KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 7. szám Budapest, 2021. október

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Első nap*

1. *Legyen $n \geqslant 100$ egész. Iván felírja az $n, n+1, \ldots, 2n$ számokat egy-egy különböző kártyára. Ezután összekeveri ezt az $n+1$ kártyát, és két pakliba osztja őket. Bizonyítandó, hogy legalább az egyik pakli tartalmaz két olyan kártyát, amelyekre írt számok összege négyzetszám.*

Kovács Tamás megoldása. Először megmutatjuk, hogy $\frac{n}{2}+1$ és $n+1$ között mindig van legalább három négyzetszám, ha $n \geqslant 100$. Ha $100 \leqslant n \leqslant 126$, akkor a $64, 81, 100$ négyzetszámok mind az intervallumon belül lesznek. Ha $n=127$, akkor a három négyzetszám a $81, 100, 121$. És innentől akkor mindig igaz lesz, hiszen ha

$$\frac{n}{2}+1=k^2+\frac{1}{2}$$

esetén benne van az intervallumban $(k+1)^2$, $(k+2)^2$ és $(k+3)^2$ (kezdetben $n=127$ és $k=8$), akkor legkorábban $n+4k+2$ esetén merülhet fel gond, mert ekkor lesz $(k+1)^2$ már az intervallumon kívül, hiszen

$$\frac{n'}{2}+1=\frac{n+4k+2}{2}+1=k^2+\frac{1}{2}+2k+1=(k+1)^2+\frac{1}{2}>(k+1)^2.$$

Azonban ha $n \geqslant (k+3)^2$, akkor $n+4k+2 \geqslant (k+4)^2$, mert $(k+4)^2-(k+3)^2= =2k+7<4k+2$, ami teljesül, ha $k \geqslant 3$, ez pedig már a kiinduló lépésben is igaz volt. A következő lépésben n helyét $n+4k+2$, k helyét $k+1$ veszi át, hiszen az

$$\frac{n+4k+2}{2}+1=(k+1)^2+\frac{1}{2}$$

egyenlet igaz lesz. És így tovább, ezzel ezt az állítást beláttuk.

Ha az előző állítást felszorozzuk 4-gyel, akkor azt kapjuk, hogy $2n+4$ és $4n+4$ között van legalább három páros négyzetszám; legyen közülük a középső x^2. Ekkor

$$2n+4 \leqslant x^2-4x+4<x^2<x^2+4x+4 \leqslant 4n+4.$$

*A második nap feladatainak megoldását a novemberi számban közöljük.

Levonva 4-et azt kapjuk, hogy $2n \leqslant x^2 - 4x$, és $4n \geqslant x^2 + 4x$, azaz $2n + 4x \leqslant x^2 \leqslant 4n - 4x$. Ha az $\{n, n+1, \ldots, 2n\}$ halmazból kiválasztunk két olyan elemet, melyek különbsége $4x$, akkor az így kapható minimális összeg $2n + 4x$, a maximális pedig $4n - 4x$, és ezek között minden páros szám megkapható ilyen módon, tehát az x^2 is.

Tehát $a = \frac{x^2}{2} - 2x$ és $c = \frac{x^2}{2} + 2x$ elemei az $\{n, n+1, \ldots, 2n\}$ halmaznak. Ekkor nyilván minden köztük lévő szám is, így a $b = \frac{x^2}{2} + 1$ is eleme ennek a halmaznak.

Végül vegyük észre, hogy $a + b = (x-1)^2$, $a + c = x^2$, $b + c = (x+1)^2$, azaz ha csak az a, b, c kártyákat nézzük, akkor is lesz köztük kettő, ami egy pakliba kerül, így abban a pakliban lesz két olyan szám, amelyek összege négyzetszám.

2. *Mutassuk meg, hogy az*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i - x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$$

egyenlőtlenség fennáll tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ valós számokra.

Várkonyi Zsombor megoldása. 1. Ha minden x_i előjele megegyezik, akkor az egyenlőtlenség teljesül, hiszen ha x_i és x_j azonos előjelűek, akkor $|x_i - x_j| \leqslant |x_i| + |x_j| = |x_i + x_j|$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt.

2. Ha a számok között szerepel a 0, akkor annak elhagyása nem módosítja az egyenlőtlenség igazságértékét, mivel $\sqrt{|x_i + 0|} = \sqrt{|x_i - 0|}$, tehát a két oldalon a 0-t tartalmazó tagok értéke páronként megegyezik.

3. Ha a számok közül kettő egymásnak ellentettje, akkor a két szám elhagyása nem befolyásolja az egyenlőtlenség igazságértékét. Legyen a két szám $x_i = -x_j$. Állítsuk párba a bal oldalon szereplő, $\{x_i, x_k\}$ $(k \neq i, j)$ párokhoz tartozó tagokat a jobb oldalon szereplő, $\{x_j, x_k\}$ $(k \neq i, j)$ párokhoz tartozó tagokkal és fordítva. Világos, hogy e tagok páronként megegyeznek. Hasonlóan látható, hogy az $\{x_i, x_i\}$, $\{x_j, x_j\}$, $\{x_i, x_j\}$ párokhoz tartozó tagok összege is megegyezik a két oldalon. Tehát x_i és x_j elhagyása az egyenlőtlenség két oldalának különbségét nem változtatja meg.

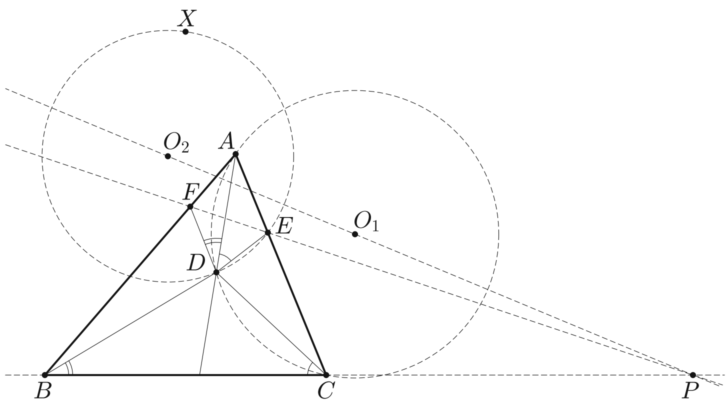
4. Az $x_1, \ldots x_n$ szám-n-esből $M(d)$ képezze az $x_1 + d, \ldots, x_n + d$ szám-n-est. Ahogyan d-t változtatjuk, az egyenlőtlenség bal oldalán szereplő kifejezések értéke nem változik, hiszen az összes szám együttes mozgatása nem módosítja a számok közötti különbségeket. Legyen $f(d)$ az egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő kifejezés értéke az $M(d)$ eltolás után. Például $f(0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j|}$, általánosan

$$f(d) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i + x_j + 2d|}.$$

Tekintsük az összes x_i számot és az összes $x_i + x_j$ alakú páros összeget. Ha ezek között szerepel a 0, akkor a 2. vagy 3. állítás értelmében elhagyhatunk egy vagy két számot. Ezt addig ismételjük, amíg a számok és a páros összegek között nem szerepel több 0. Most vizsgáljuk az összes x_i számot és az összes $\frac{x_i + x_j}{2}$ alakú páros átlagot. Ezek közül a legkisebb pozitív legyen P és a legkisebb abszolútértékű (tehát legnagyobb) negatív legyen N. Ha esetleg a számok és a páros átlagok között nem szerepelne pozitív vagy negatív, az azt jelentené, hogy minden szám előjele megegyezik, tehát az 1. állítás értelmében készen vagyunk. A 0-k elhagyása miatt tudjuk, hogy $N<0<P$. A definíciójukból adódóan $M(P)$, illetve $M(N)$ a legkisebb abszolútértékű pozitív, ill. negatív eltolások, amelyek valamelyik számot vagy páros összeget a 0-ba viszik. Ha a d változó N és P között mozog, akkor az $f(d)$ függvény folytonos és differenciálható, hiszen egyik tag sem vált előjelet. Ha $f'(0)\geqslant 0$, akkor d-t 0-tól csökkentve $f(d)$ értéke csökken. Emellett minden $N\leqslant d<0$-ra $f'(d)\geqslant f'(0)$ is teljesülni fog, tehát $f(N)\leqslant f(0)$. Tehát az $M(N)$ eltolást elvégezve az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés értéke nem változik, a jobb oldalon állóé pedig nem nő. Hasonlóan, ha $f'(0)\leqslant 0$, akkor „ jobbra tolunk", azaz pozitív d-ket választunk, és ezekre fog teljesülni, hogy a függvény értéke kisebb a kiindulásinál vagy egyenlő azzal. Végül $f(0)\geqslant f(P)$-hez jutunk, ami után pedig az $M(P)$ eltolás alkalmazható. Mindkét esetben oda jutottunk, hogy a számokat valamilyen irányba eltolhatjuk úgy, hogy a jobb oldali kifejezés értéke ne nőjön és valamelyik szám vagy páros összeg a 0-val „ütközzön". Ekkor pedig a számok közül legalább egy elhagyható és a folyamat ismételhető. Ilyen mozgatásokat és elhagyásokat végzünk egészen addig, amíg csupa azonos előjelű szám marad, ekkor pedig az egyenlőtlenség az 1. állítás miatt teljesül. Ebből kifolyólag teljesült a kiindulási helyzetben is, ezzel bebizonyítottuk a feladat állítását.

3. *Legyen D olyan belső pontja az $AB>AC$ tulajdonságú, hegyesszögű ABC háromszögnek, hogy $DAB\sphericalangle=CAD\sphericalangle$. Az AC szakasz E pontjára $ADE\sphericalangle=BCD\sphericalangle$ teljesül, az AB szakasz F pontjára $FDA\sphericalangle=DBC\sphericalangle$ teljesül, és az AC egyenes X pontjára $CX=BX$ teljesül. Jelölje O_1 és O_2 az ADC, illetve EXD háromszög köré írt kör középpontját. Bizonyítandó, hogy a BC, EF és O_1O_2 egyenesek egy ponton mennek át.*

Szabó Kornél megoldása. A bizonyítandó állítás az *1. ábrán* látható: P a három egyenes közös pontja.

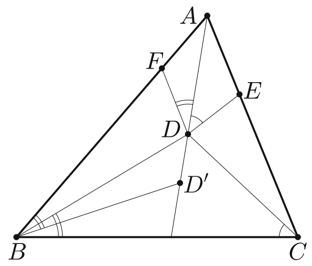


1. ábra

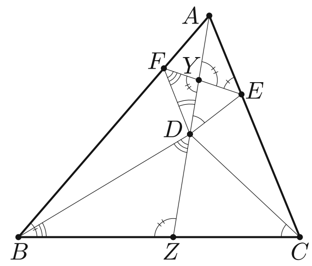
Először belátjuk, hogy a B, C, E, F pontok egy körön vannak.

Legyen D' a D pont izogonális konjugáltja* az ABC háromszögben (*2. ábra*). A feladat feltételei miatt D és D' is rajta van az A-ból induló szögfelezőn.

Ekkor az izogonális konjugálás miatt $FBD'\sphericalangle = DBC\sphericalangle$, a feladat feltétele miatt pedig ebből $FBD'\sphericalangle = FDA\sphericalangle$, ami éppen a $D'DF\sphericalangle$ kiegészítőszöge. Tehát F, D, D', B konciklikus (egy körön van). Hasonlóan E, D, D', C is konciklikus. A pont körre vonatkozó hatványa miatt ekkor $AF \cdot AB = AD \cdot AD' = AE \cdot AC$. Tehát $AF \cdot AB = AE \cdot AC$, ami éppen azt jelenti, hogy B, C, E, F konciklikus.



2. ábra



3. ábra

A *3. ábrán* azonosan jelölt szögek egyenlőek. Az „egy vonallal megjelölt szögek” egyenlőek, mert $FEC\sphericalangle = 180\sphericalangle - FBC\sphericalangle$ a $BCEF$ kör miatt, és így

$$FEA\sphericalangle = 180^\circ - FEC\sphericalangle = FBC\sphericalangle.$$

A „két vonallal megjelölt szögek”': $FYD\sphericalangle = AYE\sphericalangle$, mert csúcsszögek; és

$$BZA\sphericalangle = AYE\sphericalangle = 180\sphericalangle - \frac{\alpha}{2} - \text{„egy vonallal megjelölt szög”},$$

az AZB, illetve az AYE háromszögekben.

Mivel $DZC\sphericalangle$ külső szög az ABZ háromszögben, $BDZ\sphericalangle$ pedig az ABD háromszögben, így

$$DZC\sphericalangle = ZBA\sphericalangle + ZAB\sphericalangle = (ZBD\sphericalangle + DBA\sphericalangle) + DAB\sphericalangle =$$
$$= ZBD\sphericalangle + (DBA\sphericalangle + DAB\sphericalangle) = DBZ\sphericalangle + BDZ\sphericalangle.$$

Mivel $DBZ \sim FDY$, mert két szögük, és így a harmadik is egyenlő, így ebből $DBZ\sphericalangle + BDZ\sphericalangle = DBZ\sphericalangle + DFY\sphericalangle$.

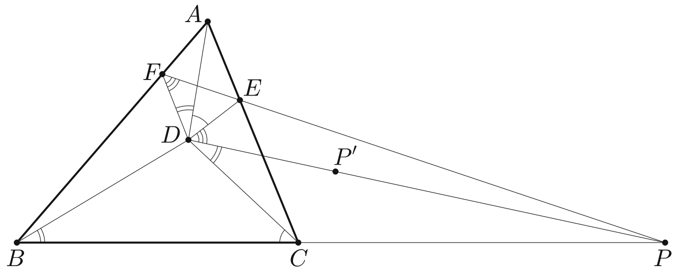
Mivel

$$EDC\sphericalangle = 180\sphericalangle - ZDC\sphericalangle - ADE\sphericalangle = 180\sphericalangle - ZDC\sphericalangle - DCB\sphericalangle = DZC\sphericalangle,$$

ezért ebből következik, hogy az $EDC\sphericalangle$-et mindig fel tudjuk vágni egy kétíves és egy háromíves méretű szögre.

Legyen tehát $EDP'\sphericalangle$ háromíves szög, $P'DC\sphericalangle$ pedig kétíves (*4. ábra*).

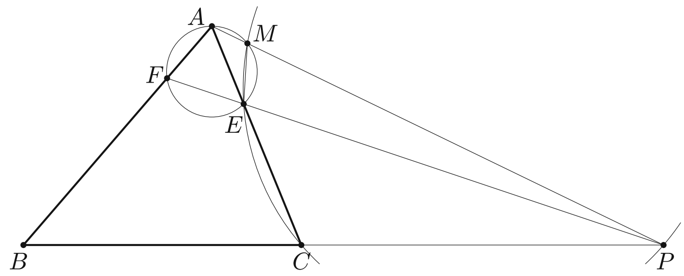
*Adott a P pont az ABC háromszög belsejében. Tükrözzük az A-ból induló belső (vagy külső) szögfelezőre az AP egyenest, a B-ből induló belső szögfelezőre a BP egyenest, végül a C-ből induló belső szögfelezőre a CP egyenest. Az így kapott három egyenes is egy ponton meg keresztül, ezt a pontot nevezzük a P pont izogonális konjugáltjának. Lásd `https://matkonyv.fazekas.hu/cache/pdf/vol_geometria_ii.pdf`.



4. ábra

Az érintőszárú kerületi szögek tétele miatt a DP' egyenes érinti a DEF és BDC köröket, azaz a hatványvonaluk. Az FE egyenes a DEF és $BEFC$ körök hatványvonala, BC pedig a BDC és $BEFC$ köröké. Jelölje az FE, BC és DP' egyenesek metszeteként kapott hatványpontot P (*4. ábra*). Mivel DP érinti a DEF és BDC köröket, azért $PD^2 = PE \cdot PF = PC \cdot PB$.

Jelölje M az AEF és PCE körök E-től különböző metszéspontját (*5. ábra*).



5. ábra

Szögszámolással kijön, hogy

$$AME\sphericalangle = 180^\circ - AFE\sphericalangle = BFE\sphericalangle = 180^\circ - BCE\sphericalangle = ECP\sphericalangle = 180\sphericalangle - EMP\sphericalangle$$

(rendre az $AMEF$, $BCEF$, $PCEM$ köröket használva). Emiatt A, M, P egy egyenesen vannak, ahonnan $PM \cdot PA = PE \cdot PF$ következik, s mivel

$$PD^2 = PE \cdot PF = PC \cdot PB,$$

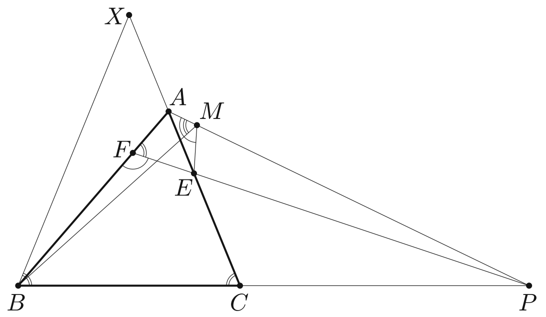
ezért $PM \cdot PA = PC \cdot PB$, vagyis $MABC$ is konciklikus. Ekkor

$$AMB\sphericalangle = ACB\sphericalangle = ECB\sphericalangle = 180^\circ - EFB\sphericalangle = EFA\sphericalangle.$$

Most belátjuk, hogy B, E, M, X egy körön vannak (*6. ábra*).

Még egy is szögszámolással:

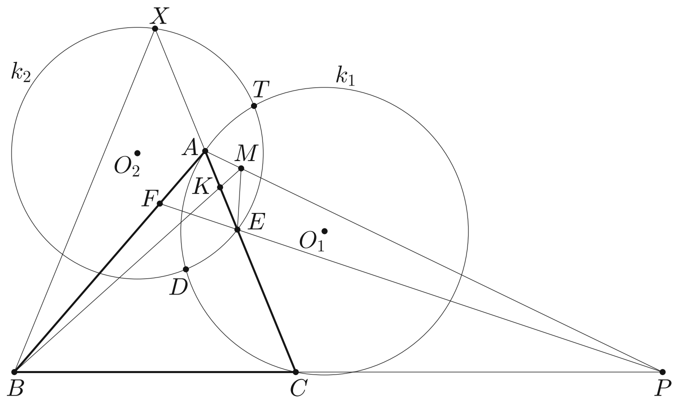
$$BME\sphericalangle = \text{egyíves szög} - \text{kétíves szög},$$
$$\text{kétíves szög} = 180^\circ - \text{egyíves szög, és így}$$
$$BME\sphericalangle = 180^\circ - 2 \cdot \text{kétíves szög} = BXC\sphericalangle = BXE\sphericalangle.$$



6. ábra

Tehát B, X, M, E valóban egy körön vannak.

Legyen K az AC és BM metszéspontja, T pedig a $k_1: CDA$ és $k_2: XED$ körök D-től különböző metszéspontja (*7. ábra*).



7. ábra

Az M, A, B, C pontok egy körön vannak, ezért $BK\cdot KM=CK\cdot KA$. A $BXME$ körből pedig $BK\cdot KM=XK\cdot KE$ következik.

Tehát $CK\cdot KA=XK\cdot KE$, azaz K a k_1 és k_2 kör hatványvonalán helyezkedik el, ami DT. Emiatt $CK\cdot KA=XK\cdot KE=DK\cdot KT=BK\cdot KM$. Így B, D, M, T egy körön vannak.

Most invertáljunk P-re PD sugárral. Ekkor a BDM és ADC körök helyet cserélnek, mert $PD^2=PE\cdot PF=PM\cdot PA=PC\cdot PB$. Mivel T a két kör közös pontja, fix marad az inverzió során, tehát $PD=PT$, azaz P a DT felezőmerőlegesén van, ami az O_1O_2 egyenes.

Tehát a P pont BC, EF és O_1O_2 közös pontja.

EGMO beszámoló

A reméltekkel ellentétben ismét online lett megszervezve a verseny, pedig nagyon vártuk az utazást Grúziába. De a tavalyihoz hasonlóan lehetőségünk volt közösen, a Rényiben megírni a versenyt, így azért a jó hangulat megmaradt.

Panna és Melinda a verseny előtt sok csapatépítő programot szervezett nekünk, így utazás nélkül is élvezetessé tették ezt a néhány napot számunkra. A játék és szórakozás mellett nagy hangsúlyt fektettek a lelki felkészülésre is, hogy higgyünk magunkban és ne izguljunk túlságosan.

A feladatsor a megszokottnál nehezebbre sikerült, így a verseny után kissé csalódottak voltunk, de ennek ellenére jól szerepelt a magyar csapat. Nóri arany, Janka ezüst, Diep (Zia) és Johi pedig bronzérmet szereztek, ezzel az európai országok között 6. lett a magyar csapat, összességében pedig 10.

Ugyan online volt a verseny, de a grúzok igyekeztek bevonni országuk kultúrájába, amennyire ez a körülmények közt lehetséges volt. A szervezők által meghirdetett kihívás a verseny idején a khinkali készítés volt. A khinkali egy, a dumplinghoz hasonló grúz különlegesség. A csapatból Janka részt vett benne, és elkészített egy gombás verziót. A kísérők közül Melinda próbálta ki, ő darált hússal csinálta. A khinkali megformázása meglepően nehéz volt, és bár a végén az ausztrál csapat nyert, jót szórakoztunk.

A verseny utánra szerveztek az angolok egy közös társasozást az írekkel és a franciákkal. Activityztünk, és sokáig beszélgettünk. Jó volt megismerni más országok csapatait is.

A tavalyi verseny eredményhirdetésére is sor került egy közeli játszótéren, ahol Anett is csatlakozott hozzánk. Egy évnyi várakozás után ünnepélyes, de mégis családias körülmények között átadták nekünk az érmeinket.

Győrffy Johanna, Hámori Janka,
Nguyen Bich Diep, Velich Nóra Zoé

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

Az első néhány számban a feladatsorok nem fedik le teljes egészében a hivatalos követelményrendszert, hogy a már tanult ismereteket kelljen csak felhasználni a megoldáshoz. Igyekszünk a feladatsorok nehézségét az éles sorokhoz igazítani, vagyis – az előző évekhez képest – könnyebbek lesznek.

