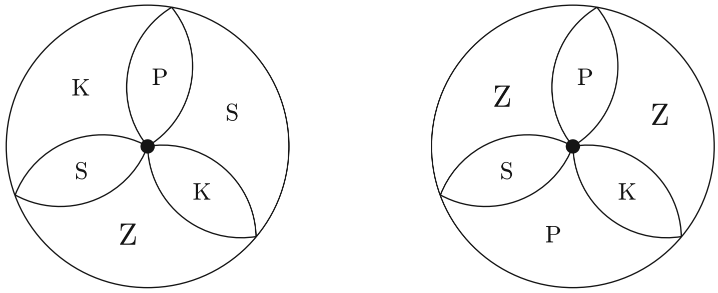
Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a piros (P), sárga (S), kék (K) és zöld (Z) jelöléseket a színek jelölésére.

A „szirmok” színét négyféleképpen választhatjuk meg (PSK, PSZ, PKZ, SZK).

A továbbiakban a PSK színekkel foglalkozunk részletesen. A „háttér” színei között szerepelnie kell a zöldnek legalább egyszer, hogy mindegyik szín megjelenjen az emblémán.

Tegyük fel, hogy 1 zöld tartomány van a „háttéren”, és ez mondjuk a pirossal van szemben. Ekkor a „háttér” másik két tartománya már csak egyféleképpen színezhető ki, sárgával szemben S, kékkel szemben K, különben közös határvonallal rendelkező tartományok között lenne azonos színű. Tehát ha egy Z van a „háttér” színei között, akkor ez 3 esetet eredményez.

Legyen most két Z a „háttéren”, pl. a P két oldalán, ebben az esetben is 3-féle színezést kapunk, mert P-vel szemben csak P lehet.



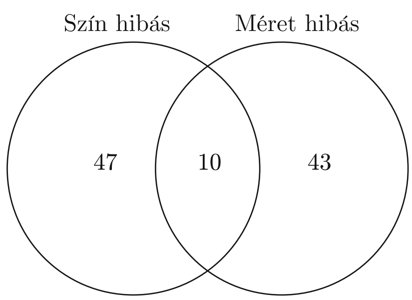
Ha 3 Z van a „háttérben”, akkor az csak egyféleképpen lehetséges. Így a „szirmok” egy adott színösszeállítása esetén összesen 7 „háttér” színezés alakítható ki a feltételeknek megfelelően.

Azonban a PSK „szirom” színezés az ellenkező körüljárás miatt kétféle lehet, ezeket a kör középpontja körüli elforgatással nem lehet fedésbe hozni, ezért kétszerezni kell az esetszámot, valamint ennek venni a négyszeresét, mert eddig csak a PSK-val foglalkoztunk.

A megoldás tehát: $7 \cdot 2 \cdot 4 = 56$.

Az embléma 56-féleképpen színezhető ki az összes feltételnek megfelelően.

b) A számokból látható, hogy 10 olyan embléma található a hibás példányok között, amelyeknek két hibája is van. A metszetből nem választhatunk egyet sem, és nem választhatunk úgy sem, hogy az egyiknek a másikétól eltérő hibája legyen. Tehát vagy mindkettőt a 43 elemet tartalmazó csak méret hibás halmazból, vagy pedig mindkettőt a 47 elemet tartalmazó csak szín hibás halmazból választhatjuk.



Az első esetben $\frac{43}{100} \cdot \frac{43}{100}$ valószínűséggel számolhatunk, mert az első választás valószínűsége $\frac{43}{100}$, továbbá a második választásnál is ugyanennyi a valószínűség (mert visszatettük az előzőleg kivett emblémát), és a két esemény független egymástól. Hasonlóképpen kapjuk a csak két szín hibás választás valószínűségét, ezért a megoldás:

$$P(A) = \left(\frac{43}{100}\right)^2 + \left(\frac{47}{100}\right)^2 = 0{,}4058.$$

Megjegyzés. A binomiális eloszlás helyes alkalmazásával is a fenti eredményt kapjuk.

