3. feladat.[†] Egy R sugarú, vékony, $+Q$ töltéssel egyenletesen töltött szigetelő gyűrű vízszintes síkban helyezkedik el.

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk a gyűrű függőleges szimmetriatengelyén az elektromos térerősséget a gyűrű középpontjától mért z távolság függvényében!

b) Mekkora és milyen irányú a térerősség a gyűrű síkjában, a középpontjától r távolságra, ahol $r \ll R$?

c) A rögzített gyűrű átmérője mentén (pl. egy kifeszített horgászzsinóron) egy $+q$ töltésű, m tömegű pontszerű test mozoghat súrlódásmentesen. A pontszerű testet egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítjük. Mekkora a bekövetkező kis rezgések periódusideje?

4. feladat. Két, ℓ hosszúságú, R_1 és R_2 sugarú, vékony falú szupravezető csőből ágyút készítünk úgy, hogy a csöveket koaxiálisan egymásba helyezzük ($R_2 < R_1$, $R_1 \ll \ell$). A rendszer a súlytalanság állapotában található. A külső cső rögzített, a belső, m tömegű cső pedig szabadon mozoghat a közös szimmetriatengely mentén. Kezdetben mindkét csőben I erősségű áram folyik a palást mentén körbe, a csövek középpontja pedig egybeesik. Ebből a helyzetből a belső csövet a tengely mentén kicsit kitérítjük. Mekkora sebességre gyorsul fel ez a belső cső („lövedék”), mialatt elég messzire távolodik a külső csőtől („ágyútól”)?

Az ütközés hatásfokának és ütközési számának összefüggése

Mint az a középiskolai tananyagból ismert, ha egy m_1 tömegű, v_1 sebességű és egy m_2 tömegű, v_2 sebességű (pontszerű) test tökéletesen rugalmatlanul ütközik, akkor (az impulzusmegmaradásból következően) együtt mozognak tovább

$$v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

sebességgel. (v_0 a két test tömegközéppontjának sebessége, ami az ütközés során nem változik meg.) Mondhatjuk, hogy a testek ütközés utáni u_1 és u_2 sebessége egyforma nagyságú:

$$u_1 = u_2 = v_0, \tag{2}$$

vagy úgy is fogalmazhatunk, hogy

$$u_1 - u_2 = 0. \tag{2*}$$

(Feltételezzük, hogy a testek ütközés előtti és ütközés utáni sebessége egy egyenesbe esik.)

[†]Ez a feladat utólag szerencsés választásnak bizonyult, mert az idei Nemzetközi Fizikai Diákolimpia 2. elméleti feladatának egyik része lényegében megegyezett vele.

Ha ugyanezen testek tökéletesen rugalmasan ütköznek, akkor az impulzus mellett a mozgási energia is megmarad, így ütközés után

$$u_1 = 2v_0 - v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

és

$$u_2 = 2v_0 - v_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

sebességgel mozognak tovább. (Itt v_0 ismét a tömegközéppont sebességét jelöli, amit (1) alapján számítunk ki.) Láthatjuk, hogy fennáll:

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1. \tag{5}$$

E kétféle speciális, „szélsőséges” eset között léteznek „átmeneti” ütközésfajták is, amelyekben a két test ütközés utáni sebességkülönbsége épp a fenti két eset (0 és az ütközés előtti sebességkülönbség) közé esik. Ezeket jellemezzük az ütközési számmal:

$$k = \frac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1}. \tag{6}$$

Látható, hogy a tökéletesen rugalmatlan ütközésre k értéke 0, a tökéletesen rugalmasra pedig $k = 1$. A köztes értékeket szokás százalékban is kifejezni, pl. a „30%-ban rugalmas” ütközés 0,3-es ütközési számot jelent.

Azonban vigyázzunk, mert a százalékban kifejezett ütközési szám azt a téves képet sugallhatja, hogy a kezdeti összes mozgási energia 30%-a maradt meg az ütközés során. Valóban, a tökéletesen („100%-ban”) rugalmas ütközés során ($k = 1$ érték mellett) a kezdeti összes mozgási energia 100%-a megmarad, azonban a tökéletesen rugalmatlan ütközés során ($k = 0$ érték mellett, vagyis „0%-ban rugalmas” ütközésnél) a megmaradó mozgási energia nem feltétlenül 0%. A köztes esetnek megfelelő ütközési számok és az energia megmaradó hányada között sem ilyen egyszerű az összefüggés.