I. rész

1. A karát egy viszonyszám, amely megmutatja, hogy mekkora az aranyötvözetben az arany tömegaránya.

a) Hány gramm ezüstöt tartalmaz egy 10 karátos 0,06 kg tömegű nyaklánc, amely csak aranyat és ezüstöt tartalmaz, ha a színarany 24 karátos? (*2 pont*)

b) Hány gramm aranyat olvasszon a nyaklánchoz az ötvös, ha 18 karátos ötvözetet szeretne létrehozni? (*4 pont*)

c) Az ötvösmester pontosan 25 éve hordja az egyik aranygyűrűjét, és megállapította, hogy időközben a gyűrű aranytartalmának tömege 0,012 milligrammal csökkent. Számítsuk ki, hogy naponta hány aranyatom vált le a gyűrűről, ha 197 gramm arany hozzávetőlegesen $6 \cdot 10^{23}$ darab aranyatomot tartalmaz. (Feltételezzük, hogy a kopás egyenletesen ment végbe, és tudjuk, hogy ezen időszakban 5 szökőév volt.) (*6 pont*)

2. Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza egyenlő a másik két oldalhossz számtani közepével, kerülete 276 egység.

a) Mekkora a háromszög köréírt körének a területe? (*8 pont*)

b) Mekkora a háromszög beírt körének a kerülete? (*4 pont*)

3. *a*) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek négyzete osztható 504-gyel? (*3 pont*)

b) Az első 504 természetes szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyszerre négy különböző számot. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább az egyik nagyobb 400-nál? (*5 pont*)

c) Melyik számrendszerben írtuk fel a háromjegyű 352 számot, ha értéke egyenlő lett a hatos számrendszerben felírt 504 értékével? (*6 pont*)

4. A KöMaL Facebook oldalán minden bejegyzésnél pontosan 2 vagy pontosan 3 (különböző) szerepel az előre meghatározott 10-féle hashtagből, melyek között megtalálható a `#ankét` és a `#kömalpóló` is. Az adminisztrátorok megállapodtak, hogy amennyiben egy bejegyzésnél szerepel a `#ankét`, akkor szerepel a `#kömalpóló` is.

a) Hány poszt jelenhet meg októberben úgy, hogy bármely kettőben különbözzön a hashtagek halmaza, ha ősszel minden posztban szerepel a `#kömalpóló`? (*3 pont*)

b) Az adminisztrátorok eredeti megállapodásának betartásával hány poszt jelenhet meg úgy, hogy bármely kettőben különbözzön a hashtagek halmaza, ha más megállapodás nincs? (*4 pont*) *c*) A két adminisztrátort megkérdezték, hogy összesen hányan kedvelték a szeptemberi bejegyzéseket. Az egyik így válaszolt: „Minden szeptemberi bejegyzést ugyanannyian lájkoltak. Ha 2-vel kevesebb bejegyzés lett volna és mindegyiket 42-vel többen kedvelték volna, akkor 744-gyel több lájkot gyűjtöttünk volna.” A másik adminisztrátor válasza így hangzott: „Ha 3-mal többször posztoltunk volna, de mindegyiket félszázzal kevesebben kedvelték volna, akkor 976-tal kevesebb lájkunk lett volna.” Összesen hány lájkot gyűjtöttek szeptemberben? (*6 pont*)

II. rész

5. Adott a k kör, amelynek egyenlete $x^2+y^2=20x-21y$ és a $P\left(-\frac{1}{2};p\right)$ pont, ahol p valós paraméter.

a) Határozzuk meg a p valós paraméter összes értékét, amelyre P a k körön kívül helyezkedik el. (*5 pont*)

Legyen az AB szakasz a k kör azon átmérője, amelyre illeszkedik a $Q(5;-5{,}25)$ pont.

b) Számítsuk ki az A és a B pont koordinátáit! (*5 pont*)

A k körön belül véletlenszerűen rábökünk egy pontra.

c) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott pont nincs messzebb a k kör középpontjától, mint a Q pont! (*6 pont*)

6. Nevesincs szigeten felmérést végeztek az idén érettségiző 152 diák megkérdezésével. Az első kérdés arra vonatkozott, hogy ki hány tárgyból vizsgázik közép-, illetve emelt szinten. A válaszokat az alábbi táblázat mutatja:

		középszintű vizsgák száma					
		0	1	2	3	4	5
emelt szintű vizsgák száma	0	**0**	**8**	**3**	**5**	**2**	**25**
	1	**1**	**2**	**3**	**10**	**20**	**2**
	2	**3**	**4**	**7**	**22**	**6**	**0**
	3	**1**	**3**	**10**	**8**	**1**	**0**
	4	**0**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**
	5	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Például 20 olyan diák van, aki 4 tárgyból középszintű, 1 tárgyból pedig emelt szintű vizsgára jelentkezett, ugyanakkor 5 tanuló 3 tárgyból középszinten vizsgázik, emelt szintű vizsgát pedig idén nem tesz.

a) Összesen hány emelt szintű vizsgát terveznek a diákok? (*3 pont*)

b) Hányan érettségiznek pontosan 5 tárgyból? (*3 pont*)

c) Határozzuk meg a legfeljebb 4 tárgyból vizsgázók között a középszintű vizsgák számának leggyakoribb értékét, illetve mediánját! (*5 pont*)

d) Számítsuk ki az egy főre jutó átlagos vizsgaszámot! (*5 pont*)

7. Olaszországi kirándulása során Zéta méréssel meghatározta a pisai ferde torony épületének hosszát. A torony talpától először kimért 48 métert abba az irányba, amerre a torony dől, és innen a torony teteje 54,7 fokos szögben látszott. Ezután ugyanabban az irányban még 24 métert ment, ahonnan a torony teteje már csak 42 fokos szögben látszott.

a) Határozzuk meg a torony hosszát Zéta mérési eredményei alapján, majd adjuk meg annak százalékos eltérését a torony valódi hosszúságától, amely 56,3 méter. (*6 pont*)

b) Mekkora szöget zár be az épület a vízszintes talajjal? (*3 pont*)

c) Zéta öccse, Zétény felment a toronyba és közben megszámolta a lépcsőket. Felérve megállapította, hogy a lépcsőfokok száma egy olyan mértani sorozat harmadik eleme, amelyhez hozzáadva a második elemet 336-ot kapunk összegként. Ugyanezen sorozat ötödik eleméből kivonva a harmadik elemet, a különbség 14 112. Hány lépcsőfok van a pisai ferde toronyban? (*7 pont*)

8. Adott a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \quad \text{és} \quad g(x) = 3x + 1$$

függvény.

a) Írjuk fel az $u = f \circ g$ és a $v = g \circ f$ függvények hozzárendelési szabályát, határozzuk meg értelmezési tartományukat és értékkészletüket. (*8 pont*)

b) Adjuk meg az $f(x)$, illetve a $g(x)$ függvény egy-egy olyan leszűkítését, amelynek értékkészlete

- $]-3; 5]$;
- a természetes számok halmaza;
- a racionális számok halmaza. (*8 pont*)

9. Egy 7 dm hosszúságú szakaszt felosztunk két részre.

a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyik szakaszhossz köbének és a másik szakaszhossz négyzetének szorzata akkor a legnagyobb, ha az egyik szakasz hossza 42 cm. (*8 pont*)

b) Hány olyan különböző háromszög van, amelynek két oldala az *a*) részben kapott két szakasz, és a harmadik oldalának hossza is centiméterben mérve egész szám? (*3 pont*)

c) Mekkora lehet a legnagyobb belső szöge annak a háromszögnek a fentiek közül, amelynek oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak? (*5 pont*)

Kozma Katalin Abigél
Győr

Megoldásvázlatok a 2021/6. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:*

a) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$,

b) $\dfrac{1}{\cos x+1}+\dfrac{1}{\cos x-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}$. *(12 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* A négyzetgyökök miatti kikötés $x\geqslant 0$. Emeljük négyzetre mindkét oldalt. $x+8-2\sqrt{x+8}\sqrt{x}+x=x+3$, rendezve $x+5=2\sqrt{x(x+8)}$, újabb négyzetre emelés után $x^2+10x+25=4(x^2+8x)$, 0-ra redukálva $0=3x^2+22x-25$.

A megoldóképletbe helyettesítve:

$$x_{1,2}=\frac{-22\pm\sqrt{22^2-4\cdot 3\cdot(-25)}}{6}=\frac{-22\pm 28}{6}\ \Rightarrow\ x_1=1,\ x_2=-\frac{25}{3}.$$

Az x_2 nem lehet megoldás, mert negatív. Ellenőrizzük x_1-et: $\sqrt{1+8}-\sqrt{1}=\sqrt{1+3}$, vagyis $3-1=2$. Igaz kijelentést kaptunk, tehát az egyenlet megoldása: $x=1$.

II. megoldás. A kikötés után adjunk az egyenlet mindkét oldalához $\sqrt{x}$-et, majd emeljünk négyzetre: $x+8=x+2\sqrt{x}\sqrt{x+3}+x+3$, rendezve $5-x=2\sqrt{x^2+3x}$. Újabb kikötés adódott: $5-x\geqslant 0$, tehát $0\leqslant x\leqslant 5$. A négyzetre emelés után most a $25-10x+x^2=4(x^2+3x)$ egyenletet kaptuk, ami a 0-ra redukálás után megegyezik az I. megoldásban látható egyenlettel, a befejezés ugyanúgy történik.

b) Alkalmazzuk a négyzetes összefüggést:

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x=(1-\cos x)(1+\cos x).$$

Ezt felhasználva:

$$\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{1-\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\quad(\cos x\neq\pm 1),$$

szorozzunk $(1+\cos x)(1-\cos x)$-szel:

$$1-\cos x-(1+\cos x)=\sqrt{3},\quad -2\cos x=\sqrt{3},$$

$$\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ x_1=\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\ x_2=\frac{7\pi}{6}+2l\pi\ (k,l\in\mathbb{Z}).$$

Mivel $\cos x_{1,2}\neq\pm 1$, ezért mindkét gyök megoldása az egyenletnek.

2. *Ha a fonyódi hajóállomás mólójának (F) végéről a badacsonyi kikötő (B) felé nézünk, akkor ettől az iránytól jobbra $75°$-os szögben Révfülöp kikötője (R), balra $28°$-os szögben pedig Szigliget kikötője (S) látszik. Tudjuk, hogy az FRB háromszög egyenlő szárú, melynek alapja FB, valamint azt is, hogy az FBS háromszög is* *egyenlő szárú, amelynek alapja az FS szakasz. Egy vitorlás hajó egyik nap Fonyódról Révfülöpre, onnan Badacsonyba, majd Szigligetre vitorlázott, ahol a hajón utazók megebédeltek, és visszatértek Fonyódra. Fonyód a Balaton déli partján, Badacsony vele szemben, a Balaton északi partján található. A badacsonyi kikötő a fonyóditól* 5,2 km*-re van* ($FB = 5{,}2$ km), *a Föld görbületétől eltekinthetünk.*

a) Számítsuk ki, hogy legalább hány km*-t tett meg ezen a napon a vitorlás. A végeredményt egész számra kerekítve* km*-ben adjuk meg.*

Kiderült, hogy a hajón tartózkodók közül néhányan már korábban is ismerték egymást (az ismeretség kölcsönös). Egy n csúcsú gráffal ábrázoltuk ezeket az ismeretségi viszonyokat, ahol a személyeket a csúcsok jelképezték, két csúcsot akkor és csak akkor kötött össze él, ha a csúcsoknak megfelelő személyek korábban már ismerték egymást. Olyan egyszerű, összefüggő gráfot kaptunk, amelynek 10 *éle lett. Jelölje A az n csúcsú egyszerű, összefüggő gráf élei számának lehetséges legkisebb, B pedig a lehetséges legnagyobb értékét.*

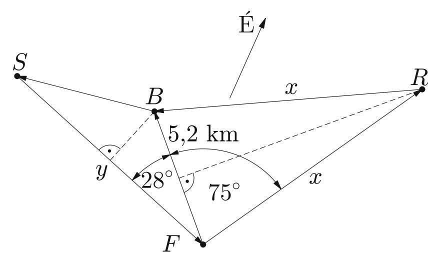
b) Hányan utaztak a hajón, ha $\frac{A+B}{2} = 10$? *(12 pont)*

Megoldás. *a) I. megoldás.* Készítsünk vázlatot a kikötők elhelyezkedéséről. Az egyenlő szárú háromszögek alapjainak felezőmerőlegeseit berajzolva felírhatjuk, hogy $\frac{2{,}6}{FR} = \cos 75°$; innen $FR = 10{,}05$ km, valamint

$$\frac{\frac{SF}{2}}{5{,}2} = \cos 28° \;\Rightarrow\; SF = 9{,}18 \text{ km.}$$

A vitorlás hajó a kikötőket érintve legalább $2 \cdot 10{,}05 + 5{,}2 + 9{,}18 = 34{,}48$ km $\approx$ ≈ 34 km utat tett meg.

II. megoldás. Legyen $FR = RB = x$; $SF = y$, majd írjuk fel a koszinusztételt BR-re:



$$x^2 = x^2 + 5{,}2^2 - 2x \cdot 5{,}2 \cdot \cos 75°,$$

ebből $x = 10{,}05$ km.

$FBS\sphericalangle = 180° - 2 \cdot 28° = 124°$. Felírva a szinusztételt:

$$\frac{y}{5{,}2} = \frac{\sin 124°}{\sin 28°},$$

ahonnan $y = 9{,}18$ km.

Az út hossza legalább $2x + 5{,}2 + y = 34{,}48$ km ≈ 34 km.

További megoldások is vannak.

b) Az n csúcsú egyszerű, összefüggő gráf éleinek száma akkor minimális, ha a gráf fagráf, ebben az esetben $n-1$ éle van; akkor maximális, ha teljes gráf, amelynek $\frac{n(n-1)}{2}$ éle van.

A megoldandó egyenlet:

$$\frac{(n-1)+\frac{n(n-1)}{2}}{2}=10,$$

rendezve: $n^2+n-42=0$.

$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 42}}{2}=\frac{-1\pm 13}{2}\ \Rightarrow\ n_1=6,\quad (n_2=-7).$$

A hajón hatan utaztak.

Ellenőrzés: ha a 6 csúcsú gráf fagráf, akkor 5 éle van; ha teljes gráf, akkor $\frac{6\cdot 5}{2}=15$; $\frac{5+15}{2}=10$.

3. *Tekintsük az alábbi kijelentéseket:*

A) Ha egy egyszerű gráf csúcsainak száma páratlan, akkor van páros fokú csúcsa.

B) Ha egy számtani sorozat konvergens, akkor különbsége pozitív szám.

C) Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem korlátos.

D) Ha egy mértani sorozat hányadosának abszolút értéke egynél kisebb, akkor a sorozat konvergens.

a) Igazak vagy hamisak az állítások?

b) Fogalmazzuk meg az A) és D) kijelentések megfordítását, majd döntsük el ezek logikai értékét.

Minden esetben indokoljuk válaszunkat. *(14 pont)*

Megoldás. *a)* *A*) Igaz. Ha nem lenne páros fokú csúcsa, akkor a fokszámok összege páratlan szám lenne (mert páratlan számú páratlan szám összege páratlan), ami lehetetlen, a fokszámok összegének páros számnak kell lennie.

B) Hamis. Ha a különbség bármilyen kicsi pozitív szám volna, kellően sokszor véve a többszöröse akármilyen nagy számnál nagyobb volna, azaz a sorozat felülről nem korlátos, így konvergens sem lehet.

Precízebben ugyanez: $d>0; a_n=a_1+(n-1)d$. Legyen $K>0$, ekkor

$$a_1+(n-1)d>K\ \Rightarrow\ n>\frac{K-a_1}{d}+1.$$

Legyen $n_0\geqslant\frac{K-a_1}{d}+1$ pozitív egész szám – vagyis akármekkora pozitív K-hoz van küszöbindex, hogy az ennél nagyobb indexű tagjai a sorozatnak mind nagyobbak K-nál.

A sorozat felülről nem korlátos, nem lehet konvergens.

(*Megjegyzés.* Csak a konstans számtani sorozatok konvergensek, határértékük a konstans.)

C) Hamis. Ellenpélda: $a_n=(-1)^n$.

D) Igaz. $a_n=a_1q^{n-1}$. Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$, ha $|q|<1$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\lim_{n\to\infty}b_n=a_1\cdot 0=0.$$

b) *A*) megfordítása: Ha egy egyszerű gráfnak van páros fokú csúcsa, akkor csúcsainak száma páratlan.

A kijelentés logikai értéke hamis. Ellenpélda: a gráf csúcsai egy négyzet csúcsai, élei a négyzet oldalai. (Minden olyan gráf jó ellenpéldának, amely tartalmaz legalább egy páros fokú csúcsot, és csúcsainak száma páros szám.)

D) megfordítása: Ha egy mértani sorozat konvergens, akkor $|q| < 1$.

A kijelentés logikai értéke hamis. Ellenpélda: $a_n = 2021$. A sorozat határértéke 2021, hányadosa 1. (Minden konstans sorozat megfelel ellenpéldának.)

4. *a*) *Számítsuk ki az y tengely azon pontjának koordinátáit, amelyből az $A(-1;1)$, $B(3;9)$ pontok derékszögben látszanak.*

Az $A(-1;1)$, $B(3;9)$, továbbá a C pont illeszkedik az $y = x^2$ egyenletű parabolára, C rajta van a parabola A és B közé eső ívén.

b) *Határozzuk meg C koordinátáit, ha az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb.* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Az AB szakasz Thalész-körének középpontja $O\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{1+9}{2}\right)$, egyenlete:

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = (3-1)^2 + (9-5)^2,$$

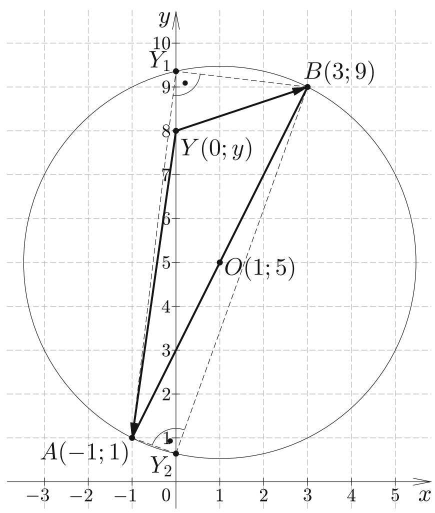
$$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 20.$$

Az y tengely pontjainak első koordinátája (abszcisszája) 0, így az egyenlet: $(y-5)^2 = 19$,

$$|y-5| = \sqrt{19} \ \Rightarrow\ y_1 = 5 + \sqrt{19},$$

$y_2 = 5 - \sqrt{19}$. A pontok tehát:

$$Y_1\left(0; 5+\sqrt{19}\right),\quad Y_2\left(0; 5-\sqrt{19}\right).$$



a) *II. megoldás.* A keresett pont $Y(0;y)$. $\overrightarrow{YA}(-1; 1-y)$, $\overrightarrow{YB}(3; 9-y)$. Két vektor akkor és csak akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk 0, azaz:

$$(-1)\cdot 3 + (1-y)(9-y) = 0.$$

Rendezve: $y^2 - 10y + 6 = 0$. $y_{1,2} = \frac{10\pm\sqrt{76}}{2} = 5 \pm \sqrt{19}$.

Megkaptuk az I. megoldásban szereplő koordinátákat.

b) *I. megoldás.* $x \in [-1;3]$ (ez nyilvánvaló, a további megoldásokban nem ismétlem meg). Az $ADEB$ trapéz területe: $\frac{(1+9)4}{2} = 20$ területegység (te).

$t_\triangle = 20 - (t_1 + t_2)$, ahol

$$t_1 = t_{ADFC} = \frac{(1+x^2)(x+1)}{2} = \frac{x^3+x^2+x+1}{2},$$

$$t_2 = t_{CFEB} = \frac{(x^2+9)(3-x)}{2} = \frac{-x^3+3x^2-9x+27}{2},$$

$$t_1 + t_2 = \frac{4x^2-8x+28}{2} = 2x^2-4x+14,$$

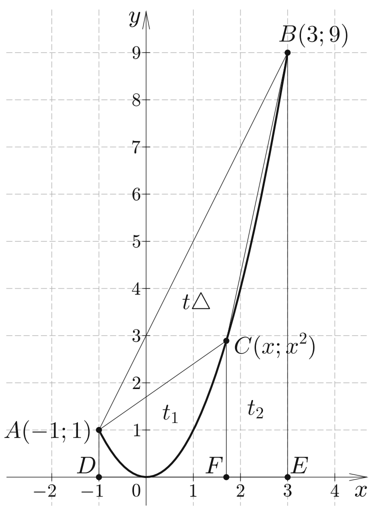
$$t_\triangle = 20 - 2x^2 + 4x - 14 = -2x^2+4x+6.$$

(1) befejezés: $t_\triangle = -2(x^2-2x+1)+6+2 = 8-2(x-1)^2$. Ez akkor a legnagyobb, ha a 8-ból a lehető legkevesebbet vonunk ki, ami akkor következik be, ha $x=1$. Tehát a háromszög területe akkor a legnagyobb, ha $C(1;1)$.

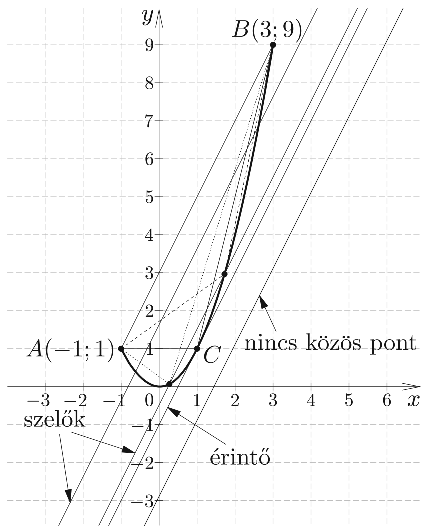
(2) befejezés: a $t_\triangle = -2x^2+4x+6$ függvény grafikonja egy „lefelé nyíló” parabola, melynek az x tengellyel vett metszéspontjait a $-2x^2+4x+6=0$ gyökei adják. A görbe szimmetria tulajdonsága miatt a maximumhely a két gyök számtani közepénél van, tehát:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4(-2)6}}{-4} = \frac{-4\pm 8}{-4} \;\Rightarrow\; x_1=-1,\; x_2=3 \;\Rightarrow\; x = \frac{-1+3}{2} = 1.$$

(A két gyök összegét megkaphattuk volna a Viète-formula alkalmazásával, a gyökök kiszámítása nélkül is: $x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{4}{-2} = 2$.)



I. megoldás



II. megoldás

II. megoldás. Az AB húrral párhuzamos egyeneseket három csoportba oszthatjuk (a parabola szelője, érintője, vagy nincs közös pontjuk). Gondolatban futtassuk végig C-t az AB íven. Akkor kerül az AB húrtól a legmesszebbre, ha éppen az érintővel vett érintési pontban van. Ha ugyanis egy szelővel vett metszéspontban volna, akkor a szelő „túloldalán" (abban a félsíkban, mely nem tartalmazza az AB húrt), találnánk további pontokat, amelyek messzebb volnának AB-től, mint C.

Az AB egyenes meredeksége $m=\frac{9-1}{3-(-1)}=2$. Párhuzamos egyenesek meredeksége egyenlő. Az egyenes egyenletét keressük $y=2x+b$ alakban. Tekintsük az

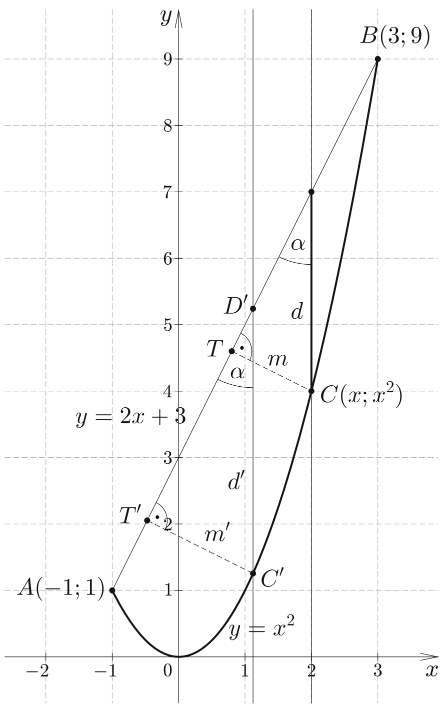
$$y=x^2,$$
$$y=2x+b$$

paraméteres egyenletrendszert. Ennek akkor lesz egy megoldása (akkor érinti egymást a két alakzat), ha az $x^2=2x+b$ paraméteres egyenlet diszkriminánsa 0.