8. *Egy osztály, ahol kétszer annyi a lány, mint a fiú, többnapos kirándulásra készül, amelynek programjában három fakultatív foglalkozás is szerepel, melyekre előzetesen lehetett jelentkezni. Mindenkinek legalább egy programon részt kellett vennie, de akár mindháromra is feliratkozhatott bárki.*

Az összesítés után megállapították, hogy a tanulók $\frac{4}{5}$*-e hajókirándulásra,* $\frac{7}{10}$*-e falumúzeumi látogatásra,* $\frac{3}{5}$*-e pedig kalandparki programra jelentkezett. Hárman jelölték meg mindegyik foglalkozást.*

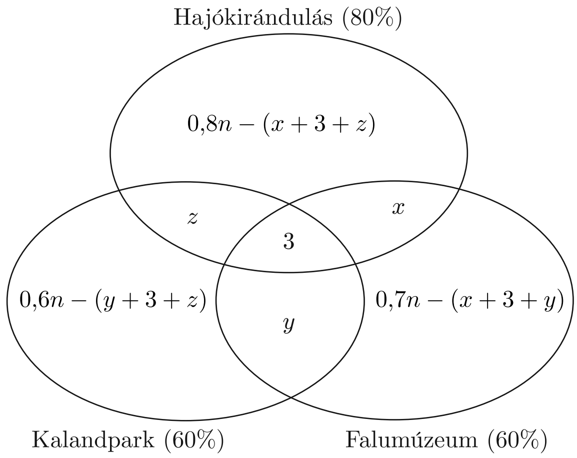
a) Ha az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mennyi a valószínűsége, hogy ő a hajókirándulásra is és a kalandparki programra is jelentkezett, a falumúzeumi látogatásra azonban nem?

Ebben az osztályban egyik alkalommal háromfős bizottságot választottak sorsolással úgy, hogy cetlikre írták az osztályba járó tanulók nevét, mindegyikre egyet-egyet, majd urnába helyezték a cédulákat. Ezután az urnából véletlenszerűen kivettek egy cédulát, a rajta levő nevet felírták a táblára, félretették a papírlapot, majd ezt a sorsolást megismételték még kétszer.

Jelölje $P(A)$ *annak valószínűségét, hogy a táblán legalább két lány,* $P(B)$ *pedig annak valószínűségét, hogy legalább egy fiú neve szerepel.*

b) Számítsuk ki $P(A)$ *és* $P(B)$ *értékét.* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Ábrázoljuk Venn-diagramon a tanulók programválasztását, jelöljük n-nel az osztály létszámát (az arányokat az ábrán %-kal jelöltük). ($n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geqslant 3$ és $3 \mid n$, mert kétszer annyi a lány, mint a fiú.)



Mivel $\frac{7n}{10}$ pozitív egész szám, ezért n osztható 10-zel is a 3 mellett, így n egy 30-cal osztható pozitív egész szám. (Ismerve a szokásos létszámokat, n valószínűleg 30, de ez még nem biztos.)

Adjuk össze az egyes részhalmazokban levő elemek számát:

$$0{,}8n + \big[0{,}7n - (x + 3 + y)\big] + y + \big[0{,}6n - (y + 3 + z)\big] = n,$$

$$2{,}1n - x - y - z - 6 = n \ \Rightarrow\ 1{,}1n = x + y + z + 6.$$

Azok létszáma, akik csak a kalandparkot választották:

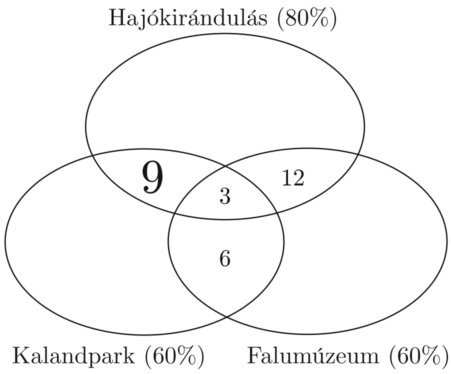
$$0{,}6n - (y + 3 + z) \geqslant 0 \ \Rightarrow\ 0{,}6n - 3 \geqslant y + z,$$

továbbá $y+z=1{,}1n-x-6$, ezért $0{,}6n-3\geqslant 1{,}1n-x-6$, innen $x\geqslant 0{,}5n-3$. Ugyanakkor $x\leqslant 0{,}4n$, mert x a kalandparkot nem választók (a tanulók 40%-a) egyik részhalmazának létszáma.