Tekintsük először a tökéletesen rugalmatlan ütközés során fellépő energiaváltozást (-veszteséget):

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{1}{2}m_2v_2^2.$$

Felhasználva (1)-et, algebrai átalakítások után ez adódik:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\,\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2. \tag{7}$$

Tanulságos képlet: mint afféle mozgási energia, „egykettedszer tömegszer sebességnégyzet” alakú. A „tömeg” az ütköző testek tömegei harmonikus közepének fele, a „sebesség” pedig a testek relatív, egymáshoz képesti sebessége (vagy a külső viszonyítási rendszerből nézve a testek sebességkülönbsége). Az ütközés után megmaradt energia aránya a kezdetihez képest

$$\frac{E_{\text{után}}}{E_{\text{előtt}}}=\frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2},$$

ami (1) behelyettesítése és algebrai átalakítások után így is felírható:

$$\frac{E_{\text{után}}}{E_{\text{előtt}}}=\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)\big(m_1v_1^2+m_2v_2^2\big)}. \tag{8}$$

Jól látható, ha a két test szemből ütközik azonos impulzussal ($m_1v_1=-m_2v_2$), akkor ez az arány 0, de más esetben *nem az,* jóllehet az ütközés tökéletesen rugalmatlan.

Értelmezzük általánosan az ütközés hatásfokát mint az ütközés utáni (megmaradt, „hasznos”) és az ütközés előtti (meglévő összes, „befektetett”) mozgási energia hányadosát:

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2}. \tag{9}$$

Minden ütközésre érvényes az impulzusmegmaradás törvénye:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2. \tag{10}$$

Ez (6)-tal egyenletrendszert alkot, amelyet (pl. behelyettesítős módszerrel) végigszámolva tanulságos eredmények adódnak az ütközés utáni sebességekre:

$$u_1=\frac{m_1v_1+m_2v_2+km_2(v_2-v_1)}{m_1+m_2} \tag{11}$$

és

$$u_2=\frac{m_1v_1+m_2v_2+km_1(v_1-v_2)}{m_1+m_2}. \tag{12}$$

($k=0$-ra visszakapjuk (2)-t, $k=1$-re pedig a (3) és (4) összefüggéseket.)

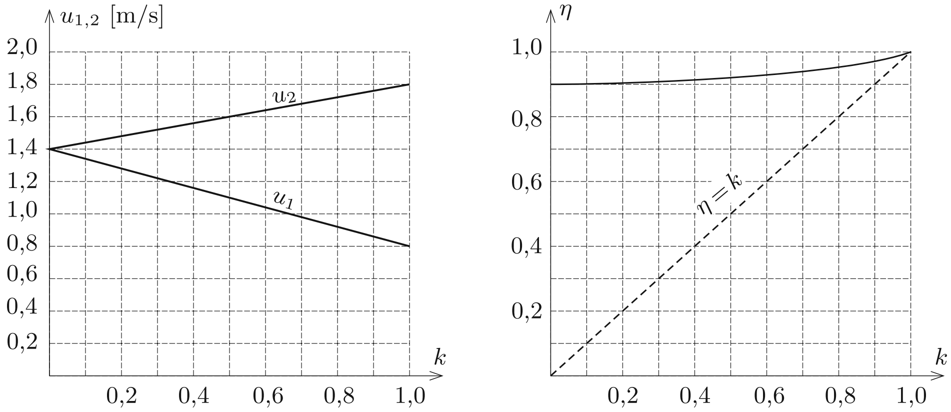
A (11) és (12) kifejezéseket beírva (9)-be, egy komoly odafigyelést és tagok ügyes csoportosítását igénylő számolás után kapjuk:

$$\eta=\frac{k^2m_1m_2(v_1-v_2)^2+(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)\big(m_1v_1^2+m_2v_2^2\big)}. \tag{13}$$

Látható, hogy $k=0$ esetén visszakapjuk a (8) összefüggést, és $k=1$ esetén pedig $\eta=1$.