Rendezve: $x^2-2x-b=0 \Rightarrow D=(-2)^2-4(-b)=0$, innen $b=-1$, az egyenlet $x^2-2x+1=0$; $(x-1)^2=0$; gyöke: $x=1$.

(A fenti helyett ismét alkalmazhatjuk a gyökök és együtthatók közötti egyik Viète-formulát: most a két gyök egyenlő, ezért összegük $x_1+x_2=2x=-\frac{-2}{1} \Rightarrow x=1$.)

III. megoldás. Ha C-n át párhuzamost húzunk az y tengellyel, ez az egyenes D-ben metszi AB-t. Az ABC háromszög AB alapjához tartozó magasság talppontja legyen T.



Ha C helyett egy C'-t veszünk, akkor a megfelelő D', T' pontokkal együtt a $C'D'T'$ háromszög hasonló az CDT háromszöghöz, mert szögeik megegyeznek. Tehát az ABC háromszög magassága (így területe is) akkor lesz a legnagyobb, ha a CDT derékszögű háromszög átfogója a lehető legnagyobb.

Az AB egyenes egyenlete: $m==\frac{9-1}{3-(-1)}=2$, $y-9=2(x-3)$, $y=2x+3$, amiből

$$DC=d(x)=2x+3-x^2.$$

A $d(x)$ függvény maximumhelyének meghatározása a korábbi megoldásokban látottak alapján többféleképpen befejezhető.

Legyen pl. ez: $d(x)=2x+3-x^2=4-(x-1)^2\leqslant 4$. $d(x)$ akkor a legnagyobb, ha $(x-1)^2=0 \Rightarrow x=1$, $C(1;1)$.

Megjegyzés. További megoldások is léteznek, pl. a szélsőérték problémák általános megoldására szolgáló differenciálszámítás módszere, azonban itt ezt tudatosan mellőztük.

Egy másik megoldás lehet az, ha a függvénytáblázatban található „Pont távolsága egyenestől" képletet alkalmazza a megoldó, majd megkeresi a számlálóban keletkezett függvény szélsőértékét.

II. rész

5. *Egy* 100 *lakásos társasház lakói az éves rendes közgyűlésre készülnek. A Lakóbizottság a közelgő nagy felújítás költségeinek biztosítására a jelenlegi közös költség emelését fogja javasolni. A korábbi tapasztalatok szerint azonban* p*%-os emelés esetén a lakók* $\frac{p}{3}$*%-a csak az emelés előtti összeget hajlandó fizetni (velük szemben jogi eljárást indíthat a Lakóbizottság, ami hosszabb távon eredményre vezethet, de a közelgő felújításig nem fog befejeződni), a többiek fizetik az emelt költséget. Most minden lakás tulajdonosa fizeti a havi* 10 000 Ft*-os közös költséget.*

a) Összesen mennyi pénzt fizetnének be a tulajdonosok havonta a társasház számlájára, ha 15%*-kal növekedne a közös költség?*

A Lakóbizottság tagjai tudják, hogy nagymértékű emelést a közgyűlés nem fogadna el, ezért a felújításhoz minimálisan szükséges emelést fogják javasolni. A társasház folyószámláján 3 millió 430 ezer Ft *van, a* 36 hónap *múlva kezdődő felújításig a számlán legalább* 50 millió Ft*-nak kell lennie. A társasháznak a lakók befizetésén kívül más bevétele nincs, a folyószámlát kezelő bank által fizetett kamat elfogy a banki költségekre és egyéb apróbb kiadásokra.*

b) Számítsuk ki, hogy mennyi legyen a lakásonként fizetendő megemelt havi közös költség a megadott feltételekkel. Az eredményt 100 Ft*-ra kerekítve adjuk meg.*

A közös képviselő a korábbi közgyűlési jegyzőkönyveket tanulmányozva érdekes dolgot figyelt meg. Hét olyan közgyűlés volt, amelyen a résztvevők létszáma – megfelelő sorrendbe rakva – egy számtani sorozat szomszédos elemeit képezte. A hét adat mediánja 66*, szórása* 6*.*

c) Mekkora az adatok terjedelme? *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Ha 15%-kal emelkedne a havi közös költség, akkor ez 11 500 Ft lenne. A tulajdonosok 5%-a, azaz 5-en továbbra is 10 000 Ft-ot, a többiek, 95-en pedig 11 500 Ft-ot fizetnének, így a számlára összesen $5\cdot 10\,000+95\cdot 11\,500 = 1\,142\,500$ Ft folyna be minden hónapban.

b) Legyen az emelés p%-os. Ekkor az a lakástulajdonos, aki fizeti ezt az emelt összeget, $10\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)$ Ft-ot fog befizetni havonta.

Ilyen tulajdonos $100\cdot\left(1-\frac{p}{300}\right)$ lesz, $\frac{p}{3}$ számú tulajdonos pedig a korábbi 10 000 Ft-ot fogja fizetni, így a havi befizetés összesen:

$$h(p)=10\,000\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(100-\frac{p}{3}\right)+10\,000\cdot\frac{p}{3}=10\,000\left(-\frac{p^2}{300}+p+100\right)\text{Ft}$$

lesz.

A társasház számláján 36 hónap múlva legalább 50 millió Ft-nak kell lennie, felírhatjuk tehát, hogy

$$50\,000\,000 \leqslant 36\left[10\,000\left(-\frac{p^2}{300}+p+100\right)\right]+3\,430\,000,$$

$$46\,570\,000 \leqslant 360\,000\left(-\frac{p^2}{300}+p+100\right); \quad \frac{4657}{36} \leqslant -\frac{p^2}{300}+p+100,$$

$$\frac{465\,700}{12} \leqslant -p^2+300p+30\,000, \quad p^2-300p+\frac{26\,425}{3} \leqslant 0,$$

$$p_{1,2}=\frac{300 \pm \sqrt{300^2-4\cdot\frac{26\,425}{3}}}{2}=\frac{300 \pm 234{,}02}{2},$$

$$p_1=32{,}99; \quad p_2=267{,}01.$$

Így az egyenlőtlenség megoldása: $32{,}99 \leqslant p \leqslant 267{,}01$.

A Lakóbizottság tehát 33%-os emelést fog javasolni a közgyűlésen, az új közös költség 13 300 Ft/hó lesz.

Ellenőrzés: a 13 300 Ft-ot 11 tulajdonos nem fogja fizetni, ők maradnak a havi 10 000 Ft-nál, a többi 89 tulajdonos pedig az emelt díjat fizeti.

A havonta befizetett összeg $89\cdot 13\,300+11\cdot 10\,000=1\,293\,700$ Ft lesz, ez 36 hónap alatt összesen 46 573 200 Ft-ot eredményez, a meglévő 3 430 000 Ft-tal együtt 50 003 200 Ft, ami a felújításhoz éppen elegendő.

c) Ha egy számtani sorozat első hét tagját nemcsökkenő sorrendben felsoroljuk, akkor a 4. helyen éppen a medián lesz, ami esetünkben 66. Legyen a sorozat különbsége d, ekkor az elemek rendre: $66-3d$, $66-2d$, $66-d$, 66, $66+d$, $66+2d$, $66+3d$, ezek átlaga 66, tehát a szórás:

$$\sqrt{\frac{(3d)^2+(2d)^2+d^2+0^2+(-d)^2+(-2d)^2+(-3d)^2}{7}}=6,$$

$$\sqrt{\frac{28d^2}{7}}=6, \quad 2d=6 \;\Rightarrow\; d=3(d \geqslant 0).$$

A hét szám: 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, a terjedelem 18.

6. *Értelmezzük a valós számok halmazán az „újösszeg” (jele: $\oplus$) műveletet a következőképpen:*

$$a \oplus b = a+b+ab \quad (a,b \in \mathbb{R}),$$

valamint az „újszorzat” (jele: $\odot$) műveletet az alábbiak szerint:

$$a \odot b = \frac{ab}{a+b} \quad (a,b \in \mathbb{R},\ a+b \neq 0).$$

a) *Melyek azok a valós számok, amelyeknek „újösszege” 90, „újszorzata” 4?*

b) Igazoljuk, hogy az „újösszeg” műveletre teljesül a csoportosíthatósági tulajdonság (asszociativitás), azaz

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

vagyis elhagyhatók a zárójelek $(a, b, c \in \mathbb{R})$.

c) Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x \oplus y \oplus z = 2021$ *egyenletet.*
(*16 pont*)

Megoldás. *a*) A keresett valós számok legyenek a, b. Az

$$a + b + ab = 90,$$

$$\frac{ab}{a+b} = 4$$

egyenletrendszert kell megoldani.

A második egyenletből $ab = 4(a+b)$, az elsőbe írva: $a+b+4(a+b) = 90$, innen $a+b = 18$, azaz $b = 18-a$. Ezt felhasználva az $a(18-a) = 4\cdot 18$, $0 = a^2 - 18a + 72$ egyenletet kaptuk, amelynek megoldása:

$$a_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{18^2 - 4\cdot 72}}{2} = \frac{18 \pm 6}{2}.$$

Ha $a_1 = 12$, akkor $b_1 = 6$, ha $a_2 = 6$, akkor $b_2 = 12$. A két szám a 6 és 12.

Ellenőrzés: $6 + 12 + 6\cdot 12 = 90$, $\frac{6\cdot 12}{6+12} = \frac{72}{18} = 4$.

b)
$$\begin{aligned} a \oplus (b \oplus c) &= a + (b \oplus c) + a(b \oplus c) = a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) = \\ &= a + b + c + bc + ab + ac + abc, \\ (a \oplus b) \oplus c &= (a \oplus b) + c + (a \oplus b)c = (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c = \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc. \end{aligned}$$

A tagok sorrendjétől eltekintve ugyanazt kaptuk, tehát az „újösszeg” művelet asszociatív.

c) Legyen $x \leqslant y \leqslant z$ úgynevezett alapmegoldás, az összes megoldás ezek permutációja lesz.

$$x \oplus y \oplus z = xyz + xy + xz + yz + x + y + z = 2021.$$

Vegyük észre, hogy az egyenlet mindkét oldalához 1-et hozzáadva a bal oldalon az $(x+1)(y+1)(z+1)$ felbontott alakját kapjuk, tehát az $(x+1)(y+1)(z+1) = 2022$ egyenletet kell megoldanunk a pozitív egészek halmazán.

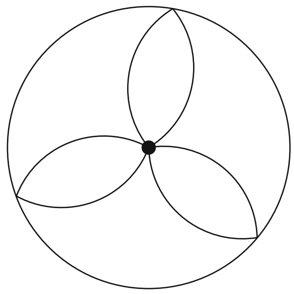
A 2022 prímtényezős felbontása: $2\cdot 3\cdot 337$. Ahhoz, hogy az ismeretlenek pozitív egész számok legyenek, és egymáshoz viszonyított nagyságuk is az előírt legyen, csak egyféleképpen adódhat megoldás: $x+1 = 2$, $y+1 = 3$, $z+1 = 337$. Így az egyenlet alapmegoldása: $x = 1$, $y = 2$, $z = 336$.

Ellenőrzés: $1 \cdot 2 \cdot 336 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 336 + 2 \cdot 336 + 1 + 2 + 336 = 2021$.

Az összes megoldás tehát:

x	1	1	2	2	336	336
y	2	336	1	336	1	2
z	336	2	336	1	2	1

7. *Az ábra egy játékokat készítő cég tervezett emblémáját mutatja, melyet a termékekre a kör középpontja körül elforgatható módon rögzítenek. A forgásszimmetrikus alakzat egyes tartományait úgy festik be, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok színe különbözik egymástól. Piros, sárga, kék és zöld szín közül lehet választani, és egy emblémán mind a négy színnek szerepelnie kell. Nevezzük a kör belsejében levő körívek határolta konvex tartományokat „szirom”-nak, a konkáv részeket pedig „háttér”-nek.*



a) Hányféleképpen színezhető ki az embléma, ha a „szirmok” színének különbözniük kell egymástól, továbbá azonos színezésűnek tekintjük azokat az emblémákat, amelyek a kör középpontja körüli elforgatással alak és szín szerint egymásba vihetők?

Az emblémák gyártásához használt berendezés üzembe helyezésekor 1000 *darabos nullszériát készítettek, amelynek minden példányát megvizsgálták. Dobozba gyűjtötték a hibás darabokat, ezekből összesen* 100 *db lett, majd feljegyezték, hogy* 57*-nek szín hibája,* 53*-nak pedig méret hibája van.*

Véletlenszerűen kivettünk ebből a dobozból egy emblémát, megállapítottuk hibájának típusát, ezután visszatettük a többi közé. Később megismételtük az előbbi eljárást még egyszer.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak méret hibás, vagy csak szín hibás emblémákat vettünk ki a dobozból? (*16 pont*)

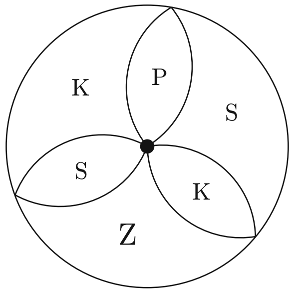
Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a piros (P), sárga (S), kék (K) és zöld (Z) jelöléseket a színek jelölésére.

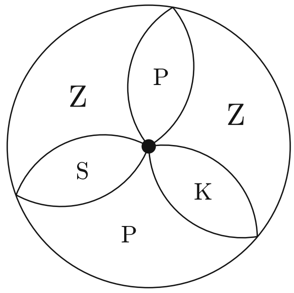
A „szirmok” színét négyféleképpen választhatjuk meg (PSK, PSZ, PKZ, SZK).

A továbbiakban a PSK színekkel foglalkozunk részletesen. A „háttér” színei között szerepelnie kell a zöldnek legalább egyszer, hogy mindegyik szín megjelenjen az emblémán.

Tegyük fel, hogy 1 zöld tartomány van a „háttéren”, és ez mondjuk a pirossal van szemben. Ekkor a „háttér” másik két tartománya már csak egyféleképpen színezhető ki, sárgával szemben S, kékkel szemben K, különben közös határvonallal rendelkező tartományok között lenne azonos színű. Tehát ha egy Z van a „háttér” színei között, akkor ez 3 esetet eredményez.

Legyen most két Z a „háttéren”, pl. a P két oldalán, ebben az esetben is 3-féle színezést kapunk, mert P-vel szemben csak P lehet.





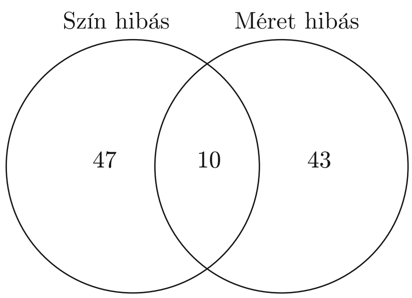
Ha 3 Z van a „háttérben”, akkor az csak egyféleképpen lehetséges. Így a „szirmok” egy adott színösszeállítása esetén összesen 7 „háttér” színezés alakítható ki a feltételeknek megfelelően.

Azonban a PSK „szirom” színezés az ellenkező körüljárás miatt kétféle lehet, ezeket a kör középpontja körüli elforgatással nem lehet fedésbe hozni, ezért kétszerezni kell az esetszámot, valamint ennek venni a négyszeresét, mert eddig csak a PSK-val foglalkoztunk.

A megoldás tehát: $7 \cdot 2 \cdot 4 = 56$.

Az embléma 56-féleképpen színezhető ki az összes feltételnek megfelelően.

b) A számokból látható, hogy 10 olyan embléma található a hibás példányok között, amelyeknek két hibája is van. A metszetből nem választhatunk egyet sem, és nem választhatunk úgy sem, hogy az egyiknek a másikétól eltérő hibája legyen. Tehát vagy mindkettőt a 43 elemet tartalmazó csak méret hibás halmazból, vagy pedig mindkettőt a 47 elemet tartalmazó csak szín hibás halmazból választhatjuk.



Az első esetben $\frac{43}{100} \cdot \frac{43}{100}$ valószínűséggel számolhatunk, mert az első választás valószínűsége $\frac{43}{100}$, továbbá a második választásnál is ugyanennyi a valószínűség (mert visszatettük az előzőleg kivett emblémát), és a két esemény független egymástól. Hasonlóképpen kapjuk a csak két szín hibás választás valószínűségét, ezért a megoldás:

$$P(A) = \left(\frac{43}{100}\right)^2 + \left(\frac{47}{100}\right)^2 = 0{,}4058.$$

Megjegyzés. A binomiális eloszlás helyes alkalmazásával is a fenti eredményt kapjuk.

8. *Egy osztály, ahol kétszer annyi a lány, mint a fiú, többnapos kirándulásra készül, amelynek programjában három fakultatív foglalkozás is szerepel, melyekre előzetesen lehetett jelentkezni. Mindenkinek legalább egy programon részt kellett vennie, de akár mindháromra is feliratkozhatott bárki.*

Az összesítés után megállapították, hogy a tanulók $\frac{4}{5}$*-e hajókirándulásra,* $\frac{7}{10}$*-e falumúzeumi látogatásra,* $\frac{3}{5}$*-e pedig kalandparki programra jelentkezett. Hárman jelölték meg mindegyik foglalkozást.*

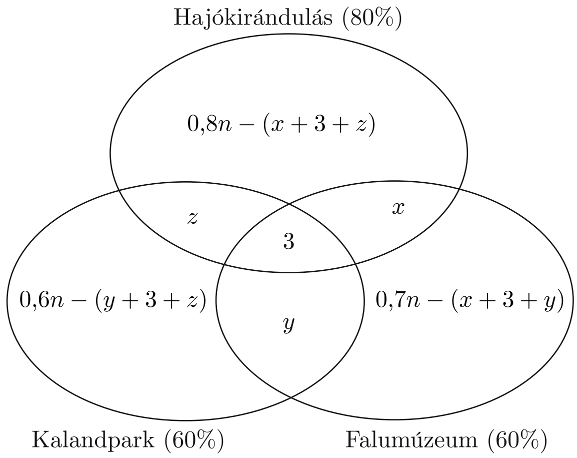
a) Ha az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mennyi a valószínűsége, hogy ő a hajókirándulásra is és a kalandparki programra is jelentkezett, a falumúzeumi látogatásra azonban nem?

Ebben az osztályban egyik alkalommal háromfős bizottságot választottak sorsolással úgy, hogy cetlikre írták az osztályba járó tanulók nevét, mindegyikre egyet-egyet, majd urnába helyezték a cédulákat. Ezután az urnából véletlenszerűen kivettek egy cédulát, a rajta levő nevet felírták a táblára, félretették a papírlapot, majd ezt a sorsolást megismételték még kétszer.

Jelölje $P(A)$ *annak valószínűségét, hogy a táblán legalább két lány,* $P(B)$ *pedig annak valószínűségét, hogy legalább egy fiú neve szerepel.*

b) Számítsuk ki $P(A)$ *és* $P(B)$ *értékét.* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Ábrázoljuk Venn-diagramon a tanulók programválasztását, jelöljük n-nel az osztály létszámát (az arányokat az ábrán %-kal jelöltük). ($n \in \mathbb{Z}^+$, $n \geqslant 3$ és $3 \mid n$, mert kétszer annyi a lány, mint a fiú.)



Mivel $\frac{7n}{10}$ pozitív egész szám, ezért n osztható 10-zel is a 3 mellett, így n egy 30-cal osztható pozitív egész szám. (Ismerve a szokásos létszámokat, n valószínűleg 30, de ez még nem biztos.)

Adjuk össze az egyes részhalmazokban levő elemek számát:

$$0{,}8n + \big[0{,}7n - (x+3+y)\big] + y + \big[0{,}6n - (y+3+z)\big] = n,$$

$$2{,}1n - x - y - z - 6 = n \;\Rightarrow\; 1{,}1n = x + y + z + 6.$$

Azok létszáma, akik csak a kalandparkot választották:

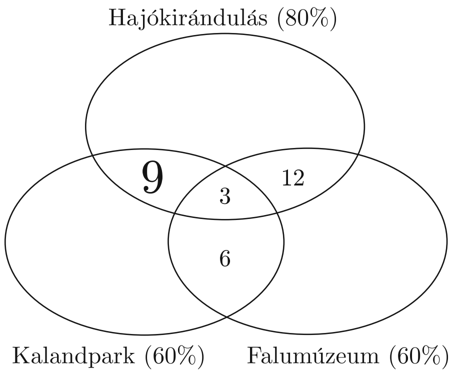
$$0{,}6n - (y+3+z) \geqslant 0 \;\Rightarrow\; 0{,}6n - 3 \geqslant y + z,$$

továbbá $y+z=1{,}1n-x-6$, ezért $0{,}6n-3\geqslant 1{,}1n-x-6$, innen $x\geqslant 0{,}5n-3$. Ugyanakkor $x\leqslant 0{,}4n$, mert x a kalandparkot nem választók (a tanulók 40%-a) egyik részhalmazának létszáma.

Ebből a két egyenlőtlenségből:

$$0{,}4n\geqslant x\geqslant 0{,}5n-3 \;\Rightarrow\; 0{,}4n\geqslant 0{,}5n-3 \;\Rightarrow\; 3\geqslant 0{,}1n \;\Rightarrow\; n\leqslant 30.$$

Ezzel megkaptuk az osztály létszámát: $n=30$.



Ezt felhasználva: $1{,}1\cdot 30=x+y+{}$ $+z+6$, $x+y+z=27$. Ebből az következik, hogy nem volt olyan személy, aki csak egy programot választott.

A falumúzeumba a tanulók 70%-a, azaz 21 fő jelentkezett, ezért $30-21=$ $=9$ fő volt az, aki a hajókiránduláson és a kalandparki programon részt vett, a falumúzeumi látogatáson azonban nem.