Ebből a két egyenlőtlenségből:

$$0{,}4n\geqslant x\geqslant 0{,}5n-3 \;\Rightarrow\; 0{,}4n\geqslant 0{,}5n-3 \;\Rightarrow\; 3\geqslant 0{,}1n \;\Rightarrow\; n\leqslant 30.$$

Ezzel megkaptuk az osztály létszámát: $n=30$.



Ezt felhasználva: $1{,}1\cdot 30=x+y+{}$ $+z+6$, $x+y+z=27$. Ebből az következik, hogy nem volt olyan személy, aki csak egy programot választott.

A falumúzeumba a tanulók 70%-a, azaz 21 fő jelentkezett, ezért $30-21=$ $=9$ fő volt az, aki a hajókiránduláson és a kalandparki programon részt vett, a falumúzeumi látogatáson azonban nem.

Az egyes részhalmazok elemszámai: $x=12$, $y=6$, $z=9$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{9}{30}=\frac{3}{10}=0{,}3$.

b) A 30 fős osztályban 20 lány és 10 fiú van.

$$P(A)=\frac{\binom{20}{2}\binom{10}{1}+\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{190\cdot 10+1140}{4060}=\frac{3040}{4060}=\frac{152}{203}\approx 0{,}7488,$$

$$P(B)=\frac{\binom{10}{1}\binom{20}{2}+\binom{10}{2}\binom{20}{1}+\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{10\cdot 190+45\cdot 20+120}{4060}=$$

$$=\frac{2920}{4060}=\frac{146}{203}\approx 0{,}7192.$$

Megjegyzés. $P(B)$-t könnyebben kiszámíthatjuk, ha a komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg először:

$$P(\overline{B})=\frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{1140}{4060}\;\Rightarrow\; P(B)=1-\frac{1140}{4060}=\frac{2920}{4060}=\frac{146}{203}.$$

9. *A* képen *látható, a hagyományos futball labdához hasonlító testet* 12 *fekete szabályos ötszög, és alkalmas számú fehér szabályos hatszög határolja.*

Az ötszög oldalának hossza megegyezik a hatszög oldalának hosszával.

a) *Hány csúcsa, lapja és éle van a testnek?*

b) *Egy fehér hatszög területe hány %-kal nagyobb egy fekete ötszög területénél?*

c) Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a körülírt és beírt körök sugarának összege egyenlő a befogók számtani közepével. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A test összes csúcsa valamelyik ötszög csúcsa is egyben, illetve nincs olyan csúcsa a testnek, amelyik több ötszögnek is csúcsa lenne, ezért a testnek $12 \cdot 5 = 60$ csúcsa van. Mivel a test csúcsai egyúttal a hatszögeknek is csúcsai, mindegyik csúcs pontosan két hatszögnek csúcsa, így felírhatjuk a $\frac{6h}{2} = 60$ egyenletet, ahol h a hatszögek számát jelenti. Ebből $h = 20$, így a testnek $12 + 20 = 32$ lapja van.

Az élek számát az ötszögek és a hatszögek összes oldalai számának kettővel való osztásával kapjuk, mivel minden él két lapon mint oldal szerepel. Tehát az élek száma: $\frac{5\cdot 12+6\cdot 20}{2} = 90$. A testnek 90 éle van.

Az élek számát megkaphatjuk úgy is, hogy minden csúcsból 3 él indul, minden él két csúcsot köt össze, ezért az élek száma: $\frac{60\cdot 3}{2} = 90$. A testnek 60 csúcsa, 32 lapja és 90 éle van.