Érdekességképpen kiszámítottuk és grafikusan is ábrázoltuk az $m_1=2$ kg, $v_1=2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $m_2=3$ kg, $v_2=1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ esetben az u_1, u_2 és η függését k-tól (*1. ábra*). Az egyes függvények (a sebességek mértékegységét elhagyva):

$$u_1=\frac{7-3k}{5},\qquad u_2=\frac{7+2k}{5}\qquad\text{és}\qquad \eta=\frac{6k^2+49}{55}.$$



1. ábra

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet kísérletileg egyszerűen meghatározni egy ütközés hatásfokát és ütközési számát egy speciális esetben. Ha h_1 magasságból leejtünk egy kicsiny labdát, az (ha a közegellenállás hatása elhanyagolható) $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ sebességgel ér talajt (ütközik a Földdel), és onnan visszapattanva az indulási (ütközés utáni) u_1 sebessége és a legnagyobb emelkedésének h_2 magassága között szintén fennáll: $u_1 = \sqrt{2gh_2}$. Mivel az ütközésben a Föld m_2 tömege „végtelen nagynak” tekinthető, és a sebessége $v_2 = u_2 = 0$, ezért (11)-ből (m_2-vel való egyszerűsítés után) $u_1 = -kv_1$ következik. (A negatív előjel az ellentétes irányú mozgásra utal, ezt a továbbiakban elhagyjuk.) Így

$$k = \frac{u_1}{v_1} = \sqrt{\frac{2gh_2}{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \tag{14}$$

vagyis a visszapattanási és az elejtési magasság hányadosának négyzetgyöke az ütközési szám. A hatásfokot (9)-ből kaphatjuk meg (a Föld mozgási energiája az ütközés előtt és után is nulla):

$$\eta = \frac{u_1^2}{v_1^2} = \frac{h_2}{h_1} \ (= k^2), \tag{15}$$

vagyis a hatásfok a visszapattanási és az elejtési magasság hányadosa. (Ebben a speciális esetben, a Földről visszapattanásnál a hatásfok éppen az ütközési szám négyzete, de ez általában nem igaz.)

Kérdés, milyen m_1, v_1, m_2 és v_2 paraméterek esetén teljesülhet, hogy $\eta = k$. (Természetesen a triviális eseteket, amikor mindkettő 0 vagy 1, nem vesszük számításba.)

Keressük tehát az $\eta = k$ egyenlet gyökeit. A (13) képletben vezessük be a következő jelöléseket (mindegyikük nemnegatív):

$$a \equiv m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2; \quad b \equiv (m_1 + m_2)\big(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2\big); \quad c \equiv (m_1 v_1 + m_2 v_2)^2,$$

és jegyezzük meg, hogy $a+c=b$ (hiszen épp emiatt lesz $k=1$-re $\eta=1$). Így az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{ak^2+c}{b}=k,$$

átrendezve:

$$ak^2-bk+c=0, \quad \text{vagyis} \quad ak^2-(a+c)k+c=0.$$

Ennek gyökei a megoldóképlet szerint:

$$k_{1,2}=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4ac}}{2a}=\frac{a+c\pm(a-c)}{2a}.$$

Az egyik gyök: $k_1=1$, ezt a triviális megoldást már eddig is ismertük. A másik gyök: $k_2=\frac{c}{a}$. Ez utóbbi csak akkor lehet hatásfok, ha kisebb 1-nél (és csak akkor 0, ha $c=0$, ezt a (8) utáni megjegyzésben már tisztáztuk).

A $\frac{c}{a}<1$, vagyis $c<a$ feltétel akkor teljesül, ha

$$\left(m_1v_1+m_2v_2\right)^2<m_1m_2(v_1-v_2)^2.$$

Zárójelfelbontás, rendezés, szorzattá alakítás után kapjuk: $\eta=k$ teljesülésének (szükséges és elégséges) feltétele (a triviális $k=0$ és $k=1$ eseteken kívül) az, hogy:

$$4m_1m_2v_1v_2<\left(m_1v_1^2-m_2v_2^2\right)(m_2-m_1), \tag{16}$$

és ekkor

$$\eta=k=\frac{\left(m_1v_1+m_2v_2\right)^2}{m_1m_2(v_1-v_2)^2}. \tag{17}$$

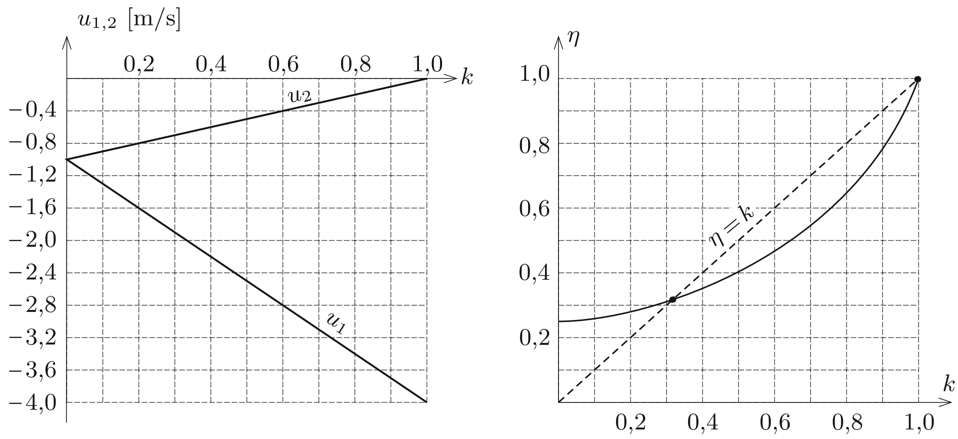
Egy konkrét példával: $m_1=1$ kg, $v_1=2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m_2=3$ kg, $v_2=-2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ adatok mellett (a sebességek mértékegységét most is elhagyva) az egyes függvények:

$$u_1=-3k-1, \qquad u_2=k-1 \qquad \text{és} \qquad \eta=\frac{3k^2+1}{4}.$$

A függvények grafikonját a *2. ábra* mutatja.

Mindkét ábrán berajzoltuk az $\eta=k$ egyenest is. A 2. ábrának megfelelő paraméterek mellett (16) teljesül, az 1. ábrához tartozó adatoknál pedig nem, így az első esetben nincs, a másodikban pedig van triviálistól különböző megoldása az $\eta=k$ egyenletnek.

Megjegyzés. A (16) feltételt úgy is megkaphatjuk, hogy megvizsgáljuk a (13)-ban kapott $\eta(k)$ függvény meredekségét az $\eta=1$ helyen. Ha ez nagyobb, mint 1, akkor a parabolaív a végig 1 meredekségű $\eta=k$ egyenest a $[0;1[$ intervallumban metszi másodszor, tehát van másik, nem triviális $\eta=k$ eset. Ha ez a meredekség kisebb 1-nél, akkor a görbék másik metszéspontja valahol az $]1;\infty[$ intervallumban van, de ennek nincs fizikai tartalma. Lehet a keresett meredekség éppen 1, ekkor az egyenes itt érinti a parabolát, ekkor sem adódik másik $\eta=k$ eset.



2. ábra

A vizsgálandó meredekség a (13) függvény $k = 1$ helyen vett deriváltértéke:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}k}(1) = \frac{2m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)\big(m_1v_1^2 + m_2v_2^2\big)}.$$

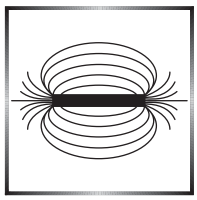
A fizikailag értelmezhető második megoldás létezésének feltétele:

$$\frac{2m_1m_2(v_1 - v_2)^2}{(m_1 + m_2)\big(m_1v_1^2 + m_2v_2^2\big)} > 1,$$

és ez egyenértékű (16)-tal.

Siposs András
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium (Budapest)

Fizika feladatok megoldása



P. 5303. *Egy puska* 500 m/s *sebességű lövedéke fába csapódik, és ott* 5 cm-*es úton lefékeződik. A lövedék tömör,* 4 cm *hosszú,* 7800 kg/m^3 *sűrűségű fémhengernek tekinthető, amelynek fékeződése időben egyenletes.*

a) Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora mechanikai feszültség alakul ki a lövedék lefékeződése során!

b) Becsüljük meg, hogy mekkora elektromos feszültség jön létre a lövedék eleje és vége között az elektronok tehetetlensége miatt!

(*5 pont*) *Holics László* feladata nyomán