Az egyes részhalmazok elemszámai: $x=12$, $y=6$, $z=9$, tehát a keresett valószínűség: $\frac{9}{30}=\frac{3}{10}=0{,}3$.

b) A 30 fős osztályban 20 lány és 10 fiú van.

$$P(A)=\frac{\binom{20}{2}\binom{10}{1}+\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{190\cdot 10+1140}{4060}=\frac{3040}{4060}=\frac{152}{203}\approx 0{,}7488,$$

$$P(B)=\frac{\binom{10}{1}\binom{20}{2}+\binom{10}{2}\binom{20}{1}+\binom{10}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{10\cdot 190+45\cdot 20+120}{4060}=$$

$$=\frac{2920}{4060}=\frac{146}{203}\approx 0{,}7192.$$

Megjegyzés. $P(B)$-t könnyebben kiszámíthatjuk, ha a komplementer esemény valószínűségét határozzuk meg először:

$$P(\overline{B})=\frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}}=\frac{1140}{4060}\;\Rightarrow\; P(B)=1-\frac{1140}{4060}=\frac{2920}{4060}=\frac{146}{203}.$$

9. *A képen látható, a hagyományos futball labdához hasonlító testet* 12 *fekete szabályos ötszög, és alkalmas számú fehér szabályos hatszög határolja.*

Az ötszög oldalának hossza megegyezik a hatszög oldalának hosszával.

a) *Hány csúcsa, lapja és éle van a testnek?*

b) *Egy fehér hatszög területe hány %-kal nagyobb egy fekete ötszög területénél?*

c) Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a körülírt és beírt körök sugarának összege egyenlő a befogók számtani közepével. *(16 pont)*

Megoldás. *a*) A test összes csúcsa valamelyik ötszög csúcsa is egyben, illetve nincs olyan csúcsa a testnek, amelyik több ötszögnek is csúcsa lenne, ezért a testnek $12 \cdot 5 = 60$ csúcsa van. Mivel a test csúcsai egyúttal a hatszögeknek is csúcsai, mindegyik csúcs pontosan két hatszögnek csúcsa, így felírhatjuk a $\frac{6h}{2} = 60$ egyenletet, ahol h a hatszögek számát jelenti. Ebből $h = 20$, így a testnek $12 + 20 = 32$ lapja van.

Az élek számát az ötszögek és a hatszögek összes oldalai számának kettővel való osztásával kapjuk, mivel minden él két lapon mint oldal szerepel. Tehát az élek száma: $\frac{5\cdot 12+6\cdot 20}{2} = 90$. A testnek 90 éle van.

Az élek számát megkaphatjuk úgy is, hogy minden csúcsból 3 él indul, minden él két csúcsot köt össze, ezért az élek száma: $\frac{60\cdot 3}{2} = 90$. A testnek 60 csúcsa, 32 lapja és 90 éle van.

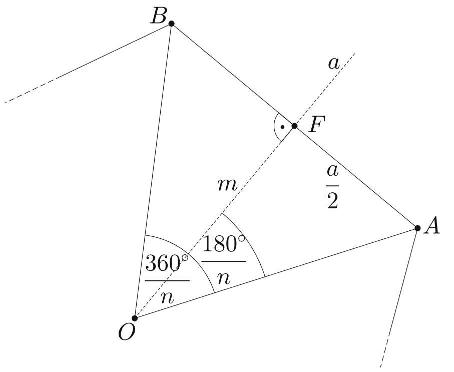
Megjegyzés. A kapott eredményekre teljesül az Euler-féle egyszerű poliéder tétel állítása: $e + 2 = l + c$.

b) Az a oldalú szabályos n-szög területe: $T(n) = n \cdot \frac{am}{2}$. Az OAF derékszögű háromszögben

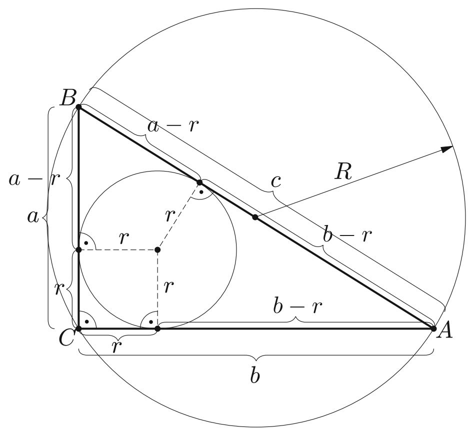
$$\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{m}, \quad \text{ahonnan} \quad m = \frac{a}{2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)},$$

így

$$T(n) = n \cdot \frac{a \cdot \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}}{2} = \frac{na^2}{4\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$



b)



c)

Legyen a hatszög területe T, az ötszögé t, ekkor

$$T=\frac{6a^2}{4\,\mathrm{tg}\,30^\circ}=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2},\quad t=\frac{5a^2}{4\,\mathrm{tg}\,36^\circ},$$

$$\frac{T}{t}=\frac{\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}}{\frac{5a^2}{4\,\mathrm{tg}\,36^\circ}}=\frac{12\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,36^\circ}{10}=\frac{6\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,36^\circ}{5}=1{,}51.$$

A fehér hatszög területe 51%-kal nagyobb az ötszög területénél.

c) I. megoldás. A beírt kör középpontja, a beírt körnek a befogókkal való érintési pontjai, valamint a háromszög derékszögénél levő csúcsa egy négyzetet alkotnak. A beírt körhöz az átmérő végpontjaiból húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt felírhatjuk, hogy $a-r+b-r=c$, amiből a beírt kör sugara: $r=\frac{a+b-c}{2}$.

Ismert, hogy a derékszögű háromszög köré írt körének átmérője $c=2R$ (Thalesz-tétel), azaz: $R=\frac{c}{2}$.

$$R+r=\frac{c}{2}+\frac{a+b-c}{2}=\frac{a+b}{2},$$

ezzel az állítást igazoltuk.

II. megoldás. Tudjuk, hogy $r=\frac{T}{s}$, ahol r a beírt kör sugara, T a háromszög területe, s a háromszög félkerülete.

A derékszögű háromszög területe: $T=\frac{ab}{2}$, ahol a, b a két befogó, így a beírt kör sugara:

$$r=\frac{\frac{ab}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{ab}{a+b+c}.$$

Bizonyítandó:

$$R+r=\frac{a+b}{2}.$$

$$\frac{c}{2}+\frac{ab}{a+b+c}=\frac{a+b}{2}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalt $2(a+b+c)$-vel, ekkor

$$c(a+b+c)+2ab=(a+b)(a+b+c)$$

adódik. Zárójel bontás után:

$$ac+bc+c^2+2ab=a^2+ab+ab+b^2+ac+bc\ \Leftrightarrow\ c^2=a^2+b^2.$$

Ekvivalens lépéseken keresztül eljutottunk a Pitagorasz-tételhez, ezért a kiinduló állítás is igaz.

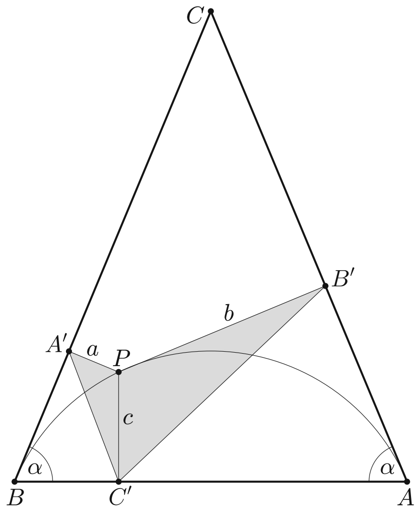
Németh László
Fonyód

Matematika feladat megoldása

B. 5032. *Mi a mértani helye egy egyenlő szárú háromszög belsejében azoknak a pontoknak, amelyeknek a száraktól mért távolságaik mértani közepe az alaptól mért távolsággal egyenlő?*

(*4 pont*)

Megoldás. Jelölje a P pont háromszög oldalaitól mért távolságát a, b és c az *ábra* szerint. A feltétel szerint $\sqrt{ab}=c$, amiből $ab=c^2$, majd $\frac{a}{c}=\frac{c}{b}$ következik.



$AB'PC'$ húrnégyszög, mivel B'-nél és C'-nél lévő szögei derékszögek, ezért összegük 180°. Így

$$B'PC'\sphericalangle=180^\circ-\alpha.$$

Hasonló okból húrnégyszög a $BC'PA'$ négyszög is, amiből pedig $C'PA'\sphericalangle=180^\circ-\alpha$ következik.

Vagyis $C'PA\triangle\sim B'PC\triangle$, hiszen két szomszédos oldaluk aránya és az általuk közrezárt szög megegyezik. Ekkor $PA'C'\sphericalangle=PC'B'\sphericalangle$ is teljesül.

A kerületi szögek tétele miatt

$$PA'C'\sphericalangle=PBC'\sphericalangle,\quad \text{illetve}\quad PB'C'\sphericalangle=PAC'\sphericalangle.$$

Továbbá az előző hasonlóság miatt ennek a két szögnek az összege

$$180^\circ-B'PC'\sphericalangle=180^\circ-(180^\circ-\alpha)=\alpha.$$

Tehát $PBA\sphericalangle+PAB\sphericalangle=\alpha$. Mivel egy háromszög belső szögeinek összege 180°, így ebből $BPA\sphericalangle=180^\circ-\alpha$ következik, vagyis P rajta van az AB szakasz C felé eső $180^\circ-\alpha$ szögű látókörívén.

A gondolatmenet működik visszafelé is: ha P a látókörív egy belső pontja, akkor $PBA\sphericalangle+PAB\sphericalangle=\alpha$. Mivel $AB'PC'$ és $BC'PA'$ húrnégyszögek, így ebből a kerületi szögek tétele miatt $PA'C'\sphericalangle+PB'C'\sphericalangle=\alpha$ következik. A két húrnégyszögből

$$C'PB'\sphericalangle=C'PA'\sphericalangle=180^\circ-\alpha$$

és így

$$PC'B'\sphericalangle+PB'C'\sphericalangle=PA'C'\sphericalangle+PC'A'\sphericalangle=\alpha$$

is következik. Tehát $PC'B'\sphericalangle = PA'C'\sphericalangle(= \alpha - PB'C'\sphericalangle)$ és így

$$C'PA'\triangle \sim B'PC'\triangle,$$

mert szögeik páronként megegyeznek. Ebből következik, hogy a megfelelő oldalak aránya egyenlő, azaz $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$, amiből már látható, hogy $\sqrt{ab} = c$ is teljesül.

Vagyis a keresett mértani hely az AB szakasz $180° - \alpha$ szögű látókörívének a háromszög belsejébe eső része, ahol α a háromszög alapokon fekvő szögét jelöli.

Győrffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

33 dolgozat érkezett. 4 pontos 24, 3 pontos 3, 2 pontos 1, 1 pontos 4, 0 pontos 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (699–703.)

K. 699. Van hat korongunk, az egyik oldalukon betűjelek vannak (A, B, C, D, E, F), a másik oldalukon számok (valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6). A korongok úgy vannak letéve az asztalra, hogy a betűs oldalát látjuk. Tudjuk viszont, hogy az A, B és C jelű korongokon lévő számok összege 14, az A, D és E jelű korongokon lévő számok összege pedig 12. Legalább hány korongot kell megfordítanunk ahhoz, hogy megtudjuk, melyik betűjelű korongon melyik szám áll?

K. 700. Van tíz számkártyánk, melyeken az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 és 10 számok állnak. A kártyákat egymás mellé tesszük az asztalra és hármasával összeadjuk a rajtuk álló számokat: először az 1., 2., 3.; majd a 2., 3., 4.; a 3., 4., 5.; és így tovább; végül a 8., 9., 10. kártyákon lévőket. Így rendre az alábbi összegeket kapjuk: 14, 18, 24, 23, 24, 21, 16, 12. Mennyi az első és az utolsó kártyára írt számok összege?

K. 701. Egy bolha ül a számegyenesen a 0 számon és ugrani készül. A bolha minden ugrásánál jobbra vagy balra ugrik 3-at vagy 5-öt. A bolha célja, hogy 1-től 20-ig eljusson minden egész számra. Adjunk meg egy legfeljebb 22 ugrásból álló ugrássorozatot, amellyel ezt a célját el tudja érni.

K/C. 702. Öt nem figurás lapot húztunk egy pakli 52 lapos franciakártyából. Tudjuk, hogy mind a négy színből van köztük legalább egy. A kártyák értékét jelző páros számok összege ugyanannyi, mint a páratlanoké. Továbbá a pikkek összege 14, a pirosak összege 10, a legkisebb kártya pedig kőr. Melyik lapokat húztuk?

K/C. 703. Egy pozitív tizedestörtben a tizedesvesszőt 4-gyel jobbra tolva egy olyan számot kapunk, ami az eredeti szám reciprokának négyszerese. Mi az eredeti szám?

Beküldési határidő: 2021. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (702–703., 1684–1688.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 702. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 703. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1684. Igazoljuk, hogy nincs olyan ötszög, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú és van két $60°$-os szöge.

C. 1685. Egy királyi család nyolc gyermeke közül a legidősebb uralkodik. A testvérek mindegyike pontosan akkor uralkodik, amikor ő a legidősebb még élő személy közülük. Viszont ezen a királyi családon átok ül: ha három testvér, kik korban egymást követik, mind trónra kerülnek, akkor a rákövetkező testvérük meghal reménytelenségében. Hányféleképpen uralkodhatnak, ha csak arra vagyunk tekintettel, hogy kik kerülnek trónra a testvérek közül?

C. 1686. Az ABC derékszögű háromszög átfogója az AB szakasz. Az A csúcsból kiinduló f belső szögfelező a BC oldalt a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az $AB-BD$ és $AC+CD$ szakaszok hosszának mértani közepe éppen az $f=AD$ szögfelező hossza.

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1687. Egy bevásárlószatyorban találtunk három bevásárló listát. Az első listán 23 zsömle, 13 alma és 15 tojás szerepelt, a másodikon 9 zsömle, 3 alma és 28 tojás, a harmadikon pedig 25 zsömle, 18 alma és 11 tojás. Az első listán lévő árukért 2021 forintot fizettünk, a másik két bevásárlásért pedig 2031, illetve 2041 forintot, de nem tudjuk, melyik összeg melyik vásárláshoz tartozik. Minden termék darabára pozitív egész szám. Mi mennyibe került?

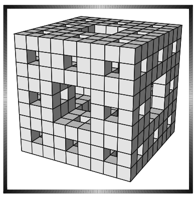
Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

C. 1688. Hány eleme lehet annak az adathalmaznak, melynek egyetlen módusza a 2, mediánja 3, átlaga 4, terjedelme pedig 5?

❄

Beküldési határidő: 2021. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5190–5197.)

B. 5190. Egy n sorból és k oszlopból álló táblázat mindegyik mezőjébe -1 van írva. Egy lépésben egy sort és egy oszlopot kijelölünk és előbb a kijelölt sor, majd a kijelölt oszlop mindegyik számát az ellentettjére változtatjuk.

Mely n és k esetén érhető el, hogy mindegyik mezőben 1-esek legyenek?

(*3 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5191. Van egy derékszögű favonalzónk, amelynek az átfogóját megrágta a nyúl. A vonalzó segítségével össze tudunk kötni közeli pontokat, az egyes szakaszokat meg tudjuk hosszabbítani, és az egyenesekre bármelyik pontjukban merőlegest tudunk állítani. Meg tudjuk-e szerkeszteni egy tetszőlegesen nagy kör középpontját?

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)

B. 5192. Nyolc gyerek elhatározta, hogy az őszi szünet első hét napján egy-egy focimeccset játszanak, négy a négy ellen. Meg tudják-e úgy szervezni a meccseket, hogy bármelyik három gyerek legalább egyszer ugyanabban a csapatban játsszon?

(*5 pont*) *Gáspár Merse Előd* (Budapest) ötletéből

B. 5193. Az ABC hegyesszögű háromszögben $BCA\sphericalangle = 45°$, a magasságok talppontjai a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, a háromszög magasságpontja M. Tudjuk, hogy az F pont az AB szakaszt $AF : FB = 2 : 3$ arányban osztja. Az AC oldalon megjelöljük azt a G pontot, amelyre $CG = BM$. Mutassuk meg, hogy az ABG háromszög súlypontja M.

(*4 pont*)

B. 5194. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = 2CAB\sphericalangle$. Az AB oldal a beírt kört az E pontban érinti, a C-ből induló szögfelezőt az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AF = 2BE$.

(*4 pont*)

B. 5195. Mutassuk meg, hogy minden $(x;y)$ pozitív valós számokból álló számpár és minden $0<p<1$ valós szám esetén fennáll az $x^p\cdot y^{1-p}<x+y$ egyenlőtlenség.

(*3 pont*)

B. 5196. Legyen $p(x)=2x+1$. Az A az $S=\{1,2,\ldots,2021\}$ halmaz olyan részhalmaza, mely minden n-re az n, $p(n)$, $p\big(p(n)\big)$ számok közül legfeljebb egyet tartalmaz, de újabb S-beli elem hozzávétele esetén már nem teljesül ez a feltétel. Hány elemű lehet az A halmaz?

(*6 pont*)

B. 5197. Jelölje $\mathbb{N}$ a nemnegatív egész számok halmazát, és legyen k adott pozitív egész. Van-e olyan monoton növő $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre

$$f\big(f(x)\big)=f(x)+x+k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

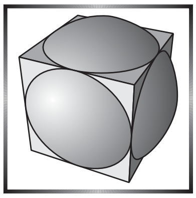
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2021. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (806–808.)



A. 806. Adott a síkon négy különböző egyenes, melyek nem mennek át egy ponton, és nincs köztük három párhuzamos. Bizonyítandó, hogy a síkon lehet találni négy pontot, A-t, B-t, C-t és D-t, melyekre teljesülnek a következők:

(*i*) A, B, C és D ebben a sorrendben egy egyenesre esnek,

(*ii*) $AB=BC=CD$,

(*iii*) a négy adott egyenes alkalmas sorrendje mellett A az első, B a második, C a harmadik és D a negyedik egyenesre esik.

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

A. 807. Adott egy $n\geqslant 2$ egész szám. Legyen G egy véges egyszerű gráf, melynek minden élén legfeljebb n kör halad át. Bizonyítandó, hogy a gráf kromatikus száma legfeljebb $n+1$.

Javasolta: *Schweitzer Ádám* (Budapest)

A. 808. Keressük meg az összes páronként relatív prím a, b, c pozitív egészt, melyekre

$$a^2+3b^2c^2=7^c.$$

Javasolta: *Nikolai Beluhov* (Bulgária)

Beküldési határidő: 2021. november 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

„Titkos üzenet száll a széllel" I.*

Előzmények dióhéjban

Amióta ember él a Földön, akadtak olyanok, akiknek voltak titkaik. Ezeket persze csak egy vagy néhány emberrel szerették volna megosztani. A titoktartás akkor kezdett nehézkessé válni, amikor az a bizonyos másik messze volt, üzenni kellett neki. Hamar rájöttek, hogy az üzenet elrejtése nehézkes, mert ha valaki megtalálja az üzenetet, vége a titoknak. Az üzenet értelmét kellett elrejteni. hogy fellelése esetén ne lehessen kihámozni a tartalmát. (Ma már tudjuk, hogy inkább arra kell törekedni, hogy ne legyen érdemes a titkosított tartalmat visszaalakítani, hiszen a megoldási technikák idő- és erőforrásigénye miatt talán a megfejtés időpontjára az üzenet elavul, vagy a megfejtés többe kerül, mint amekkora hasznot az üzenet hozhat.)

Első lépésként a nyelvi rendszertől kell megszabadulni, vagyis a kis- és nagybetűk megkülönböztetésétől, a szóközöktől és az írásjelektől. Az üzenet olvashatóságát ezek alig rontják, viszont a megfejtőnek sokat segítenének.

A kialakuló titkosítási módszereket két nagy csoportba sorolhatjuk:

- Az üzenet eredeti karaktereit megtartjuk, csak valamilyen szabályszerűség szerint megváltoztatjuk a sorrendjüket, ez az úgynevezett *keverő módszer.*
- Az üzenet eredeti karaktersorrendjét megtartjuk, csak az egyes karaktereket cseréljük le egy szabálynak megfelelően, ezt nevezzük *cserélő módszernek.*

A mai számítógépek kapacitása mellett a keverő módszernek nem sok értelme van, a gép pillanatok alatt végigpróbálhat néhány tízezer keverési lehetőséget. Az értelmes keverési módok száma nagyságrendileg ebbe a tartományba esik.

A legegyszerűbb cserélő technikák már Julius Caesar korában is elavultnak voltak mondhatók, hiszen arab tudósok már időszámításunk kezdete előtt rájöttek az így titkosított – úgynevezett *monoalfabetikus* módszer – megfejtésére.

A titkosítási módszer hiányában is lehetséges volt az így titkosított üzenet megfejtése. A visszafejtésre azért volt lehetőség, mert a nagybetűs írással, a szóközök

*A cím a TNT együttes *Titkos üzenet* című dalának szövegét idézi.

és írásjelek törlésével sem sikerül teljesen megszabadulnunk a nyelvi rendszertől. Az egyes nyelvek szavai ugyanis nem véletlen számú, véletlenszerűen kiválasztott betű véletlen sorrendben egymás mögé írásával keletkeznek. Például szinte minden szóban illik lennie legalább egy magánhangzónak, sőt hosszabb szót nehézkes is kimondani egy magánhangzóval (a magyar nyelvből talán a *brrr* hangutánzó szót lehet felhozni ellenpéldának [bár biztos van olyan nyelvész, aki élénken tiltakozna a brrr szónak minősítésén], de a fagylalt cseh verziója, a *zmrzlina*, vagy a Csorba tó szlovák neve *Štrbské pleso* is szinte kimondhatatlan.)

Minden nyelvre jellemző, hogy eltérő gyakorisággal használja az egyes betűket, azok gyakorisági sorrendje jellemző az adott nyelvre. A hosszabb – egy-két oldalas – üzenetben az egyes kódok előfordulásait megszámolva, és ezeket összehasonlítva a nyolc-tíz leggyakoribb betűt helyettesítő kód megfejthető. Ezek visszaállításával olyan szórészletek keletkeznek, amelyekből a nyelv ismeretében a többi kód is kideríthető és az üzenet elolvasható.

A monoalfabetikus módszert tehát az tette megfejthetővé, hogy a szöveg adott betűjéből mindig ugyanaz a titkos betű (kód) lett, és a nyelvek az egyes betűket más-más gyakorisággal használják, így egy rejtjelezett szövegnél a szóba jöhető titkosítási módok száma a milliós nagyságrendbe esik. A fennmaradó kódok és betűk párosítása és a szöveg elejének összevetése az adott nyelv szótárával a mai számítógépeknek nem okoz gondot. Ráadásul, ha a titkos üzenet betűgyakoriságai megegyeznek a valódi betűgyakorisággal, akkor azonnal tudjuk, hogy azt keverő módszerrel titkosították. Minket éppen ezért a betűgyakoriság-elemzést hiábavaló próbálkozássá tevő *polialfabetikus* titkosítási módok érdekelnek.

A Bellaso kifejlesztette Vigenère-kódolás pont egy ilyen titkosírás. A fentiek alapján érthető, miért kellett Napóleonnak egy új, biztonságosabb titkosítási mód – a főként hadműveletekkel kapcsolatos – üzenetei megóvására.

Vigenère-kódolás

A technika története tele van tévedésekkel. A Napóleon által használt, akkor modernnek számító titkosítási módszert *Blaise de Vigenère* találmányának tartják, holott a módszert 1553-ban már publikálta *Giovan Battista Bellaso* egy művében. Vigenère csak továbbfejlesztette. Igazán nem szép a történelemtől, hogy az igazi megalkotót a névtelenség homálya rejti, míg a továbbfejlesztő neve válik ismertté, gondoljunk csak *Amerigo Vespucci* és *Kolumbusz Kristóf* esetére vagy a *Thomas Savery* és *Thomas Newcomen* által tervezett gőzgépre, amelynek szabadalmát végül 1769-ben *James Watt* kapta meg, netán a jól ismert *Bolyai–Lobacsevszkíj* elsőségi vitára a hiperbolikus geometria kapcsán.

