A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Legyen $n \geqslant 100$ egész. Iván felírja az $n, n+1, \ldots, 2n$ számokat egy-egy különböző kártyára. Ezután összekeveri ezt az $n+1$ kártyát, és két pakliba osztja őket. Bizonyítandó, hogy legalább az egyik pakli tartalmaz két olyan kártyát, amelyekre írt számok összege négyzetszám.*

Kovács Tamás megoldása. Először megmutatjuk, hogy $\frac{n}{2}+1$ és $n+1$ között mindig van legalább három négyzetszám, ha $n \geqslant 100$. Ha $100 \leqslant n \leqslant 126$, akkor a $64, 81, 100$ négyzetszámok mind az intervallumon belül lesznek. Ha $n=127$, akkor a három négyzetszám a $81, 100, 121$. És innentől akkor mindig igaz lesz, hiszen ha

$$\frac{n}{2}+1=k^2+\frac{1}{2}$$

esetén benne van az intervallumban $(k+1)^2$, $(k+2)^2$ és $(k+3)^2$ (kezdetben $n=127$ és $k=8$), akkor legkorábban $n+4k+2$ esetén merülhet fel gond, mert ekkor lesz $(k+1)^2$ már az intervallumon kívül, hiszen

$$\frac{n'}{2}+1=\frac{n+4k+2}{2}+1=k^2+\frac{1}{2}+2k+1=(k+1)^2+\frac{1}{2}>(k+1)^2.$$

Azonban ha $n \geqslant (k+3)^2$, akkor $n+4k+2 \geqslant (k+4)^2$, mert $(k+4)^2-(k+3)^2= =2k+7<4k+2$, ami teljesül, ha $k \geqslant 3$, ez pedig már a kiinduló lépésben is igaz volt. A következő lépésben n helyét $n+4k+2$, k helyét $k+1$ veszi át, hiszen az

$$\frac{n+4k+2}{2}+1=(k+1)^2+\frac{1}{2}$$

egyenlet igaz lesz. És így tovább, ezzel ezt az állítást beláttuk.

Ha az előző állítást felszorozzuk 4-gyel, akkor azt kapjuk, hogy $2n+4$ és $4n+4$ között van legalább három páros négyzetszám; legyen közülük a középső x^2. Ekkor

$$2n+4 \leqslant x^2-4x+4<x^2<x^2+4x+4 \leqslant 4n+4.$$

*A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Levonva 4-et azt kapjuk, hogy $2n \leqslant x^2-4x$, és $4n \geqslant x^2+4x$, azaz $2n+4x \leqslant x^2 \leqslant 4n-4x$. Ha az $\{n, n+1, \ldots, 2n\}$ halmazból kiválasztunk két olyan elemet, melyek különbsége $4x$, akkor az így kapható minimális összeg $2n+4x$, a maximális pedig $4n-4x$, és ezek között minden páros szám megkapható ilyen módon, tehát az x^2 is.

Tehát $a=\frac{x^2}{2}-2x$ és $c=\frac{x^2}{2}+2x$ elemei az $\{n, n+1, \ldots, 2n\}$ halmaznak. Ekkor nyilván minden köztük lévő szám is, így a $b=\frac{x^2}{2}+1$ is eleme ennek a halmaznak.

Végül vegyük észre, hogy $a+b=(x-1)^2$, $a+c=x^2$, $b+c=(x+1)^2$, azaz ha csak az a, b, c kártyákat nézzük, akkor is lesz köztük kettő, ami egy pakliba kerül, így abban a pakliban lesz két olyan szám, amelyek összege négyzetszám.

2. *Mutassuk meg, hogy az*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}$$

egyenlőtlenség fennáll tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ valós számokra.

Várkonyi Zsombor megoldása. 1. Ha minden x_i előjele megegyezik, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hiszen ha x_i és x_j azonos előjelűek, akkor $|x_i-x_j| \leqslant |x_i|+|x_j|=|x_i+x_j|$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

2. Ha a számok között szerepel a 0, akkor annak elhagyása nem módosítja az egyenlőtlenség igazságértékét, mivel $\sqrt{|x_i+0|}=\sqrt{|x_i-0|}$, tehát a két oldalon a 0-t tartalmazó tagok értéke páronként megegyezik.