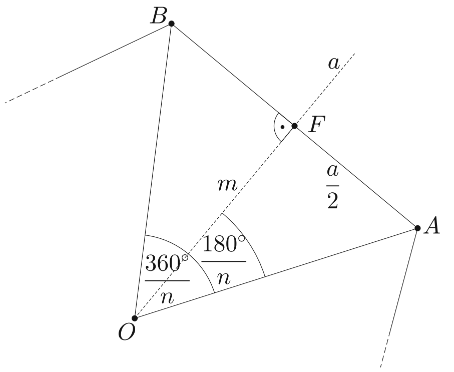
Megjegyzés. A kapott eredményekre teljesül az Euler-féle egyszerű poliéder tétel állítása: $e + 2 = l + c$.

b) Az a oldalú szabályos n-szög területe: $T(n) = n \cdot \frac{am}{2}$. Az OAF derékszögű háromszögben

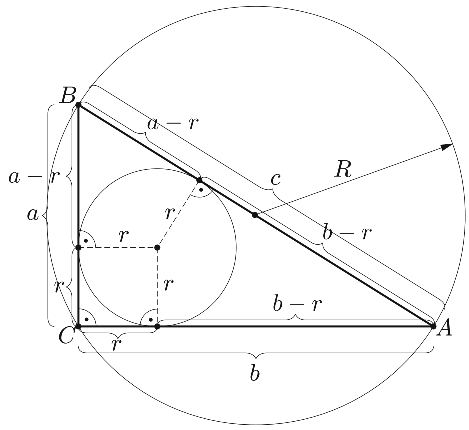
$$\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{m}, \quad \text{ahonnan} \quad m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)},$$

így

$$T(n) = n \cdot \frac{a \cdot \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}}{2} = \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$



b)



c)

Legyen a hatszög területe T, az ötszögé t, ekkor

$$T=\frac{6a^2}{4\operatorname{tg}30^\circ}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2},\quad t=\frac{5a^2}{4\operatorname{tg}36^\circ},$$

$$\frac{T}{t}=\frac{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}}{\frac{5a^2}{4\operatorname{tg}36^\circ}}=\frac{12\sqrt{3}\operatorname{tg}36^\circ}{10}=\frac{6\sqrt{3}\operatorname{tg}36^\circ}{5}=1{,}51.$$

A fehér hatszög területe 51%-kal nagyobb az ötszög területénél.

c) I. megoldás. A beírt kör középpontja, a beírt körnek a befogókkal való érintési pontjai, valamint a háromszög derékszögénél levő csúcsa egy négyzetet alkotnak. A beírt körhöz az átmérő végpontjaiból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt felírhatjuk, hogy $a-r+b-r=c$, amiből a beírt kör sugara: $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Ismert, hogy a derékszögű háromszög köré írt körének átmérője $c=2R$ (Thalesz-tétel), azaz: $R=\frac{c}{2}$.

$$R+r=\frac{c}{2}+\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b}{2},$$

ezzel az állítást igazoltuk.

II. megoldás. Tudjuk, hogy $r=\frac{T}{s}$, ahol r a beírt kör sugara, T a háromszög területe, s a háromszög félkerülete.

A derékszögű háromszög területe: $T=\frac{ab}{2}$, ahol a, b a két befogó, így a beírt kör sugara:

$$r=\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c}.$$

Bizonyítandó:

$$R+r=\frac{a+b}{2}.$$

$$\frac{c}{2}+\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b}{2}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $2(a+b+c)$-vel, ekkor

$$c(a+b+c)+2ab=(a+b)(a+b+c)$$

adódik. Zárójel bontás után:

$$ac+bc+c^2+2ab=a^2+ab+ab+b^2+ac+bc\iff c^2=a^2+b^2.$$

Ekvivalens lépéseken keresztül eljutottunk a Pitagorasz-tételhez, ezért a kiinduló állítás is igaz.

Németh László
Fonyód