Ennyi bevezető után ideje rátérnünk a módszer ismertetésére.

A kódolási módszer

A módszer megértéséhez három dologra lesz szükségünk:

- A nyelvi rendszerétől megfosztott, úgynevezett *nyers* üzenetre,
- a kódoláshoz szükséges *kulcsra,* ami egy hosszabb-rövidebb szövegdarab,
- és a Vigenère-táblára, ami egy betűtáblázat.

Lássunk is egyből egy példát, azon egyszerűbb megérteni.

- A nyers szöveg legyen a címben is szereplő dalszövegrészlet (Titkos üzenet száll a széllel) nyelvi rendszerétől megfosztott változata:

  TITKOSÜZENETSZÁLLASZÉLLEL.
- A kulcs vagy *sifré* szerepére a KÖMALINFORMATIKA jelsorozatnál mi sem lehetne kézenfekvőbb.

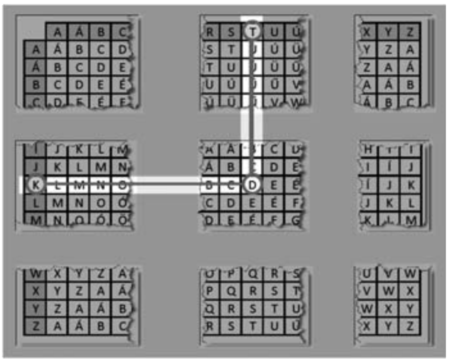
Írjuk le a nyers szöveget, fölé pedig betűnként a kulcsot; ha hamarabb elfogynának a kulcs betűi, mint a nyers szövegé, ismételgessük a kulcsot, amíg szükséges.

kulcs:	K	Ö	M	A	L	I	N	F	O	R	M	A	T	I	K	A	K	Ö	M	A	L	I	N	F	O
nyers:	T	I	T	K	O	S	Ü	Z	E	N	E	T	S	Z	Á	L	L	A	S	Z	É	L	L	E	L

Végül lássuk a Vigenère-táblát:

	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z
A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A
Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á
B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B
C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C
D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D
E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E
É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É
F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F
G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G
H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H
I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I
Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í
J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J
K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K
L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L
M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M
N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N
O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O
Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó
Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö
Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő
P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P
Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q
R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R
S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S
T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T
U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U
Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú
Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü
Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű
V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V
W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W
X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X
Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y
Z	A	Á	B	C	D	E	É	F	G	H	I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z

A felső sorba és az első oszlopba az egybetűs ábécé kerül. A táblázatba soronként egy-egy betűvel eltolva ismétlődik a fenti ábécé, ha annak a végére érünk, folytatjuk az ábécé újrakezdésével.



A titkosításra előkészített sorok egymás alatti betűpárjaiból indulunk ki: a kulcs megfelelő betűjét a bal szélen, a nyers szöveg betűjét pedig felül keressük meg, és az adott sor és oszlop találkozásánál lévő betű lesz a nyers szöveg adott betűjének titkosított párja.

A mi példánknál elsőként a K szerint titkosítjuk a T-t, az ábra mutatja, hogy a titkos karakter a D lesz. Írjuk ezt a betűt a betűpár alá.

Hajtsuk végre a műveletet az összes betűre.

kulcs:	K	Ö	M	A	L	I	N	F	O	R	M	A	T	I	K	A	K	Ö	M	A	L	I	N	F	O
nyers:	T	I	T	K	O	S	Ü	Z	E	N	E	T	S	Z	Á	L	L	A	S	Z	É	L	L	E	L
titkos:	D	V	É	L	X	A	I	F	R	E	P	U	M	I	M	M	Ü	Ő	E	A	P	T	W	K	X

Figyeljük meg, hogy ennél a kódolási módszernél tényleg kútba esik a betűgyakoriságon alapuló megfejtés, hiszen a nyers szöveg 1., 3. és 12. betűje is T, de a titkos párjuk D, É és U lesz, valamint a titkos szöveg M betűit a nyers szöveg S, Á és L betűjéből kapjuk.

A visszafejtés

Ez valóban egyszerű. A fenti példát nézve a következőt kell tenni: írjuk fel a kulcsot és a titkos üzentet, ugyanúgy, mint az előbb a kulcsot és a nyers szöveget. Először a kulcs K sorában kell a táblában megkeresnünk a D betűt, majd ennek az oszlopnak a tetején levő betűt, ami nálunk T, beírjuk alájuk és lépünk tovább a következőre. Az Ö sorában megkeressük a V betűt, majd az oszlop tetején látható I betűt rögzítjük és így tovább.

kulcs:	K	Ö	M	A	L	I	N	F	…
titkos:	D	V	É	L	X	A	I	F	…
visszafejtett:	T	I	T	K	O	S	Ü	Z	…

Mindebből látható, hogy a kulcs birtokában nem nagyobb munka a visszafejtés, mint a titkosítás. Arról, hogy megfejthető-e az ilyen kód a kulcs hiányában, a cikk következő részében olvashattok. De addig is érdemes nekilátni a cikkhez tartozó, ebben a számban megjelenő feladatnak. Megemlítendő, hogy a 2005. október 27-ei emelt szintű informatika érettségi programozás feladata is ezzel a témakörrel foglalkozott.

Tóth Tamás

Informatikából kitűzött feladatok

I. 544. Óvodások névre szóló dobozokban üveggolyókat kapnak ajándékba, mindannyian azonos számút. Sajnos szállítás közben a golyók kipotyogtak a dobozokból, de nem vesztek el. Átadás előtt a dobozokat egy sorba helyezték el és számolgatás nélkül, találomra a dobozokba tették a golyókat. Az óvónő igazságos szeretett volna lenni, és miután a golyók száma biztosan a gyerekek számának többszöröse, átrendezte a golyókat úgy, hogy mindegyik dobozban azonos számú golyó legyen. Ezt úgy végezte el, hogy csak szomszédos dobozok között helyezett át golyókat, ha szükséges volt.

Készítsünk programot `i554` néven, amely megadja, hogy minimum hány áthelyezést kellett az óvónőnek elvégeznie.

A program *standard bemenetének* első sorában a dobozok N $(2 \leqslant N \leqslant 1000)$ száma van. A következő sorban az N dobozban lévő golyók száma szerepel $(1 \leqslant \mathrm{DB}_i \leqslant 1000)$. A golyók számának összege osztható N-nel.

A program *standard kimenetén* a mozgatások számának minimuma szerepeljen.

Bemenet:	**Kimenet**
`6` `7 5 6 8 5 5`	`3`

Beküldendő egy tömörített `i554.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 545. A feladat a lapban megjelent *„Titkos üzenet, száll a széllel”* című cikk elolvasása után érthető és oldható meg.

Hozzuk létre a `vigenere` munkafüzetet. A munkalap új neve legyen **Tábla**. Állítsuk be az oszlopok szélességét úgy, hogy a cellák nagyjából négyzet alakúak legyenek. Hozzuk létre a **Titkosítás** és **Dekódolás** munkalapokat és állítsuk a cellákat itt is nagyjából négyzet alakúra.

A C2:AK2 tartományba gépeljük be a magyar egybetűs ábécét, ezen alapadatokat felhasználva, csupán másolással és képletekkel hozzuk létre a Vigenère-táblát, alkalmazzunk a minta szerinti színezést és keretezést. Hajtsuk végre a mintákról leolvasható formázásokat.

A **Titkosítás** munkalapra egy maximum 20 karakteres kulcsot és legfeljebb 10 darab 0-100 karakteres nyers szöveget lehessen bevinni. Ezek bevitele után jelenjen meg a megfelelő helyen a nyers szöveg Vigenère-kódolt változata. Minden sort külön üzenetként kezeljen a munkafüzet. A kódolt változat ne jelenjen meg, amíg valamelyik adat nem megfelelő hosszú ($0 <$ kulcshossz < 21 és $0 \leqslant$ sorhosszak < 101).

Ha valamelyik feltétel nem teljesül, arról a minták szerinti hibaüzenetek tájékoztassanak.

A **Dekódolás** munkalap működjön hasonlóan, csak erre a kódolt szövegsorokat lehessen beírni és a visszafejtett szöveget megkapni.

A két új munkalapon a 30. sor alatt végezhetünk segédszámításokat. A kész Vigenère-táblát átmásolhatjuk mindkettőre. A megoldáshoz makró vagy más program nem használható, csak a táblázatkezelő beépített függvényei.

A feladatban szereplő munkafüzetekről mintakép a honlapon, a feladatnál látható.

Beküldendő egy `i555.zip` tömörített állományban a forrásprogram és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program milyen táblázatkezelő program melyik verziójában készült és egy néhány soros magyarázat arról, miként készült a Vigenère-tábla a **Tábla** munkalapon.

I. 546 (É). Az Intel Atom processzorokkal kapcsolatban szeretnénk néhány kérdésre választ kapni. A kérdések megválaszolásához több alkalmazást kell használnunk. Először egy böngészőre lesz szükségünk:

1. Az `intel.com` oldalon az Atom processzorok specifikációjáról szóló oldalról töltsünk le adatokat! Keressük fel a következő oldalt:

   `https://ark.intel.com/content/www/us/en/ark/products/series/29035/intel-atom-processor.html`
2. Jelöljük be az összes processzort (Compare – All), majd válasszuk az összehasonlításukat (Compare). A megjelenő oldalon kérjük az összehasonlítás eredményének letöltését (Export comparison), majd mentsük le és nyissuk meg a letöltött táblázatot.
3. Az adatokat tartalmazó táblázatot mentsük intelatom néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
4. A letöltött adatok munkalapján minden adatot jelöljünk ki, majd nyissunk egy új munkalapot database néven. Illesszük be ide az adatokat transzponálva – tehát úgy, hogy az oszlopok és sorok felcserélődjenek.
5. Nézzük át az adatokat, állítsunk be megfelelő oszlopszélességeket, töröljük a teljesen üres oszlopokat a táblázatból, valamint az első oszlopban lévő teljes nevet, mivel az megadható más oszlopok adataiból.
6. Töröljük az Intel, valamint az Atom® szövegrészeket a teljes munkalapról, ahol utána szóköz következik, ott azt is.
7. Az adatoszlopok értelmezése mellett, fordítsuk magyarra a táblázat fejlécét a mintának megfelelően.
8. Cseréljük a számot tartalmazó oszlopokban a tizedespontokat vesszőre.
9. Töröljük a számok mellől a mértékegységeket és a felesleges szóközöket a Csíkszélesség, az Ajánlott ár, a Frekvencia, a TDP, és a Tranzisztorok száma oszlopokban. A Frekvencia oszlopban a MHz értékeket váltsuk GHz értékekre.

10. Rendezzük az adatokat a Sorozat, azon belül a Kódjel oszlop szerint növekvő sorrendbe.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Sorozat	Típus	Kódjel	Állapot	Kiadás	Csíkszélesség	Ajánlott ár	Magok száma	Szálak száma	Frekvencia	TDP	Foglalat	Méret	Tranzisztorok száma
2	Legacy Processors	Desktop	230	Discontinued	Q2'08	45						PBGA437	22 x 22	47
3	Legacy Processors	Desktop	330	Discontinued	Q3'08	45						PBGA437	22 x 22	94
4	Legacy Processors	Desktop	D410	Discontinued	Q1'10	45	43	1	2	1,66	10	FCBGA559	22 x 22	123
5	Legacy Processors	Desktop	D425	Discontinued	Q2'10	45	42	1	2	1,8	10	FCBGA559	22 x 22	123
6	Legacy Processors	Desktop	D510	Discontinued	Q1'10	45	63	2	4	1,66	13	FCBGA559	22 x 22	176
7	Legacy Processors	Desktop	D525	Discontinued	Q2'10	45	63	2	4	1,8	13	FCBGA559	22 x 22	176

11. Mentsük a táblázatot, majd egy adatbázis-kezelő alkalmazással hozzunk létre egy üres adatbázist `intelatom` néven, és importáljuk a táblázatból az adatokat.
12. Az importált adatokat tartalmazó tábla neve atom legyen, a típusokat értelemszerűen állítsuk be, és adjunk hozzá automatikus értékekkel (számláló) elsődleges kulcsot.

Készítsünk lekérdezéseket az alábbi kérdések megválaszolására. A lekérdezéseket a zárójelben lévő néven mentsük el.

13. Melyek azok az Atom processzorok (Sorozat és Kódjel), és hány processzormaggal készültek (Magok száma), amelyeket mobil gépekbe szántak és 2014 második félévében adtak ki? (`13obil14`)
14. Melyek azok az Atom processzorok (Sorozat, Kódjel, Frekvencia), amelyek a legnagyobb frekvenciával dolgoznak a 22 nanométeres csíkszélességgel készült Atom processzorok közül? (`14maxf22`)
15. Melyik foglalattípushoz hány processzor készült, és mennyi azok legkisebb és legnagyobb fogyasztása? Csak azokkal a processzorokkal dolgozzunk, ahol a Foglalat és a TDP mező nem üres. (`15foglalatok`)
16. Adjuk meg a különböző csíkszélességű processzorok átlagos fogyasztását a fogyasztás szerint csökkenő sorrendben. (`16fogyaszt`)
17. Készítsünk listát a C sorozat szerverprocesszorairól a Magok száma és a Szálak száma szerint csökkenő sorrendben. A listában szerepeljen a Kódjel, a Frekvencia, az Ajánlott ár, valamint a processzormagok és szálak száma. (`17csorozat`)

Beküldendő egy `i556.zip` tömörített állományban a megoldásként kapott munkafüzet és adatbázis, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a két állomány melyik táblázatkezelő és adatbázis-kezelő program melyik verziójában készült.

I/S. 56. Adott egy N elemű T tömb, amelynek az i-edik elemét $T[i]$-vel jelöljük ($1 \leqslant i \leqslant N$). Adjuk meg, hogy hány olyan (i, j) pár van, ahol $1 \leqslant i < j \leqslant N$, $T[i] > T[j]$, valamint $T[j] - T[i]$ és $j - i$ egyaránt páros számok.

A bemenet első sorában az N szám található. A következő sorban N szám található: a T tömb elemei.

A kimenet egyetlen sorában adjuk meg, hogy hány olyan (i, j) számpár van, amely a feltételeknek eleget tesz.

Bemenet	Kimenet
`4` `4 3 2 2`	`1`

Az $i=1$, $j=3$ indexű elemekből áll az egyetlen megfelelő pár.

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$, $-10^9 \leqslant T[i] \leqslant 10^9$. Időlimit: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 100$.

Beküldendő egy `is56.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 155. Egy titkosszolgálat tagjai laza kapcsolatban állnak egymással. Ha egy tag megkap egy titkos információt, azt csak a bizalmasainak adja tovább, kivéve annak, akitől a hírt kapta. Így előfordulhat, hogy egy hír olyan ügynökhöz kerül, aki már hallotta azt. Ezt mindenképp el szeretnék kerülni.

A szolgálat tagjait pozitív egész számok jelölik. A titkosszolgálat vezetője minden tagtól bekérte, hogy kik a bizalmasai. A kapott információkat mappákban helyezte el, így mindegyik nappában egy-egy számpár szerepelt: két olyan ügynök sorszáma, akik kölcsönösen bíznak egymásban.

A titkosszolgálat vezetője sorba állította a mappákat, és a hírek továbbítására a következő stratégiát gondolta ki: minden hír esetén kiválaszt egy i és egy j számot, majd a hír továbbításánál csak azokat a k sorszámú mappákat tartja meg, melyekre $i \leqslant k \leqslant j$. A hírt a kiválasztott mappákban szereplő egyik személlyel közli. Ezután mindenki csak olyan ügynöknek adhatja tovább a hírt, akivel a közös mappájuk a kiválasztottak között szerepel. Adjuk meg, hányféleképpen választhatja ki az i és j számokat úgy, hogy a megtartott mappákban szereplő bármely ügynöktől indulva a hír nem jut el kétszer egyik ügynökhöz sem.

Bemenet: az első sor tartalmazza az ügynökök N, és a kapcsolatok M számát. A következő M sor mindegyike egy bizalmi kapcsolatot ír le, abban a sorrendben, ahogy a vezető rendezte.

Kimenet: a kimenet első és egyetlen sorába a megfelelő (i,j) párok számát kell írni. (Két pár akkor különböző, ha legalább az egyik tagja különböző.)

Minta:

Bemenet (a / jel sortörést jelent)	**Kimenet**
`4 5 / 1 3 / 3 2 / 2 1 / 1 4 / 4 2`	`10`

Magyarázat: a lehetséges (i,j) párok: $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$, $(2,3)$, $(2,4)$, $(3,3)$, $(3,4)$, $(4,4)$, $(4,5)$, $(5,5)$.

Korlátok: $3 \leqslant N, M \leqslant 10\,000$. Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N, M \leqslant 100$.

Megjegyzés: egy-egy hírt nem feltétlenül kap meg minden ügynök.

Beküldendő egy `s155.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. november 15.

❄

Nyári matematika- és fizikatábor 2021. Dombóvár

2021. június utolsó hetében összesen 39 középiskolás diák gyűlt össze a Dombóvár-Gunaras Hotel Európában és Apartmanparkban. A társaság egyik fele matematikával, a másik fizikával foglalkozott, a szabadidőt pedig közösen töltötték. A tábort a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapokat kiadó MATFUND Alapítvány szervezte.

A tábor a Nemzeti Tehetség Program keretében az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatásával valósult meg (NTP-TÁB-20-0042 **„KöMaL nyári matematika és fizika tehetséggondozó tábora”**).

A szervezők

Matematika olimpiai edzőtábor Dombóváron

Mivel idén sem rendeztek szóbeli érettségiket, továbbá a komoly oltási kampánynak köszönhetően lépcsőzetes enyhítések jöttek, így június végén sor kerülhetett Dombóváron az olimpiai edzőtáborra. Ez szakmailag és szociálisan is nagyon jó programnak bizonyult. Nagy elismerés és köszönet a tábor finanszírozását biztosító pályázat megírásáért, a gondos szervezésért *Salamon Máriának,* aki a KöMaL és a MATFUND Alapítvány részéről mindent kézben tartott. A tábor lassan hagyományossá váló módon párhuzamosan zajlott a fizikusok programjával, egyik este *Honyek Gyula* tanár úr és kedves felesége tartottak színes, izgalmas kísérleti bemutatót az összes táborozónak. A matekosok szakmai programját délelőttönként *Kiss Géza* és *Dobos Sándor* tanárok irányították, a délutáni programot *Kovács Benedek* és *Imolay András* egyetemisták vezették. A táborba a fent említett két csapaton kívül az EGMO vezetősége által javasolt 4 lány, továbbá a válogatókon jól szerepelt diákok jöttek, továbbá meghívást kapott *Csaplár Viktor,* aki Felvidéki magyarként a budapesti Fazekasban tanult és érettségizett, de az olimpián Szlovákia színeiben indult és csapatának legjobbjaként szép ezüstérmet nyert. A komoly munka mellett az egyik délután közös strandolás, röplabdázás volt a Gunaras strandfürdőben. A körülmények ideálisak voltak, az Európa szállóban laktunk, annak alagsorában tágas, a kánikulában is kellemes hőmérsékletű termeiben dolgozhattunk. Esténként az EB egy-egy mérkőzését is közösen lehetett végigszurkolni. A sok-sok hónap otthoni online iskolázása után nagyon jó volt újra együtt lenni, matekozni. Meg kell említeni a tábort záró tábortüzet, ahol Salamon Marika grillmesterként is csillagos ötösre vizsgázott. Az étkezésünket biztosító étterem előkészítette a hozzávalókat, Marika pedig a rögtönzött körülmények között a tábor közel ötven résztvevőjének megsütötte a finomságokat a tábortűznél. A fizikusok látványos krumpliágyú és vízágyú bemutatója, a MaMuT táborból örökölt éneklista végigdalolása a parázsló tűz mellett a kellemes nyári éjszakában . . . , szóval nagyon jó záróeste és összességében véve is szuper tábor volt.

Dobos Sándor

Nyári fizikatábor 2021.

Kilencedikes korom óta csinálom a KöMaL-t, de a tavalyi tábor elmaradása miatt idén volt lehetőségem először részt venni ilyen típusú rendezvényen. Nagyon jól éreztem magam, rengeteg érdekes feladatot oldhattam meg, és sok hozzám hasonló érdeklődésű embert ismerhettem meg. Első nap a szállásra való megérkezés után ismerkedéssel és csapatbeosztással töltöttük az időt. A következő napokban minden nap kaptunk 4-5 elméleti és egy becslési feladatot reggeli után, melyet vacsoráig kellett beadnunk. Ezek mellett naponta el kellett végeznünk egy mérést, melyről az általunk készített jegyzőkönyvet a többi feladattal együtt kellett átadni a szervezőknek, akik másnap estére kijavították a beadott munkáinkat és közzétették a csapatok által szerzett pontokat. A kötelező jellegű feladatok mellett természetesen szabadidőnk is volt, melyet ifjú fizikusokhoz illően részben kísérletezéssel töltöttünk. A vasaló szét- és összeszerelése, a dezodorok gyúlékonyságának tesztelése, a közeli kisboltban külön erre a célra vásárolt krumpliból készített krumplióra mellett természetesen volt időnk röpizni, kosarazni, társasjátékozni és filmet nézni is. Ezeken kívül, a szabadidős programok közül szerintem mindenkinek nagy élmény volt a krumpliágyúval való lövöldözés és a víz túlnyomásán alapuló vízágyú használata, valamint a Honyek Gyula által tartott kísérleti bemutató és a strandolás is. Összefoglalva, nekem nagyon tetszett a tábor, sok érdekes, új dologgal találkoztam, miközben sok kedves, jófej emberrel tölthettem az időt, akikkel könnyen megtaláltuk a közös hangot.

Schmercz Blanka
ELTE Apáczai Csere János Gyak. Gimn. és Koll.

Támogatók:

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

Nemzeti Tehetség Program

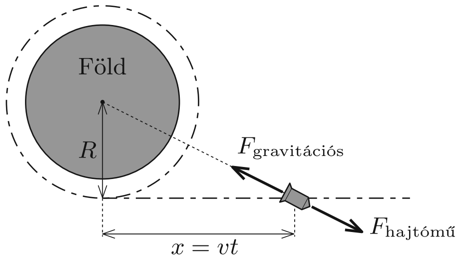
AIT-BUDAPEST

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

A Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny 1. elméleti fordulójában szereplő feladatok megoldása*

1. feladat. Jelölje a Föld tömegét M, sugarát R, a gravitációs állandót pedig γ! A körpályán keringő űrhajó mozgásegyenlete



$$\gamma \frac{m_0 M}{R^2} = m_0 \frac{v^2}{R},$$

ahonnan az űrhajó sebessége $v = \sqrt{\gamma M/R}$.