3. Ha a számok közül kettő egymásnak ellentettje, akkor a két szám elhagyása nem befolyásolja az egyenlőtlenség igazságértékét. Legyen a két szám $x_i=-x_j$. Állítsuk párba a bal oldalon szereplő, $\{x_i, x_k\}$ $(k \neq i, j)$ párokhoz tartozó tagokat a jobb oldalon szereplő, $\{x_j, x_k\}$ $(k \neq i, j)$ párokhoz tartozó tagokkal és fordítva. Világos, hogy e tagok páronként megegyeznek. Hasonlóan látható, hogy az $\{x_i, x_i\}$, $\{x_j, x_j\}$, $\{x_i, x_j\}$ párokhoz tartozó tagok összege is megegyezik a két oldalon. Tehát x_i és x_j elhagyása az egyenlőtlenség két oldalának különbségét nem változtatja meg.

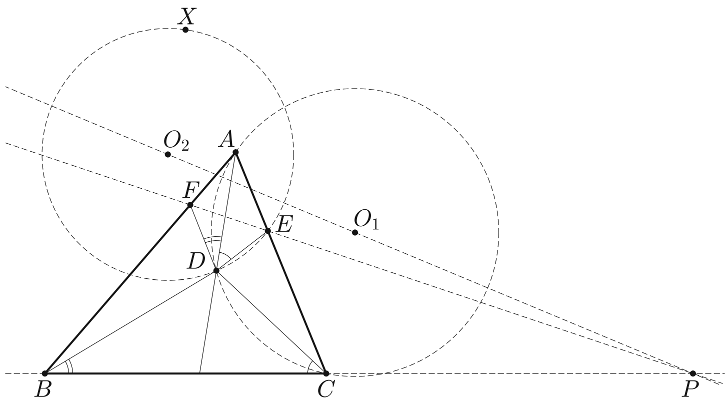
4. Az $x_1, \ldots x_n$ szám-n-esből $M(d)$ képezze az $x_1+d, \ldots, x_n+d$ szám-n-est. Ahogyan d-t változtatjuk, az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezések értéke nem változik, hiszen az összes szám együttes mozgatása nem módosítja a számok közötti különbségeket. Legyen $f(d)$ az egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés értéke az $M(d)$ eltolás után. Például $f(0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}$, általánosan

$$f(d)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j+2d|}.$$

Tekintsük az összes x_i számot és az összes x_i+x_j alakú páros összeget. Ha ezek között szerepel a 0, akkor a 2. vagy 3. állítás értelmében elhagyhatunk egy vagy két számot. Ezt addig ismételjük, amíg a számok és a páros összegek között nem szerepel több 0. Most vizsgáljuk az összes x_i számot és az összes $\frac{x_i+x_j}{2}$ alakú páros átlagot. Ezek közül a legkisebb pozitív legyen P és a legkisebb abszolútértékű (tehát legnagyobb) negatív legyen N. Ha esetleg a számok és a páros átlagok között nem szerepelne pozitív vagy negatív, az azt jelentené, hogy minden szám előjele megegyezik, tehát az 1. állítás értelmében készen vagyunk. A 0-k elhagyása miatt tudjuk, hogy $N<0<P$. A definíciójukból adódóan $M(P)$, illetve $M(N)$ a legkisebb abszolútértékű pozitív, ill. negatív eltolások, amelyek valamelyik számot vagy páros összeget a 0-ba viszik. Ha a d változó N és P között mozog, akkor az $f(d)$ függvény folytonos és differenciálható, hiszen egyik tag sem vált előjelet. Ha $f'(0)\geqslant 0$, akkor d-t 0-tól csökkentve $f(d)$ értéke csökken. Emellett minden $N\leqslant d<0$-ra $f'(d)\geqslant f'(0)$ is teljesülni fog, tehát $f(N)\leqslant f(0)$. Tehát az $M(N)$ eltolást elvégezve az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés értéke nem változik, a jobb oldalon állóé pedig nem nő. Hasonlóan, ha $f'(0)\leqslant 0$, akkor „jobbra tolunk”, azaz pozitív d-ket választunk, és ezekre fog teljesülni, hogy a függvény értéke kisebb a kiindulásinál vagy egyenlő azzal. Végül $f(0)\geqslant f(P)$-hez jutunk, ami után pedig az $M(P)$ eltolás alkalmazható. Mindkét esetben oda jutottunk, hogy a számokat valamilyen irányba eltolhatjuk úgy, hogy a jobb oldali kifejezés értéke ne nőjön és valamelyik szám vagy páros összeg a 0-val „ütközzön”. Ekkor pedig a számok közül legalább egy elhagyható és a folyamat ismételhető. Ilyen mozgatásokat és elhagyásokat végzünk egészen addig, amíg csupa azonos előjelű szám marad, ekkor pedig az egyenlőtlenség az 1. állítás miatt teljesül. Ebből kifolyólag teljesült a kiindulási helyzetben is, ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