A körpályáról való letérés után t idővel, $x = vt$ út megtétele után az űrhajóra ható $\gamma mM/(R^2 + x^2)$ gravitációs erővel tart egyensúlyt a hajtómű által kifejtett $-u\dot{m}$ erő, ahol $m(t)$ az űrhajó pillanatnyi tömege, $\dot{m}$ pedig annak az idő szerinti deriváltja. Így a

$$\gamma \frac{m(t)M}{R^2 + v^2 t^2} = -u \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

differenciálegyenlethez jutunk, ami a változók szétválasztásával megoldható:

$$\gamma M \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{R^2 + v^2 t^2} = -u \int_{m_0}^{m_\infty} \frac{\mathrm{d}m}{m}.$$

Itt már figyelembe vettük az $m(0) = m_0$ kezdeti feltételt, valamint bevezettük az űrhajó végső tömegére az m_∞ jelölést. A kijelölt integrálásokat elvégezve:

$$\frac{\gamma M}{R^2} \frac{R}{v} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{vt}{R}\right) \right]_0^\infty = -u [\ln m]_{m_0}^{m_\infty},$$

ebből:

$$\frac{\gamma M}{Rv} \cdot \frac{\pi}{2} = -u \ln\left(\frac{m_\infty}{m_0}\right).$$

Felhasználva a v keringési sebességre korábban kapott értéket, kifejezhetjük az űrhajó végső tömegét:

$$m_\infty = m_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi v}{2u}}.$$

Megjegyzések. 1. A feladat megoldható úgy is, hogy az űrhajó helyzetét a vezérsugár szögével paraméterezzük. Ekkor a kapott differenciálegyenlet azonos alakú a radioaktív bomlásokat (vagy egy kondenzátor kisülését) leíró differenciálegyenlettel, melynek megoldása a jól ismert exponenciális lecsengés.

[1] A feladatok szövegét a KöMaL múlt havi számában közöltük.

2. Több versenyző előjelhibát vétett a differenciálegyenlet felírásakor. Ez az elsőre ártalmatlannak tűnő hiba pozitív kitevőt eredményez a végső tömeg kifejezésében, mely szerint az űrhajó tömege a mozgás során növekedne! Ekkor észre kell venni, hogy az eredmény fizikailag értelmetlen, és megkeresni a hiba okát.

2. feladat. Legyen a gáz nyomása kezdetben p_0, térfogata V_0, az M tömegű dugattyú távolsága a henger aljától $h_0 = V_0/A$, ahol A a henger keresztmetszet-területe. Legyen a ráhelyezett súly tömege m. Súly nélkül a dugattyú egyensúlyi helyzetében $p_0 = Mg/A$, ha pedig a súly is jelen van, akkor egyensúlyban $1{,}25\,p_0 = (m+M)g/A$.

A gáz hőszigetelt tartályban van elzárva hőszigetelt dugattyúval, ezért az első főtétel alapján a gáz belső energiájának megváltozása megegyezik a gázon végzett munkával. Mivel a gázon csakis a nehézségi erőtér végez munkát (a rendszer vákuumban van), ezért ezt közvetlenül könnyen ki tudjuk számítani. Felmerülhet az adiabatikus folyamatokra érvényes Poisson-egyenlet (pV^κ =állandó) használata is, ez azonban a kezdő- és végállapot között *nem érvényes!* Igaz ugyan, hogy a gáz nem vesz fel/ad le hőt, mégsem adiabatikus folyamaton megy keresztül. Az adiabatikus folyamat egyik feltétele ugyanis a reverzibilitás, ami ebben a feladatban nem áll fenn. Amikor a súlyt rátesszük a dugattyúra, vagy arról levesszük, akkor a dugattyú (nem harmonikus) rezgésbe kezd. Noha nincsen súrlódás, a gáz viszkozitása miatt ez az oszcilláció lassan csillapodik (irreverzibilitás), majd a dugattyú egyensúlyba kerülve megáll. Határozzuk meg a dugattyú ezen egyensúlyi helyzeteit!

Legyen a súllyal terhelt dugattyú egyensúlyi helyzetében a gáz térfogata V_1, a dugattyú magassága a henger aljától mérve pedig h_1. Az első főtétel alapján

$$\frac{5}{2}(1{,}25\,p_0V_1 - p_0V_0) = W_{\text{neh}}.$$

A nehézségi erőtér munkáját a kezdeti és a végállapot határozza meg, azaz

$$W_{\text{neh}} = (m+M)g\frac{V_0 - V_1}{A} = 1{,}25\,p_0(V_0 - V_1).$$

Ezen két egyenletből:

$$V_1 = \frac{6}{7}V_0 \quad \to \quad h_1 = \frac{6}{7}h_0.$$

Ezután a súlyt levesszük, a dugattyú újra rezegni kezd, majd megáll h_2 magasságban, ahol a gáz térfogata V_2. Az első főtétel szerint

$$\frac{5}{2}(p_0V_2 - 1{,}25\,p_0V_1) = W'_{\text{neh}}.$$

A nehézségi erő munkája

$$W'_{\text{neh}} = -Mg\frac{V_2 - V_1}{A} = -p_0(V_2 - V_1).$$

Ez utóbbi két egyenletből:

$$V_2 = \frac{33}{28}V_1 = \frac{99}{98}V_0 \quad \to \quad h_2 = \frac{33}{28}h_1 = \frac{99}{98}h_0.$$

A magasságokra kapott eredmények minden ciklusban igazak. N darab ciklus után a két egyensúlyi helyzet:

$$h_{1N}=\frac{28}{33}\left(\frac{99}{98}\right)^N h_0,\quad h_{2N}=\left(\frac{99}{98}\right)^N h_0.$$

Ezen egyenletekből azt kapjuk, hogy N ciklus és a súly végső eltávolítása után dugattyú egyensúlyi helyzete akkor lesz magasabban, mint $2h_0$, ha

$$\left(\frac{99}{98}\right)^N h_0>2h_0\quad N=\frac{\lg 2}{\lg(99/98)}\approx 68{,}3.$$

Ez az eredmény azonban csak akkor lenne helyes, ha a gázt tartalmazó henger magassága $2h_0$-nál jóval magasabb lenne. Mivel a fenti számolással kapott egyensúlyi helyzetek csak sok rezgést követően alakulnak ki, a rezgés során a dugattyú átlendül ezeken a helyzeteken, azaz már ennél kevesebb ciklus esetén is elhagyhatja a dugattyú a hengert. Az első egyensúlyi helyzet körüli rezgés során a dugattyú nem hagyhatja el a hengert, hiszen annak kialakulását megelőzően olyan helyzetből indult a rezgés, ahol a dugattyú még a hengerben helyezkedik el. Vagyis a rezgés közbeni kirepülés csakis a második egyensúlyi helyzet körüli oszcilláció esetén jöhet szóba. Tehát meg kell határoznunk azt, hogy melyik ciklusban történik meg, hogy a dugattyú a második egyensúlyi helyzeten való első áthaladást követően eléri a henger tetejét.

Azonban ez nem egyszerű feladat, mert a rezgés során a dugattyú második egyensúlyi magassága kúszik felfelé, ahogy a csillapodás miatt egyre kisebb lesz a dugattyú egyensúlyi helyzetén való áthaladásakor vett maximális sebessége. Mivel a rezgés csillapítása kicsiny, így a dugattyú a súly levételét követően a maximális magasságot gyorsan eléri, valamint egy periódus alatt az egyensúlyi és a szélsőhelyzetek eltolódása kicsiny, ezért a gyors folyamatot adiabatikusnak tekinthetjük (lényegében az ilyen rövid folyamat reverzibilisnek tekinthető, de a teljes rezgésmegállásig vizsgálva már nem).

Jelöljük a dugattyú maximális h magasságához tartozó gáznyomást p-vel, a térfogatot V-vel. Az energiamegmaradás a kiinduló h_1 magasságú és a h magasságú helyzet között

$$\frac{5}{2}(pV-1{,}25\,p_0V_1)=-Mg\frac{V-V_1}{A}=-p_0(V-V_1).$$

Az adiabatikus egyenlet ($\kappa=7/5$):

$$pV^\kappa=1{,}25\,p_0V_1^\kappa.$$

A p nyomás kiküszöbölésével a

$$\frac{25}{8}\left(\frac{V_1}{V}\right)^\kappa+1=\frac{33}{8}\frac{V_1}{V}$$

egyenlet adódik. Ezt numerikusan (pl. iterációval) tudjuk megoldani, eredményül $V_1/V\approx 0{,}73$-at kapunk, azaz $h\approx 1{,}37h_1$.

Most már válaszolhatunk a feladat kérdésére. A dugattyú akkor hagyja el a hengert, ha

$$h_N = 1{,}37h_{1N} > 2h_0, \qquad \left(\frac{99}{98}\right)^N > 1{,}72.$$

Ez akkor teljesül, ha $N > 53{,}4$, azaz az 54. ciklusban a dugattyú elhagyja a hengert.

3. feladat. Az *a*) kérdés segít a *b*) kérdés elemi megoldásához, de a *b*) kérdés (több számolással) megoldható az első kérdéstől függetlenül is. A *b*) kérdést kétféle úton is megoldjuk.

A rendszer a gyűrű függőleges tengelyére nézve forgásszimmetriát mutat, ezért célszerű hengerkoordináta-rendszerben gondolkozni; a gyűrű síkjától mért távolságot a z koordináta jellemzi, a gyűrű tengelyétől mért távolságot pedig r. A rendszer szimmetriája miatt sem a potenciál, sem a térerősség nem függ a harmadik hengerkoordinátától, ami a tengely körüli forgásszög. Az is egyszerű következménye a szimmetriának, hogy az elektromos térnek csak függőleges (E_z) és sugárirányú (E_r) komponense van.

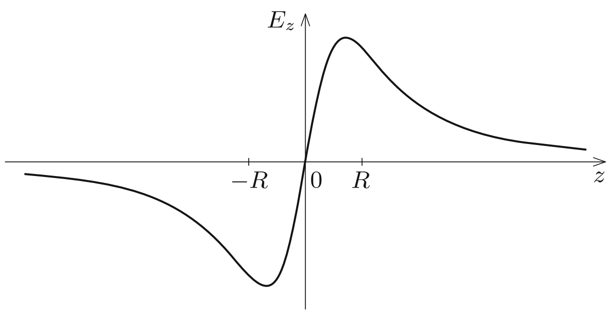
a) A rendszer forgásszimmetriája miatt a gyűrű függőleges tengelyén az elektromos térerősség tengelyirányú, és z magasságban a nagysága:

$$E_z(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{R^2+z^2}\cos\varphi = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0}\left(R^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Itt φ a gyűrű és a vizsgált tengelypont által alkotott kúp félnyílásszöge, $\cos\varphi = z/\sqrt{R^2+z^2}$. Abban az esetben, ha $|z| \ll R$, ez a térerősség így közelíthető:

$$E_z(z) \approx \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Tehát $|z| \ll R$ esetén $E_z(z)$ közel lineáris, és $z \to \pm\infty$ esetén $E_z \to 0$, ahogy az *ábrán* is látható.



b) *I. megoldás: Gauss-törvénnyel.* A gyűrűnek az átmérőjére vett tükörszimmetriája miatt a gyűrű síkjában a térerősség sugárirányú. A középponttól $r \ll R$ távolságra a térerősség $E_r(r)$ nagyságát úgy kaphatjuk meg, hogy a Gauss-törvényt alkalmazzuk egy kis hengerre, melynek középpontja és tengelye egybeesik a gyűrű középontjával és tengelyével. A kis henger sugara legyen $r \ll R$, magassága

$2z \ll R$. A paláston a térerősség felületre merőleges komponense $E_r(r)$, az alaplapokon $E_z(z)$, így a Gauss-törvény szerint[2] $0 = 4\pi rzE_r(r) + 2\pi r^2 E_z(z)$, ahonnan

$$E_r(r) \approx -\frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

A közelítés $r \ll R$ esetén érvényes, és a negatív előjel azt jelzi, hogy a gyűrű síkjában a térerősség a gyűrű középpontja felé mutat.

II. megoldás: A potenciálra felírt integrálból. A kérdést megoldhatjuk az *a*) kérdés megválaszolása nélkül is, kicsit több számolással. A gyűrű síkjában a középponttól r távolságra az elektromos potenciál

$$\Phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\alpha}},$$

ahol az α középponti szöggel paramétereztük a gyűrű pontjait, és az integrandus nevezőjében a koszinusztételt alkalmaztuk. A feladat megoldásához az integrálást nem kell elvégezni! Az elektromos térerősség $E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}r}$ sugárirányú a gyűrű síkjában, és a középpontban zérus, hiszen $\Phi(r)$ páros függvény. Így $r \ll R$ esetén

$$E_r(r) \approx r\frac{\mathrm{d}E(0)}{\mathrm{d}r} = -r\frac{\mathrm{d}^2\Phi(0)}{\mathrm{d}r^2} =$$
$$= -\frac{Qr}{8\pi^2\varepsilon_0}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(R^2+r^2-2Rr\cos\alpha\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{r=0}\,\mathrm{d}\alpha.$$

Mivel a deriválás és az integrálás más változóra történik, a két művelet felcserélhető. Az integrálon belül a deriváltra $(3\cos^2\alpha - 1)R^{-3}$ adódik, így

$$E_r(r) \approx -\frac{Q}{8\pi^2\varepsilon_0 R^3}\int_{-\pi}^{\pi}(3\cos^2\alpha - 1)\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{Qr}{8\pi\varepsilon_0 R^3}.$$

Ez megegyezik a Gauss-törvény segítségével kapott értékkel.

c) Előző eredményeinket felhasználva a kis test mozgásegyenlete (kis kitérések esetén)

$$m\ddot{x} = -\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 R^3}x.$$

Ez egy harmonikus rezgőmozgást ír le, aminek periódusideje:

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 mR^3}{Qq}}.$$

[2]Valójában a térerősség $E_r(r,z)$ radiális és $E_z(r,z)$ függőleges komponense is függ mind az r, mind a z koordinátától a henger felületén. Azonban a rendszer szimmetriája miatt $E_r(r=0,z) = 0$ és $E_z(r,z=0) = 0$, így $r/R, z/R \ll 1$ esetén első rendben $E_r(r,z) \approx$ $\approx E_r(r,0) = E_r(r)$ és $E_z(r,z) \approx E_z(0,z) = E_z(z)$.

4. feladat. A feladat nem tesz említést az áramirányokról. Az alábbiakban feltesszük, hogy az áramok ellentétes körüljárás szerint folynak a csövek palástján. Az alább bemutatott számoláshoz hasonlóan megmutatható, hogy ha nem így lenne, akkor a belső cső kis kitérítésekor a mágneses mezőben tárolt energia növekedne, így a cső az elengedés után az eredeti helyzete körül rezgésbe jönne.

Tekintsünk először csak egy darab hosszú, szupravezető csövet! A szupravezető anyagba nem hatolhat be a mágneses tér, ezért a cső belsejében az indukcióvonalak a szimmetriatengellyel párhuzamos irányban futnak, majd a cső végeinél kilépnek és szerteágaznak. A szupravezető cső mágneses tere tehát nagyon hasonlít egy szolenoid tekercs teréhez azzal az apró különbséggel, hogy a szolenoid végeinek közelében a tekercs menetei között is lépnek ki indukcióvonalak. Emiatt a szupravezető cső palástján az árameloszlás (a végek kicsiny környezetétől eltekintve) egyenletes. A cső belsejében tehát a mágneses indukcióvektor nagysága $\mu_0 I/\ell$ (ahogy az a szolenoidra érvényes összefüggésből vagy a gerjesztési törvényből adódik), míg kívül elhanyagolható.

A két egymásba helyezett cső eredő mágneses terét szuperpozícióval lehet meghatározni. Az ellentétes áramirányok miatt csak a két cső közötti térrészben van mágneses mező (ennek indukcióját jelölje B_1). A kisebb, R_2 sugarú cső belsejében a mágneses indukció zérus ($B_2 = 0$), csakúgy, mint a nagyobb csövön kívül. A csövek közötti térrészben az indukcióvektor nagysága tehát:

$$B_1 = \mu_0 \frac{I}{\ell}.$$

Amikor a „lövedék” elhagyja a nagyobb csövet, az árameloszlás megváltozik a csövekben, többé már nem lesz egyenletes, az erőhatások pedig bonyolult módon határozhatók meg. Mire azonban a két cső nagy távolságra kerül egymástól, az árameloszlások ismét egyenletessé válnak a palástok mentén. A szupravezető csövek által körülfogott mágneses fluxus eközben nem változhat meg, mert az végtelen nagy áramot indukálna bennük a nulla elektromos ellenállásuk miatt. A nagyobb, illetve a kisebb csövön áthaladó fluxus kezdetben:

$$\Phi_1 = \pi\big(R_1^2 - R_2^2\big)B_1, \qquad \Phi_2 = 0.$$

Az egymástól távol került csövek esetén a kisebb belsejében csak úgy maradhat nulla a fluxus, ha a végállapotban nem folyik benne áram. Ugyanebben a helyzetben a nagyobb cső fluxusa:

$$\Phi_1' = \pi R_1^2 B_1',$$

ahol B_1' a nagyobb cső belsejében kialakuló, jó közelítéssel homogén mágneses mező indukciója. Ez utóbbi kifejezhető a $\Phi_1' = \Phi_1$ egyenlőség felhasználásával:

$$B_1' = \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1^2} B_1.$$

A rendszerben a szupravezető csövek miatt nincs disszipáció, ezért a mágneses mezőben tárolt energia csökkenése fedezi a lövedék mozgási energiáját:

$$E_{\text{mágn.}}^{\text{kezdeti}} = E_{\text{mágn.}}^{\text{végső}} + \frac{1}{2} m v^2.$$

Ismert, hogy B indukciójú mágneses mező energiasűrűsége (azaz a mező egységnyi térfogatában tárolt energia) $B^2/(2\mu_0)$, ezért az energiamérleg így írható:

$$\frac{B_1^2}{2\mu_0}\pi\left(R_1^2-R_2^2\right)\ell = \frac{{B_1'}^2}{2\mu_0}\pi R_1^2\ell + \frac{1}{2}mv^2.$$

Behelyettesítve B_1 és B_1' korábban felírt értékeit, rövid rendezés után a következő eredményt kapjuk a „lövedék" végsebességére:

$$v=\frac{R_2}{R_1}I\sqrt{\frac{\pi\mu_0}{m\ell}\left(R_1^2-R_2^2\right)}.$$

Szász Krisztián, Tasnádi Tamás és **Vigh Máté**

Beszámoló az 5. Európai Fizikai Diákolimpiáról

Az 5. Európai Fizikai Diákolimpia (EuPhO) a COVID-19 járvány miatt az előző évhez hasonlóan online formában került megrendezésre június 19. és 26. között. A versenyen 27 európai és 19 Európán kívüli ország összesen 219 diákja vett részt. A versenyzők a legtöbb országban egy helyen, tanári felügyelettel írták meg a dolgozatokat, amelyeket beszedés után beszkenneltek, és elküldtek a verseny szervezőinek, akik azokat kijavították. A verseny tisztasága érdekében az egész folyamatot (dolgozatírás, szkennelés) videón közvetíteni kellett.

A verseny az 5 órás elméleti fordulóval indult, majd a következő nap a szintén 5 órás kíséletivel folytatódott (a feladatokat alább közöljük). A tavalyi versenyhez hasonlóan a kísérleti fordulóban két szimulációs programmal dolgoztak a diákok. A dolgozatokat a szervezők által felkért javítók pontozták. A pontok esetleges megnövelése, a *moderáció* most is a versenyzők feladata volt, ami szöveges formában beküldött kérés alapján történt. Az online módon tartott eredményhirdetésre június 26-án került sor, ahol kiderült, hogy a verseny abszolút győztese *Vlad Stefan Oros* Romániából 41,3 ponttal (a maximális pontszám 50 volt). Az aranyérem határa 23,5 pont volt, amit 15 versenyző ért el. Ezüstérmet 30, bronzérmet 66 és dicséretet 27 diák kapott.

A magyar csapat egy többkörös kiválasztási folyamat végén alakult ki (ennek részleteit az előző számban közöltük). A csapat és kiemelkedő eredményeik:

Kovács Balázs Csaba (Hatvan, Bajza József Gimnázium, 11. oszt.), *aranyérem* (26,6 pont), felkészítő tanára: *Maruzsiné Sevella Judit, Kovács László;*

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.), *ezüstérem* (22,4 pont), felkészítő tanára: *Schramek Anikó;*

Bokor Endre (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.), *ezüstérem* (20,5 pont), felkészítő tanára: *Schramek Anikó;*

Tóth Ábel Levente (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 12. oszt.), *ezüstérem* (20,1 pont), felkészítő tanára: *Schramek Anikó* és *Homa Gábor;*

Bonifert Balázs (Budapest, Baár-Madas Református Gimnázium, 12. oszt.), *ezüstérem* (18,3 pont), felkészítő tanára: *Horváth Norbert.*

Említésre méltó még, hogy Kovács Balázs Csaba az abszolút 7. helyet érte el a versenyben. A magyar csapat vezetője *Szász Krisztián* volt, a feladatokat a versenynapok reggelén *Vankó Péter* fordította le magyarra, *Vigh Máté* pedig a versenybizottságban képviselte hazánkat. Az alábbiakban közöljük a verseny feladatait, a megoldások a verseny honlapján érhetők el: `https://eupho.ee/eupho-2021/`. A szép eredményhez gratulálunk!

Elméleti feladatok

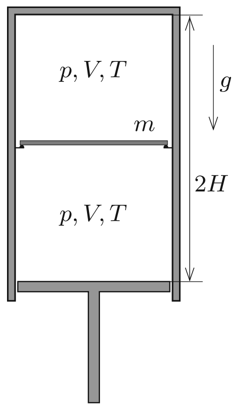
1. Szivárgás

Egy $2H$ magasságú és $2V$ térfogatú, üreges, hőszigetelt hengert alulról egy hőszigetelt dugattyú zár el. A henger két, kezdetben egyforma részre van osztva egy hőszigetelő, m tömegű válaszfallal. A válaszfal egy kör alakú peremen nyugszik, ahol egy tömítés biztosítja a szoros érintkezést. Mindkét részt p nyomású és T hőmérsékletű héliumgáz tölt ki. A dugattyú egy erő hatására lassan felfelé mozog.

a) Határozzuk meg az alsó rész V_0 térfogatát, amikor a gáz elkezd szivárogni a két rész között!

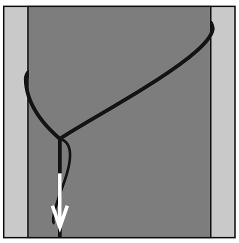
b) Határozzuk meg a felső rész T_1 hőmérsékletét, amikor a dugattyú eléri a válaszfalat!

c) Határozzuk meg az alsó rész T_2 hőmérsékletét közvetlenül azelőtt, hogy a dugattyú eléri a válaszfalat!



1. ábra

2. Fonál egy henger körül



2. ábra

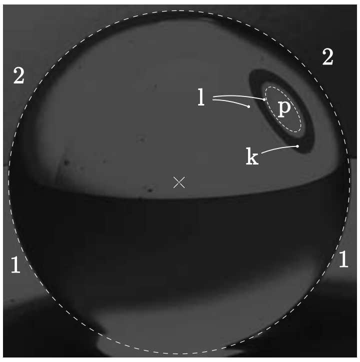
Egy fonál egyik végére $L > 2\pi R$ hosszúságú hurkot készítünk, majd egy R sugarú hengert bújtatunk át rajta. A fonál és a henger között a súrlódási együttható μ. A fonál szabad végét a henger tengelyével párhuzamos irányban húzzuk (a képen nyíl mutatja), miközben a hengert nem engedjük elmozdulni. Ha a hurok hossza nagyobb, mint egy kritikus L_0 érték, a hurok csúszhat a hengeren, anélkül hogy megváltozna az alakja. Ellenkező esetben a súrlódás „rögzíti” egy helyen, és ha növeljük a húzóerőt, a fonál akár el is szakadhat. Határozzuk meg a kritikus L_0 értéket! A fonál súlya elhanyagolható, a fonál nem csavarodik húzás közben.

Hasznos lehet:

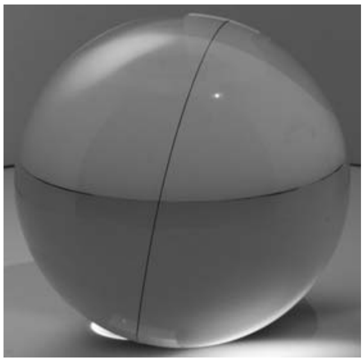
$$2\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{1+x^2} + \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\,\right).$$

3. Üveggolyó

Az első fénykép (*3. ábra*) egy digitális kamerával készült és egy üveggolyót ábrázol, amelyet hátulról egy diffúz, dikromatikus fény világít meg, amely csak két, vékony spektrumvonalat tartalmaz (vöröset 630 nm és ibolyát 400 nm). A diffúz fény a fehér padlóról (a képen 1-gyel jelölve) és a fehér falakról (2-vel jelölve) érkezik, amelyeket ibolya és vörös LED lámpák világítanak meg. A kamera érzékelőjében csak vörös, kék és zöld szenzor van, így az ibolya fény a képen kéknek látszik (lásd színesben az első belső borítón). A fénykép a golyó sugaránál jóval nagyobb távolságból készült. A golyó hátsó oldalára egy nagyon vékony, átlátszatlan fonál van ragasztva a gömb egy főkörének egy szakaszára. A fényképen a fonalat eltakarja a golyó, és így közvetlenül nem látható. Azonban a fonál egy nagyon kis darabjának nagyon-nagyon eltorzított képe kék (k-val jelölt) és piros (p-vel jelölt) ellipszisként látható. Az l betű lila színű területeket jelöl a fényképen.



3. ábra



4. ábra

Az első fényképen a golyó középpontját egy kereszt, a golyó kerületét pedig egy szaggatott vonal jelöli. (A versenyzők megkapták az első fénykép nagyobb változatát is egy külön lapon, azon végezhettek távolságméréseket. A nagyobb fényképen a piros és a lila tartományok határát is szaggatott vonal jelezte.)

A *4. ábrán* látható második fénykép úgy készült, hogy egy fehér LED világítja meg a golyót, és a golyó el van forgatva, hogy a fonál közvetlenül látható legyen.

a) Sugármenetek segítségével adjunk kvalitatív magyarázatot arra, hogy a fonál egy darabja miért látszik zárt hurokként az első fényképen!

b) Határozzuk meg a vörös fényre vonatkozó $n_{\text{vörös}}$ törésmutatót!

c) Határozzuk meg a vörös és ibolya fényre vonatkozó törésmutatók

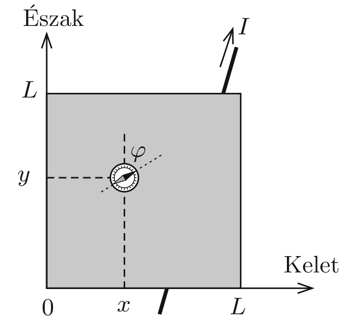
$$\Delta n \equiv n_{\text{vörös}} - n_{\text{ibolya}}$$

különbségét!

Kísérleti feladatok

1. Elrejtett vezeték

Kísérleti elrendezés és feladatok



5. ábra

Egy nagyon hosszú rézvezeték vízszintesen fut ismeretlen h mélységben a vízszintes, $L = 100{,}0$ mm élhosszúságú négyzet alakú felület alatt. A négyzet oldalai nyugat-kelet (x tengely) és dél-észak (y tengely) irányúak, ahogy az *5. ábrán* látszik. A koordináta-rendszer origója a négyzet délnyugati sarkában van.

A vezeték egy állítható egyenáramú áramforráshoz van csatlakoztatva (az ábrán nincs feltüntetve), amelyen az I áramot a -5 A és $+5$ A közötti tartományban lehet állítani. Az ellentétes előjelű áram az áramforrás ellentétes polaritásának felel meg. A négyzetes felületre (beleértve a határvonalát is) egy kis iránytűt helyezhetünk, ami érzékeli a vezeték mágneses mezőjét a mágnestű és az északi (y) irány közötti φ elfordulási szög által. Pozitív φ érték a keleti irányban történő eltérülésnek felel meg, ahogy az ábrán látható, míg negatív φ nyugati irányú eltérülésnek felel meg. Feltételezhető, hogy

- a mágnestű egy pontszerű mágneses dipól, amely szabadon foroghat a függőleges tengelye körül, azaz az iránytű csak a mágneses tér vízszintes komponensére érzékeny;
- a tű magassága a felület felett elhanyagolható a vezeték mélységéhez képest, azaz a tű az $x-y$ síkban van.

Tervezzük meg a mérést és végezzük el a szükséges szimulációkat a következő feladatok megoldásához:

a) Határozzuk meg a vezeték elhelyezkedését a koordináta-rendszerhez viszonyítva, azaz adjuk meg az egyenletét $y = ax + b$ alakban! Becsüljük meg az a és b paraméterek hibáját! Rajzoljuk be egy grafikonba a vezeték helyzetét, és jelöljük a pozitív I áramhoz tartozó irányt!

b) Határozzuk meg a vezeték felülethez viszonyított h mélységét és a Föld mágneses terének B_{E} vízszintes komponensét! A feladatnak ebben a részében nem kell hibaszámítást végezni, azonban a végeredményeket megfelelő számú értékes jeggyel kell megadni.

A vákuum mágneses permeabilitása

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{T\,m/A}.$$

A szimulációs szoftver leírása

A parancssoros program szimulálja a φ eltérülési szög mérését, miután megadjuk az I áramot és az iránytű helyzetének x és y koordinátáit a felületen.

Egy szimulációs lépés tipikus kimenete így néz ki:

```
Enter I (A) between -5.0 and 5.0: 3.4
Enter X (mm) between 0 and 100: 55
Enter Y (mm) between 0 and 100: 31
PHI = -33 degrees
--------------------
Enter I (A) between -5.0 and 5.0: _
```

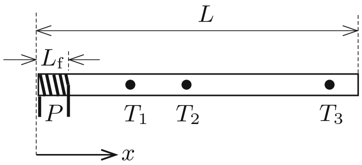
Először meg kell adjuk az I áramot A-ben (a számértéket $-5{,}0$ és $5{,}0$ között), aztán az x és y koordinátákat mm-ben (a számértékeket 0 és 100 között). Minden adatot az **Enter** gombbal kell megerősíteni. A program kiadja φ (PHI) értékét fokokban (1°-ra kerekítve) és visszatér a kiinduló állapotba.

A megadott I áramérték 0,1 A-re, az x és y koordináta-értékek 1 mm-re lesznek kerekítve a szimuláció elvégzése előtt. (Tehát nincs értelme ennél pontosabb értékeket megadni a bevitelkor.)

Minden egyes alkalommal, amikor megadjuk az iránytű helyzetét, a szimulációban használt koordináták egy kb. 0,5 mm-es hibával el fognak térni a bevitt értékektől. (Ez azt szimulálja, hogy a valóságban is csak korlátozott pontossággal tudjuk elhelyezni.)

Ha bármikor ki akarunk lépni a programból, nyomjunk **Ctrl+C**-t.

2. Forró henger



6. ábra

Bevezetés. Egy ismeretlen fémből készült, $L=30$ cm hosszúságú és $r=1$ cm sugarú rúd kezdetben szobahőmérsékleten van, $T_0=26{,}9\,^\circ\mathrm{C}=300$ K. A fémrúd tömege $m==460$ g. Az a feladat, hogy meghatározzuk ennek az ismeretlen fémnek a termikus tulajdonságait. A fémrudat az egyik végén melegíthetjük, és tetszőlegesen megválasztható helyen megmérhetjük a hőmérsékletét. A fűtés az $x=0$ és $x=L_\mathrm{f}=3$ cm között található (lásd az *6. ábrát*). A fűtés programozható: megadható egy rögzített teljesítmény (wattban) és egy időtartam (másodpercben), ameddig a fűtés be van kapcsolva. Hőmérsékletméréseket úgy végezhetünk, hogy megadunk legfeljebb öt helyet a rúd mentén, ahol a szenzorok legyenek, a mérés frekvenciájával, valamint kezdeti és befejező időpontjával együtt. A szimuláció a hőmérsékletértékeket gyorsított „valós időben” fogja mutatni (kb. 10-szer gyorsabban, mint a valóságban).

Feltételezhetjük, hogy a fűtőteljesítmény a rúdba jut, és hogy a rúd egyrészt hőátadással a levegőnek, másrészt feketetest-sugárzással ad le hőt a környezetének. A levegőnek való hőleadás lineárisan változik a rúd hőmérsékletével, és egy α tényezővel jellemezhető: a hőátadás egységnyi felületen egységnyi idő alatt $\alpha(T-T_0)$. A levegő szabadon áramlik, így α értéke állandónak tekinthető a rúd mentén, és független a felület hőmérsékletétől. A feketetest-sugárzással leadott hő a Stefan–Boltzmann-törvénnyel írható le, azzal a módosítással, hogy az emissziós állandó β, és így az egységnyi felületen egységnyi idő alatt leadott sugárzó hő $\beta\sigma(T^4-T_0^4)$, ahol $\sigma=5{,}67^{-8}$ W/(m^{2}K^4). Hasonlóan α-hoz, az emissziós állandó is állandó a rúd mentén, és nem függ a hőmérséklettől. A rudat ezen kívül jellemzi a k hővezetési tényező (a hőáram a rúd mentén x irányban $-k\mathrm{d}T/\mathrm{d}x$), és a c fajhő.

Feladatok. A feladat az ismeretlen fém c fajhőjének ((J/kg K) egységekben), k hővezetési tényezőjének (W/(m K) egységekben), az α hőátadási tényezőnek (W/(m^{2}K) egységekben), és a β emissziós tényezőnek (dimenziótlan) a meghatározása. Az értékeket a valós értékhez viszonyítva 10% pontossággal kell megállapítanunk. Ez azért van, mert különböző hibaforrások vannak, mint a Gauss-féle véletlen hiba a szenzor helyének megadásában és a hőmérsékletmérésben. A hiba nagysága az eredmények fluktuációjából megállapítható.

Mint minden mérésnél, itt is egyértelműen fejlécezett táblázatokat, egyértelműen jelölt grafikonokat, és megfelelően részletes számításokat kell készíteni, amivel megmutató, hogy miket mértünk és hogyan jutottunk az eredményekhez.

Program kezelési felülete. A **rod** nevű szimulációs program futtatásával ismételt méréseket végezhetünk a rúdon. A program egymás után kérdezi a mérési beállításnak megfelelő értékeket. Minden esetben a megfelelő értéke(ke)t be kell írni, és meg kell nyomni a **return**-t a következő kérdéshez. A következőket kell megadni:

1. A fűtő fűtőteljesítménye:
   `Enter P (W), between 0 and 300:`
2. Az az időtartam a mérés megkezdésétől számítva, ameddig a fűtés be lesz kapcsolva (ezután a fűtés kikapcsol):
   `Enter heating duration (s), between 0 and 3600s:`
3. A rúdon végzett hőmérsékletmérések kezdő és befejező időpontjai (a kísérlet kezdetétől számítva):
   `Enter the starting and finishing time for the measurements (s),`
   `separated by a space. Must be between 0 and 3600s:`
4. Az időintervallum két egymást követő hőmérsékletmérés között:
   `Enter dt (s), between 5 and 3600s and a multiple of 5s:`
5. A hőmérő szenzorok helye a rúd mentén. A koordináták a rúdnak a fűtőtesttel ellátott végétől vannak mérve:
   `Enter up to 5 locations for the sensors (in cm), between L=0 and`
   `L=30cm, separated by spaces:`
   Ha nem írunk semmilyen értéket, az azt jelenti, hogy semmilyen mérést nem végzünk.
6. A mért hőmérsékletadatokat tartalmazó fájl neve. Minden mentett mérési adat megjelenik a képernyőn is:
   `Enter the output file name:`
   Javasolt csak ékezet nélküli latin betűket és számokat használni a fájlnévben, más esetben az adatokat nem lehet elmenteni. Az eredmények `.txt` fájlban lesznek elmentve a megadott névvel, a programmal azonos mappában.

Érvénytelen input esetén hibaüzenetet kapunk, és újra beírhatjuk az értéket.

A program kiírja, hogy nyomjunk **return**-t a mérés elkezdéséhez, vagy írjuk be, hogy `restart` és azután nyomjunk **return**-t, ha újra be akarjuk írni a mérési paramétereket. A szimuláció futásakor a program kiírja a bevitt adatokat, aztán elkezdi kiírni a fűtés bekapcsolásától számított eltelő időt (`t(s)`), és az összes szenzor által mért értéket ugyanabban a sorrendben, ahogy megadtuk őket (`Ti(C)`, ahol i az i-edik szenzornak felel meg).

Ha a szimulációnak vége, új mérést lehet kezdeni a `restart` beírása és a **return** megnyomása után.

Szász Krisztián, Vankó Péter

Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye

Versenyfelhívás és beszámoló

Ha szereted a fizikát, a kísérletezést, jól beszélsz angolul, és egy életre szóló élményre vágysz, akkor itt a helyed!

A Fizika Világbajnokságnak is nevezett IYPT (Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye, angolul International Young Physicists' Tournament) egy angol nyelvű, kísérleti fizikai csapatverseny, ahova a világ minden tájáról (több mint 30 országból) érkeznek középiskolások, hogy összemérjék tudásukat. Az IYPT a XXI. század kihívásainak megfelelő készségeket vár el az indulóktól: nemcsak a fizikában kell jártasnak lenni, hanem az eredményeket prezentálni és megvédeni is tudni kell! A résztvevő diákok a versenyt megelőzően elvégzett fizikai méréseiket és kutatásaikat egy – angol nyelven előadott – tudományos prezentáció formájában mutatják be a rivális csapatoknak.

Az IYPT verseny magyarországi első fordulójára (Hungarian Young Physicists' Tournament, HYPT) az `hypt.elte.hu` oldalon való regisztráció határideje:

2021. november 9. éjfél.

A jelentkező diákoknak egy kiválasztott IYPT problémáról 10 perces angol nyelvű előadást kell készíteni és felvenni, majd 2020. november 30-ig beküldeni. Ezen előadások alapján a legjobb beküldők az ELTE TTK-n, december közepén megrendezésre kerülő szóbeli fordulón vehetnek részt. Az induló diákoknak itt az általuk beküldött előadást élőben kell előadniuk.

A decemberi szóbeli fordulót követően a 10 legmagasabb pontszámot elérő diák az ELTE TTK Anyagfizikai Tanszékén végezheti a további kutatásait. A felkészülés során nyújtott teljesítmény alapján 3 diák indulhat az osztrák AYPT versenyen, az 5 legjobb diák pedig bekerül a Romániában megrendezésre kerülő 35. IYPT magyar csapatába.

Jelentkezés, a feladatok szövege és további információk az `hypt.elte.hu` weboldalon, illetve az `email@hypt.elte.hu` email címen.

Néhány példa a 2022-re kitűzött IYPT problémák közül:

3. Gyűrű a rúdon. Egy függőleges acélrúdra húzott csavaralátét forogni kezdhet, ahelyett, hogy egyszerűen lecsúszna rajta. Tanulmányozd az alátét mozgását és vizsgáld meg, hogy mi határozza meg a végsebességét!

8. Ekvipotenciális vonalak. Helyezz két elektródát a vízbe, kapcsolj rá (biztonságos mértékű) feszültséget, és voltmérővel határozd meg az elektromos potenciált különböző helyeken. Vizsgáld meg, hogy a mért ekvipotenciális vonalak hogyan térnek el a várakozásodtól különböző körülmények és folyadékok esetén.

12. Gyertyával hajtott turbina. Egy gyertya fölé függesztett papírspirál forogni kezd. Optimalizáld a kísérleti összeállítást a maximális forgatónyomaték eléréshez.

Ezüstérmes lett a magyar ifjú fizikus csapat Grúziában

2021. július 7–14. között került megrendezésre 34. alkalommal az Ifjú Fizikusok Nemzetközi Versenye (IYPT – International Young Physicists' Tournament, https://www.iypt.org/). A jelenléti körülmények között zajló versenyen kitűnő versenyzéssel a magyar csapat az ezüstérmet jelentő 5. helyet vívta ki.

11 kutatási témával érkeztünk a grúziai (georgiai) Kutaisibe, melyből 5-öt mutattunk be a versenyen. A megmérettetésen a saját kutatási eredmények prezentálása mellett a többi ország eredményeinek opponálása és értékelése (review) is a verseny része. *Kalocsai Zoltán* az ezüstérem mellé még egy különdíjat is kapott a „Legjobb Reviewer" kategóriában.

További információkért látogasd meg, és kövesd Facebook oldalunkat: `www.facebook.com/hypt.elte.hu`, ahol a csapat képeit és eseményeit találod, amik többet mondanak minden szónál!

A magyar csapat tagjai voltak:

Amélie Goertz (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium, 10. évf.);

Kalocsai Zoltán (Szombathely, Nagy Lajos Gimnázium, 11. évf.);

Nádori Jakab (Budapest, Radnóti Miklós Gimnázium, 12. évf.);

Simon Tamás (Budapesti Német Iskola, 11. évf.);

Somogyi Boglárka (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimnázium, 12. évf.).

A versenyzők felkészítése az ELTE Anyagfizikai Tanszékén folyt egyetemi hallgatók, oktatók és középiskolai tanárok vezetésével:

– Egyetemi és középiskolai oktatók: *Hömöstrei Mihály* (Budapesti Német Iskola, ELTE), *Ispánovity Péter* (ELTE), *Jenei Péter* (ELTE), *Szeidemann Ákos* (Eötvös József Gimnázium, Tata), *Széchenyi Gábor* (ELTE), *Vincze Miklós* (ELTE-MTA).

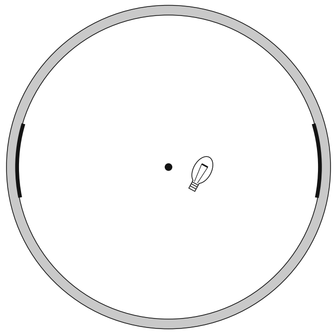
– Egyetemi hallgatók és doktoranduszok: *Bánóczki Tímea* (BME), *Kadlecsik Ádám* (ELTE), *Lipovics Dániel* (University College London), *Nagy Péter* (ELTE), *Penc Patrik* (BME), *Vavrik Márton* (BME).

A sok nevetéssel és kemény munkával töltött év után most indul a felkészülés a 2022-es megmérettetésre, mely Temesváron, Romániában kerül megrendezésre.

az HYPT szervezők csapata

Fizika feladatok megoldása

P. 5308. *Egy* 24 cm *átmérőjű, gömb alakú tejüveg lámpabúrában a villanykörte kicsiny izzószála a búra közepétől* 3 cm*-re tolódott el. Az izzószál közepét a gömb középpontjával összekötő egyenes mentén, azzal kis szöget bezárva terjedő és a búra faláról többszörösen visszaverődő fénysugarak így az izzószálnak olyan két valódi képét is létre tudják hozni, amelyek* 2-2 cm*-re vannak a gömb középpontjától. Hogyan keletkeznek ezek a képek, és hogyan aránylik egymáshoz e két kép nagysága?*



(*5 pont*) *Radnai Gyula* (1939–2021) feladata

Megoldás. A leképezési törvény értelmében

$$k=\frac{tf}{t-f},$$

ahol k a képtávolság, t a tárgytávolság (ugyanattól a tükörtől számítva) és $f=6$ cm a gömbtükrök fókusztávolsága (a sugár fele).

A villanykörtéből balra elinduló fénysugarak $t_0=15$ cm távolságra vannak a bal oldali tükörtől, így a kép $k_0=10$ cm távol lesz a bal oldali tükörtől. Ez éppen 2 cm-re van a gömb közepétől, ez adja tehát a bal oldali valódi képet, amelynek nagyítása

$$N_{\text{balra}}=\frac{k_0}{t_0}=\frac{2}{3}.$$

A jobbra elinduló fénysugarak $t_0'=9$ cm-re vannak a jobb oldali tükörtől, a kialakuló kép $k_0'=18$ cm-re lesz a gömb felületétől. Ez másodrendű fényforrásként funkcionál, innen úgy haladnak tovább a fénysugarak a bal tükör felé, mintha ebből a pontból indulnának. Ez a pont a bal tükörtől $t_1'=6$ cm-re van, ami éppen a gömbtükör fókusztávolsága. A bal oldali tükörről visszaverődő fénysugarak nem alkotnak képet, hanem párhuzamosan haladva fogják újra elérni a jobb oldali tükröt, amiről visszaverődve annak a fókuszpontjában, a jobb tükörtől $k_2'=6$ cm-re találkoznak újra.

Az optikai tengellyel párhuzamosan haladó fénysugarak további útját már ismerjük, hiszen ugyanúgy fognak haladni, mint ahogyan odaérkeztek, csak éppen fordított sorrendben tükröződve. Eszerint $t_3'=18$ cm, $k_3'=9$ cm, $t_4'=15$ cm és $k_4'=10$ cm, vagyis az 5. visszaverődést követően keletkezik egy valódi kép 2 cm-re a gömb közepétől, méghozzá attól jobbra (hiszen a páros indexű képtávolságok a jobb oldali tükörtől mért távolságot jelentik).

A negyedik visszaverődés után a kép mérete ugyanakkora lesz, mint a tárgy mérete volt, hiszen a párhuzamosan haladó sugarakhoz viszonyítva a fényterjedés szimmetrikusan megy végbe. Az ötödik tükröződésnél a kép mérete a (virtuális) tárgy méretének $\frac{2}{3}$-a, hiszen $k'_4 = \frac{2}{3}t'_4$. Eszerint a jobbra induló fénysugaraknál is a végső nagyítás

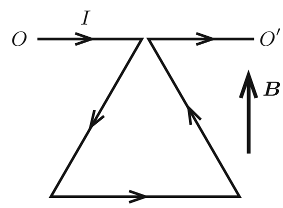
$$N_{\text{jobbra}} = \frac{2}{3} = N_{\text{balra}},$$

vagyis a gömb középpontjától 2-2 cm-re létrejövő valódi képek mérete *ugyanakkora.*

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes Kertész Balázs, Koleszár Benedek, Somlán Gellért és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5310. *Szigetelt vezetőhuzalból egy olyan egyenlő oldalú háromszöget készítünk, amely a vízszintes OO' tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A huzal merev, hosszegységre eső tömege λ. Kezdetben a háromszög síkja függőleges, és olyan homogén mágneses mezőben van, amelyben a $\boldsymbol{B}$ mágneses indukcióvektor függőlegesen felfelé mutat. Egy adott pillanatban feszültségforrást kapcsolunk a rendszerre, így abban I erősségű áram indul el. (Az induktivitástól eltekinthetünk.)*

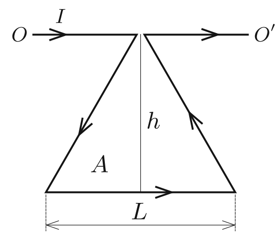


a) Mekkora gyorsulással indul el a háromszög vízszintes oldala?

b) Mekkora szöget zár be a háromszög síkja a függőleges iránnyal, ha elegendő ideig várunk?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. Jelöljük a háromszög oldalainak hosszát L-lel, és számítsuk ki a vezetőkeret tehetetlenségi nyomatékát az OO' tengelyre vonatkoztatva. Tudjuk, hogy mindhárom oldal $m = \lambda L$ tömegű, továbbá azt is, hogy a háromszög magassága $h = \frac{\sqrt{3}}{2}L$ (lásd az *ábrát*).