3. *Legyen D olyan belső pontja az $AB>AC$ tulajdonságú, hegyesszögű ABC háromszögnek, hogy $DAB\sphericalangle=CAD\sphericalangle$. Az AC szakasz E pontjára $ADE\sphericalangle=BCD\sphericalangle$ teljesül, az AB szakasz F pontjára $FDA\sphericalangle=DBC\sphericalangle$ teljesül, és az AC egyenes X pontjára $CX=BX$ teljesül. Jelölje O_1 és O_2 az ADC, illetve EXD háromszög köré írt kör középpontját. Bizonyítandó, hogy a BC, EF és O_1O_2 egyenesek egy ponton mennek át.*

Szabó Kornél megoldása. A bizonyítandó állítás az *1. ábrán* látható: P a három egyenes közös pontja.

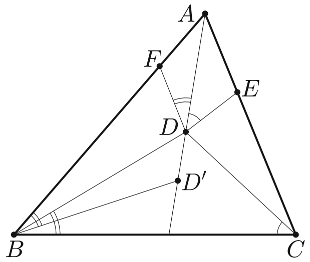


1. ábra

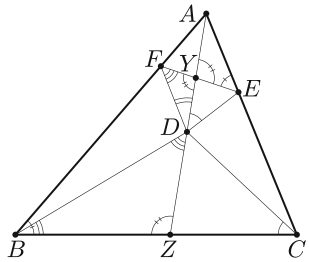
Először belátjuk, hogy a B, C, E, F pontok egy körön vannak.

Legyen D' a D pont izogonális konjugáltja* az ABC háromszögben (*2. ábra*). A feladat feltételei miatt D és D' is rajta van az A-ból induló szögfelezőn.

Ekkor az izogonális konjugálás miatt $FBD'\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, a feladat feltétele miatt pedig ebből $FBD'\sphericalangle = FDA\sphericalangle$, ami éppen a $D'DF\sphericalangle$ kiegészítőszöge. Tehát F, D, D', B konciklikus (egy körön van). Hasonlóan E, D, D', C is konciklikus. A pont körre vonatkozó hatványa miatt ekkor $AF \cdot AB = AD \cdot AD' = AE \cdot AC$. Tehát $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, ami éppen azt jelenti, hogy B, C, E, F konciklikus.



2. ábra



3. ábra

A *3. ábrán* azonosan jelölt szögek egyenlőek. Az „egy vonallal megjelölt szögek” egyenlőek, mert $FEC\sphericalangle = 180\sphericalangle - FBC\sphericalangle$ a $BCEF$ kör miatt, és így

$$FEA\sphericalangle = 180^\circ - FEC\sphericalangle = FBC\sphericalangle.$$

A „két vonallal megjelölt szögek”': $FYD\sphericalangle = AYE\sphericalangle$, mert csúcsszögek; és

$$BZA\sphericalangle = AYE\sphericalangle = 180\sphericalangle - \frac{\alpha}{2} - \text{„egy vonallal megjelölt szög”},$$

az AZB, illetve az AYE háromszögekben.

Mivel $DZC\sphericalangle$ külső szög az ABZ háromszögben, $BDZ\sphericalangle$ pedig az ABD háromszögben, így

$$DZC\sphericalangle = ZBA\sphericalangle + ZAB\sphericalangle = (ZBD\sphericalangle + DBA\sphericalangle) + DAB\sphericalangle =$$
$$= ZBD\sphericalangle + (DBA\sphericalangle + DAB\sphericalangle) = DBZ\sphericalangle + BDZ\sphericalangle.$$

Mivel $DBZ \sim FDY$, mert két szögük, és így a harmadik is egyenlő, így ebből $DBZ\sphericalangle + BDZ\sphericalangle = DBZ\sphericalangle + DFY\sphericalangle$.

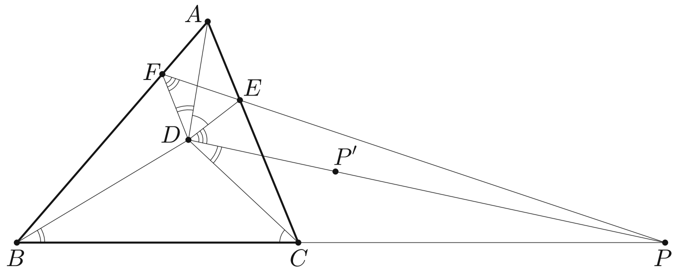
Mivel

$$EDC\sphericalangle = 180\sphericalangle - ZDC\sphericalangle - ADE\sphericalangle = 180\sphericalangle - ZDC\sphericalangle - DCB\sphericalangle = DZC\sphericalangle,$$

ezért ebből következik, hogy az $EDC\sphericalangle$-et mindig fel tudjuk vágni egy kétíves és egy háromíves méretű szögre.

Legyen tehát $EDP'\sphericalangle$ háromíves szög, $P'DC\sphericalangle$ pedig kétíves (*4. ábra*).

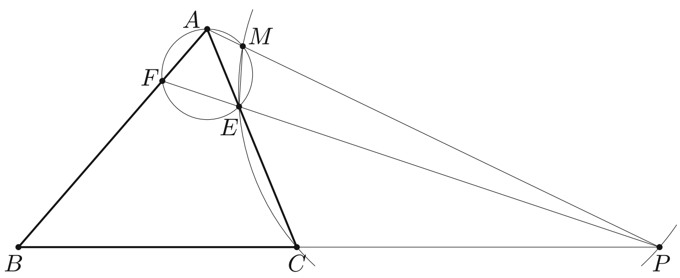
*Adott a P pont az ABC háromszög belsejében. Tükrözzük az A-ból induló belső (vagy külső) szögfelezőre az AP egyenest, a B-ből induló belső szögfelezőre a BP egyenest, végül a C-ből induló belső szögfelezőre a CP egyenest. Az így kapott három egyenes is egy ponton meg keresztül, ezt a pontot nevezzük a P pont izogonális konjugáltjának. Lásd `https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_ii.pdf`.



4. ábra

Az érintőszárú kerületi szögek tétele miatt a DP' egyenes érinti a DEF és BDC köröket, azaz a hatványvonaluk. Az FE egyenes a DEF és $BEFC$ körök hatványvonala, BC pedig a BDC és $BEFC$ köröké. Jelölje az FE, BC és DP' egyenesek metszeteként kapott hatványpontot P (*4. ábra*). Mivel DP érinti a DEF és BDC köröket, azért $PD^2 = PE \cdot PF = PC \cdot PB$.

Jelölje M az AEF és PCE körök E-től különböző metszéspontját (*5. ábra*).