A forgástengellyel párhuzamos oldal minden darabkája h távol van a tengelytől, így a tehetetlenségi nyomatéka

$$\Theta_1 = mh^2 = \lambda L \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2 = \frac{3}{4}\lambda L^3.$$

A másik két oldal mindegyike $m = \lambda L$ tömegű, de csak a tengelytől legtávolabbi pontjuk van h távolságra a forgástengelytől. Vetítsük rá – gondolatban – az egyik oldalt a háromszög magasságvonalára. A vetítés során a vezetőhuzal minden darabkájának a forgástengelytől mért távolsága változatlan marad, tehát a tehetetlenségi nyomaték nem változik. Tudjuk, hogy egy h hosszúságú, m tömegű rúdnak a végpontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{3}mh^2$, így a „ferde” vezetékdarabok tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta_2=\Theta_3=\frac{1}{3}mh^2=\frac{\lambda L}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}L\right)^2=\frac{1}{4}\lambda L^3.$$

Az egész vezetőkeret tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta=\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3=\frac{3}{4}\lambda L^3+\frac{1}{4}\lambda L^3+\frac{1}{4}\lambda L^3=\frac{5}{4}\lambda L^3.$$

Az $A=\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ területet körülfogó vezetőkeretre a kiindulási helyzetben

$$M_{\max}=BIA=\frac{\sqrt{3}}{4}BIL^2$$

forgatónyomaték hat, aminek hatására

$$\beta=\frac{M_{\max}}{\Theta}=\frac{\sqrt{3}}{5}\,\frac{BI}{\lambda L}$$

szöggyorsulással kezd el mozogni. A vízszintes oldal gyorsulása

$$a=h\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}L\cdot\frac{\sqrt{3}}{5}\,\frac{BI}{\lambda L}=\frac{3}{10}\,\frac{BI}{\lambda}.$$

(Látható, hogy ez a gyorsulás nem függ a keret oldalainak L hosszától.)

b) Elegendően hosszú idő múlva a vezetőkeret beáll abba az egyensúlyi helyzetbe, ahol a mágneses mező forgatónyomatéka és a nehézségi erő forgatónyomatéka egyenlő nagyságú lesz. Ha a keret síkja φ szöget zár be a függőlegessel, akkor a háromszög középpontjában ható nehézségi erő erőkarja

$$\frac{2}{3}h\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\,L\sin\varphi,$$

így a nehézségi erő forgatónyomatéka

$$M_{\text{grav.}}=3\lambda Lg\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\,L\sin\varphi=\sqrt{3}\lambda gL^2\sin\varphi.$$

A mágneses mező forgatónyomatéka:

$$M_{\text{mágn.}}=M_{\max}\cdot\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{4}BIL^2\cos\varphi.$$

Egyensúlyi állapotban $M_{\text{grav.}}=M_{\text{mágn.}}$, ahonnan a keresett szög:

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{BI}{4\lambda g}\right).$$

(Ez az érték sem függ az L hosszúságtól.)

Selmi Bálint (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

29 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 407. Egy hungarocell tábla kis golyócskák összesajtolt halmaza. Ha a táblát eltörjük vagy elfűrészeljük, könnyen kibukhatnak belőle ilyen kis golyócskák. Mérjük meg, hányszorosa néhány ilyen golyócska sűrűsége a tábla sűrűségének.

(*6 pont*) Közli: *Horváth Norbert,* Budapest

G. 753. Az autópályán egymás mögött, 100 km/h sebességgel halad két, 5 m hosszú gépkocsi. Az autók közötti távolság 30 m. Egyszer csak a hátsó autó előzni kezd. Addig gyorsít egyenletesen, amíg egymás mellé nem érnek. Ekkor a gyorsító autó sebessége 130 km/h, amit a továbbiakban nem változtat meg. Úgy fejezi be az előzést, hogy 30 m-rel az állandó sebességgel haladó másik kocsi elé sorol. Mennyi ideig tartott az előzés?

(*4 pont*)

G. 754. Újsághír 2021. március 20-án: „Alacsony, Föld körüli pályán, vagyis 800-tól 2000 kilométerig tartó magasságban kering az űrszemét nagy többsége 28 000 km/h-s sebességgel."

a) Milyen magasságban keringhet az űrszemét 28 000 km/h sebességgel?

b) Milyen sebességgel keringhet az űrszemét 800-tól 2000 kilométerig tartó magasságban?

(*4 pont*)

G. 755. A 80 kg tömegű akcióhős olyan ejtőernyőt használ, amivel nyitott állapotban 8 m/s sebességgel süllyed. Egy jelenetben a 60 kg tömegű hősnőt a levegőben elkapja, majd ezután nyitja az ernyőt. Mekkora sebességgel ér földet az összekapaszkodott pár? Milyen magasságból történő leugrás esetén érnének szabadon esve ugyanekkora sebességgel a földre?

(*4 pont*)

G. 756. Egy autó kerekében lévő levegő nyomását a benzinkúton 1,2 bar értékűnek mutatja a nyomásmérő. Feltételezve, hogy sem a gumiabroncs térfogata, sem a benne lévő levegő hőmérséklete nem változik meg, hány százalékkal nő meg a gumiabroncsban lévő molekulák száma, ha a nyomást az előírt 2,4 bar értékre növeljük?

(*3 pont*)

P. 5346. Vízszintes talajon egyenletesen haladunk egy nagy kerekű, $G = 100$ N súlyú talicskával. Ekkor 25-25 N erőt kell kifejtenünk függőlegesen a talicska rúdjainak a végére. Vonalzóval és szögmérővel történő szerkesztéssel határozzuk meg, hogy mekkora és milyen irányú $\boldsymbol{F}$ erőt kell kifejtenünk a rudak végére, ha ugyanezzel a talicskával $\alpha = 18°$-os lejtőn haladunk felfelé, illetve lefelé! Igazoljuk számítással is a szerkesztés eredményét! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a rudak végének a távolsága a talajtól minden esetben megegyezik a talicska kerekének sugarával, és a talicska súlypontja is ugyanekkora távolságra van a talajtól.

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

P. 5347. A kezdetben nyugvó, $m = 2$ kg tömegű test súrlódásmentesen mozoghat a vízszintes felületen. Egy adott pillanatban a testre a felülettel párhuzamosan egy olyan állandó irányú F erő kezd hatni, amelynek nagysága egyenletesen változva 4 s alatt 0-ról 20 N-ra nő.

a) Mekkora lesz a test sebessége $t_1 = 3$ s múlva?

b) Mekkora utat tesz meg a test 3 s alatt, ha a $t_2 = 2$ s alatt megtett út $s_2 = \frac{10}{3}$ m?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5348. Bemutatórepülésen egy új utasszállító repülőgép 85,2 m/s sebességgel húzott el a 15 °C-os levegőben, 150 méteres magasságban. Ez a sebesség az ottani hangsebességnek éppen negyed része, amit úgy szoktak megfogalmazni, hogy $v = 0{,}25$ M, vagyis 0,25 mach értékű.[1] A talajszinten a levegő 16 °C-os volt. Ennek a gépnek az utazási repülési sebessége 900 km/h, ami 0,82 M (0,82 mach értékű) az utazási repülési magasságban, az ottani hőmérsékleten.

A levegőt ideális gáznak tekintve, valamint feltételezve, hogy a levegő hőmérséklete a talajtól mért távolsággal lineárisan változik, határozzuk meg

a) a levegő hőmérsékletét az utazási repülési magasságban;

b) az utazási repülési magasságot!

(*4 pont*) *Radnai Gyula* (1939–2021) feladata

P. 5349. 1,5 Ω belső ellenállású zsebtelep párhuzamosan kapcsolt $R_1 = 40\ \Omega$ és ismeretlen R_2 ellenállású fogyasztókat működtet. Határozzuk meg az ismeretlen ellenállás értékét, ha a zsebtelep összteljesítményének 60%-a jut erre a fogyasztóra.

(*4 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

P. 5350. Egy átlátszó gömb közepét keskeny, párhuzamos fénynyalábbal megvilágítva a sugarak éppen a gömb felületének átellenes pontján fókuszálódnak. Mekkora a gömb anyagának törésmutatója?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

[1] *Ernst Mach* (1838–1916) osztrák fizikus figyelmét egy magyar fizikatanár, Antonik Károly (1842–1905) kísérletei terelték a hangrobbanások és általában a hangsebességnél gyorsabban repülő testek mozgásának vizsgálata felé. Itt elért eredményei nyomán őrzi nevét a Mach-szám a repülés gyakorlati szakemberei körében.

P. 5351. Vajon miért nem szabad a lézerfénybe belenézni?

Az ember szemlencséje a fényt igen kicsi felületre, jellemzően néhány μm-es tartományra képes fókuszálni. A legérzékenyebb sejtek a retinában vannak, itt a „csap" és „pálcika" nevű idegsejtek mérete a μm-es tartományba esik. A mindennapi életben használt lézerek teljesítménye 0,1 mW és 100 mW között van.

Számítsuk ki, hogy a legkisebb, tehát 0,1 mW teljesítményű lézer fénye 80%-os fényelnyelés mellett mennyi idő alatt melegít fel egy sejtet a károsodást okozó $50\,^\circ$C-ra, és mennyi idő alatt a biztos roncsolást okozó $100\,^\circ$C-ra. Az egyszerűség kedvéért tekintsünk egy idegsejtet 5 μm átmérőjű és 7 μm mélységű hengernek, amelynek sűrűségét és fajhőjét a vízével vehetjük egyenlőnek. A szem hőmérsékletét vegyük 36 °C-nak, és egyéb hatásokkal (elmozdulások, hővezetés stb.) most ne törődjünk. A kapott időt vessük össze az emberi szem kb. 0,2 másodperces reakcióidejével!

(*4 pont*) Közli: *Vass László,* Budapest

P. 5352. Egy R ellenállású, A keresztmetszetű, zárt körvezetőt B indukcióvektorú mágneses térben szeretnénk forgatni a síkjában lévő szimmetriatengelye körül állandó ω szögsebességgel. Mekkora átlagteljesítménnyel tudjuk ezt megtenni?

(*4 pont*) Közli: *Szász Krisztián,* Budapest

P. 5353. Mi az oka annak, hogy a kibányászott uránérc aktivitása jelentősen nagyobb, mint a belőle készülő uránsóé?

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5354. Motoros játékvonat halad R sugarú, kör alakú pályán, állandó nagyságú v sebességgel. A kör középpontjától $d < R$ távolságra egy állandó, f_0 frekvenciájú hangot kibocsátó, pontszerű hangforrás helyezkedik el. A vonatra egy mikrofont rögzítünk. Milyen határok között változik a mikrofon által észlelt hang frekvenciája? (A hang sebessége c.)

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

❄

Beküldési határidő: 2021. november 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 7. October 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 412): **K. 699.** We have six discs. Each disc has a letter on one side (A, B, C, D, E, F), and a number on the other side (1, 2, 3, 4, 5, 6, in some order). The discs are placed on the table with their letter side up. Given that the sum of the numbers on the discs marked A, B and C is 14, and the sum of the numbers on discs A, D and E is 12, what is the minimum number of discs to be turned over in order to know which number is on which disc? **K. 700.** We have ten cards numbered 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 and 10. The cards are placed on the table in a row, and their numbers are added up in sets of three: first the cards in positions 1, 2, 3; then those in positions 2, 3, 4; followed by positions 3, 4, 5; and so on; finally adding up the numbers on the cards in positions 8, 9, 10. The sums obtained in this way are 14, 18, 24, 23, 24, 21, 16, 12, in this order. What is the sum of the numbers on the cars in the first and last positions? **K. 701.** A flea is sitting on the 0 mark of the number line, ready to jump. With each jump of the flea it moves 3 or 5 units either to the left or to the right. The flea needs to visit every integer from 1 to 20. Find a possible sequence of at most 22 jumps that will let the flea achieve that goal. **K/C. 702.** Five cards were drawn from a deck of 52 French cards. It turned out that none of them are face cards, and there is at least one card from each suit. The sum of the even denominations among them is equal to the sum of the odd denominations. The sum of the spades is 14, the sum of the red cards is 10, and the card with the lowest denomination is a heart. Which cards were drawn? **K/C. 703.** In a positive decimal fraction, the decimal point is shifted four places to the right. The resulting number is four times the reciprocal of the original number. What is the original number?

New exercises for practice – competition C (see page 413): **Exercises up to grade 10: K/C. 702.** See the text at Exercises **K. K/C. 703.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1684.** Prove that there exists no pentagon in which all sides are equal in length and two angles are 60°. **C. 1685.** In a royal dynasty, there are eight brothers. The present king is the eldest brother. As a rule, a brother will come to the throne when he is the oldest of those alive. However, there is a curse on the dynasty: whenever each of three successive brothers comes to the throne, the following brother will die from despair. In how many different ways may the brothers rule? (Only the set of those coming to throne matters.) **C. 1686.** The hypotenuse of the right-angled triangle ABC is AB. The interior angle bisector f drawn from vertex A intersects side BC at point D. Prove that the geometric mean of line segments $AB-BD$ and $AC+CD$ equals the length of angle bisector $f=AD$. (Proposed by *N. Zagyva,* Baja) **Exercises upwards of grade 11: C. 1687.** I found three shopping lists in a shopping bag. The first list included 23 buns, 13 apples and 15 eggs, the second list had 9 buns, 3 apples and 28 eggs, and the third one had 25 buns, 18 apples and 11 eggs. The amount paid for these items on list one was 2021 forints (HUF, Hungarian currency), and the items on lists two and three cost 2031 and 2041 forints, but I cannot remember which sum belongs to which list. Each of the three kinds of products costs a whole number of forints a piece. What is the piece price of each item? (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **C. 1688.** The single mode of a set of data is 2, the median is 3, the mean is 4, and the range is 5. How many elements may the data set have?

New exercises – competition B (see page 414): **B. 5190.** In a table of n rows and k columns, there is -1 written in each field. In each move, one row and one column is selected. Each number in the row is changed to the opposite, and then each number in the column is changed to the opposite. For what values of n and k is it possible to achieve a value of $+1$ in every field of the whole table? (*3 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5191.** We have a wooden set square, but the hypotenuse has been chewed by a rabbit. With the set square we can join points lying close enough, we can extend straight line segments, and we can draw a perpendicular to any line at any point. Can we construct the centre of a given circle however large its size? (*4 points*) (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 5192.** Eight boys decided to play a game of football, four against four, on each of the first seven days of the autumn break. Is it possible to organize the teams so that any set of three boys would play in the same team at least once? (*5 points*) (Based on the idea of *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 5193.** In an acute-angled triangle ABC, $\angle BCA = 45^\circ$, the feet of the altitudes on sides BC, CA, AB are D, E, F, respectively, and the orthocentre is M. Point F divides line segment AB in a ratio $AF : FB = 2 : 3$. G is the point on side AC for which $CG = BM$. Show that the centroid of triangle ABG is M. (*4 points*) **B. 5194.** In a triangle ABC, $\angle ABC = 2\angle CAB$. Side AB touches the inscribed circle at point E, and intersects the angle bisector drawn from C at point F. Prove that $AF = 2BE$. (*4 points*) **B. 5195.** Prove that the inequality $x^p \cdot y^{1-p} < x + y$ holds for every pair of positive real numbers (x, y), and all real numbers $0 < p < 1$. (*3 points*) **B. 5196.** Let $p(x) = 2x + 1$. A is a subset of set $S = \{1, 2, \ldots, 2021\}$ such that it contains at most one of the numbers n, $p(n)$, $p\big(p(n)\big)$ for every n, but this condition will not hold anymore if any extra element of S is added to A. What may be the number of elements in the set A? (*6 points*) **B. 5197.** Let $\mathbb{N}$ denote the set of non-negative integers, and let k be a given positive integer. Is there a monotonically increasing function $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ such that $f\big(f(x)\big) = f(x) + x + k$ for all $x \in \mathbb{N}$? (*6 points*)

New problems – competition A (see page 415): **A. 806.** Four distinct lines are given in the plane, which are not concurrent and no three of which are parallel. Prove that it is possible to find four points in the plane, A, B, C and D with the following properties: (*i*) A, B, C and D are collinear in this order; (*ii*) $AB = BC = CD$; (*iii*) with an appropriate order of the four given lines A is on the first, B is on the second, C is on the third and D is on the fourth line. (Proposed by *Kada Williams,* Cambridge) **A. 807.** Let $n \geqslant 2$ be a given integer. Let G be a finite simple graph with the property that each of its edges is contained in at most n circuits. Prove that the chromatic number of the graph is at most $n + 1$. (Proposed by *Ádám Schweitzer,* Budapest) **A. 808.** Find all triples of positive integers a, b and c such that a, b and c are pairwise relatively prime and $a^2 + 3b^2c^2 = 7^c$. (Proposed by *Nikolai Beluhov,* Bulgaria)

Problems in Physics

(see page 443)

M. 407. An EPS panel is a set of compressed small styrofoam balls. If the panel is broken or sawn, such small balls can easily fall out of it. Measure how many times the density of some of these pellets is greater than the density of the EPS panel.

G. 753. Two 5-metre long vehicles are travelling one after the other on a highway at a speed of 100 km/h. The distance between the cars is 30 m. Once, the car at the back starts overtaking. It accelerates uniformly until the two cars are next to each other. At this moment the speed of the accelerating car is 130 km/h, which remains constant for the rest of the motion. This car finishes the overtaking manoeuvre by positioning itself 30 m ahead of the other car moving at a constant speed. How long did the overtaking last? **G. 754.** Newspaper news on March 20, 2021: "The vast majority of space debris revolve around the Earth at low orbits, i.e. from an altitude of 800 km up to 2000 km, at a speed of 28 000 km/h." *a*) At what altitude can a piece of space debris orbit at a speed of 28 000 km/h? *b*) At what speed can a piece of space debris orbit at an altitude between 800 to 2000 kilometres? **G. 755.** An 80 kg action hero uses a parachute that sinks at a speed of 8 m/s when open. In one scene, he catches the heroine, who weighs 60 kg, in the air and then he opens the parachute. At what speed does the clinging pair reach the ground? From what height should they jump without parachute in order to reach the ground at the same speed? **G. 756.** The gauge pressure in the tyre of a car measured by a meter at a gas station is 1.2 bars. Assuming that neither the volume of the tyre nor the temperature of the air in the tyre change, by what percentage does the number of molecules in the tyre increase if the pressure is increased to the required 2.4 bars?

P. 5346. We move uniformly with a wheelbarrow, which has a big wheel and weighs $G = 100$ N, along the level ground. In this case we have to exert vertically upward forces of magnitude 25 N at the end of each handle of the wheelbarrow. By means of a ruler and a protractor construct and determine the magnitude and the direction of the force $\boldsymbol{F}$ exerted on each handle if we move along a slope of angle of elevation $\alpha = 18^\circ$ downward then upward. Verify the result by calculation. For the sake of simplicity assume that the distance between the ground and the ends of the rods is always the radius of the wheel, and that the centre of mass of the wheelbarrow is also at this distance from the ground. **P. 5347.** An initially stationary object of mass $m = 2$ kg can move frictionlessly along a horizontal surface. At a certain moment a force of constant direction and parallel to the surface is started to be exerted on the object. The magnitude of the force is increasing uniformly from 0 to 20 N in 4 s. *a*) What will the speed of the object be after $t_1 = 3$ s? *b*) How much distance does the object cover in 3 s, if the distance covered in $t_2 = 2$ s is $s_2 = \dfrac{10}{3}$ m? **P. 5348.** In a demonstration flight, a new passenger aircraft travelled at a speed of 85.2 m/s at a height of 150 metres, where the temperature of the air was $15\,^\circ$. This speed is one quarter of the speed of sound there, which is usually formulated as $v = 0.25$ M, i.e. 0.25 Mach. At ground level, the air had a temperature of $16\,^\circ$C. The cruising speed of this aircraft is 900 km/h, which is 0.82 M (0.82 Mach) at the cruising altitude, and at the temperature there. Considering air as an ideal gas and assuming that the temperature of the air varies linearly with the distance measured from the ground, determine *a*) the temperature of the air at the cruising height; *b*) the cruising height. **P. 5349.** A battery of internal resistance 1.5 Ω is connected to two resistors connected in parallel, one of them having a resistance of $R_1 = 40$ Ω and the R_2 resistance of the other resistor is not known. Determine the unknown resistance of the second resistor if it dissipates 60% of the total energy delivered by the battery. **P. 5350.** A thin parallel light beam is aimed at the centre of a transparent sphere, and the rays meet exactly at the opposite point of the surface of the sphere. What is the refractive index of the material of the sphere? **P. 5351.** Why is it not allowed to look into a laser light? The lens in the human eye can focus the light rays into a very small spot of diameter of several μm. The most sensitive cells are in the retina, and here the size of the cells so called rods and cones is in the range of μm. The power of lasers used in everyday life is between 0.1 mW and 100 mW. Calculate how long it takes for the light of the smallest laser, i.e. 0.1 mW, with 80% light absorption, to heat a cell to $50\,^\circ$C at which the cell gets damaged, and how long it takes to heat the cell to a temperature of $100\,^\circ$C at which the cell is totally destroyed. For the sake of simplicity consider the cell as a cylinder which has a base diameter of 5 μm and a height of 7 μm; the density and the specific heat capacity of the cell can be assumed to be the same as those of water. The temperature of the eye can be considered as $36\,^\circ$C, and other effects (as displacements, heat conduction etc.) can be neglected. Compare the gained time with the approximately 0.2 second reaction time of the human eye. **P. 5352.** A closed circular loop of wire having a resistance of R and enclosing a cross section of A is rotated at a constant angular speed of ω in magnetic field of induction B, about that symmetry axis of the loop which lies in the plane of the loop. At what average power can this be done? **P. 5353.** What is the reason that the activity of mined uranium ore is significantly higher than that of the uranium salt which is made from the ore? **P. 5354.** A toy train, equipped with a motor, travels along a circular track of radius R at a constant speed of v. At a distance of $d < R$ there is a point-like sound source, emitting sound of frequency f_0. A microphone is attached to the train. Determine the range of the detected frequency of the sound. (The speed of sound is c.)