5. ábra

Szögszámolással kijön, hogy

$$AME\sphericalangle = 180^\circ - AFE\sphericalangle = BFE\sphericalangle = 180^\circ - BCE\sphericalangle = ECP\sphericalangle = 180\sphericalangle - EMP\sphericalangle$$

(rendre az $AMEF$, $BCEF$, $PCEM$ köröket használva). Emiatt A, M, P egy egyenesen vannak, ahonnan $PM \cdot PA = PE \cdot PF$ következik, s mivel

$$PD^2 = PE \cdot PF = PC \cdot PB,$$

ezért $PM \cdot PA = PC \cdot PB$, vagyis $MABC$ is konciklikus. Ekkor

$$AMB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = 180^\circ - EFB\sphericalangle = EFA\sphericalangle.$$

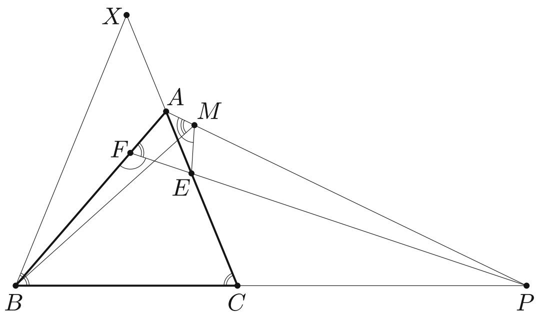
Most belátjuk, hogy B, E, M, X egy körön vannak (*6. ábra*).

Még egy is szögszámolással:

$$BME\sphericalangle = \text{egyíves szög} - \text{kétíves szög},$$

$$\text{kétíves szög} = 180^\circ - \text{egyíves szög, és így}$$

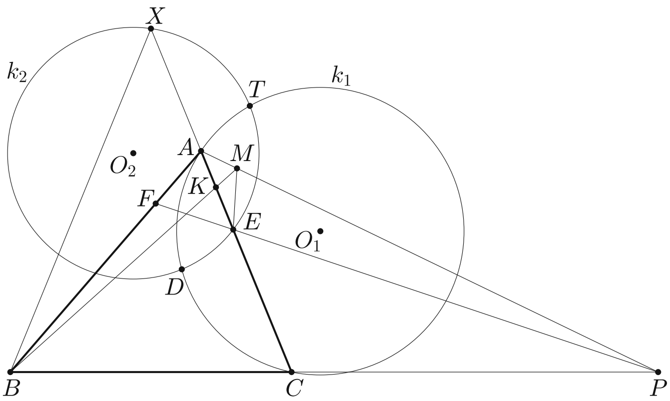
$$BME\sphericalangle = 180^\circ - 2 \cdot \text{kétíves szög} = BXC\sphericalangle = BXE\sphericalangle.$$



6. ábra

Tehát B, X, M, E valóban egy körön vannak.

Legyen K az AC és BM metszéspontja, T pedig a $k_1 : CDA$ és $k_2 : XED$ körök D-től különböző metszéspontja (*7. ábra*).



7. ábra

Az M, A, B, C pontok egy körön vannak, ezért $BK \cdot KM = CK \cdot KA$. A $BXME$ körből pedig $BK \cdot KM = XK \cdot KE$ következik.

Tehát $CK \cdot KA = XK \cdot KE$, azaz K a k_1 és k_2 kör hatványvonalán helyezkedik el, ami DT. Emiatt $CK \cdot KA = XK \cdot KE = DK \cdot KT = BK \cdot KM$. Így B, D, M, T egy körön vannak.

Most invertáljunk P-re PD sugárral. Ekkor a BDM és ADC körök helyet cserélnek, mert $PD^2 = PE \cdot PF = PM \cdot PA = PC \cdot PB$. Mivel T a két kör közös pontja, fix marad az inverzió során, tehát $PD = PT$, azaz P a DT felezőmerőlegesén van, ami az O_1O_2 egyenes.

Tehát a P pont BC, EF és O_1O_2 közös pontja.