Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

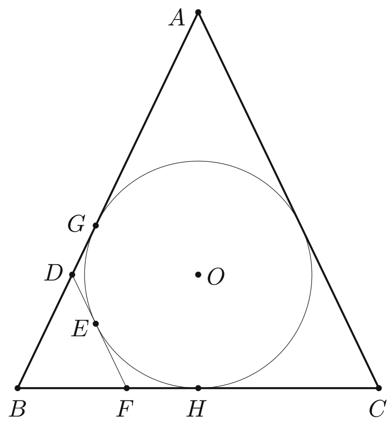
a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 5110. *Egy egyenlő szárú háromszögbe írható körnek az oldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből három kis háromszöget vágnak le. Bizonyítsuk be, hogy az alapra illeszkedő kis háromszögek alaphoz tartozó magassága megegyezik a háromszögbe írható kör sugarával.*

(*3 pont*)

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. A beírt kör az AB oldalt a G, a BC oldalt pedig a H pontban érinti. (Mivel a háromszög egyenlő szárú, ezért H az alap felezőpontja.) A beírt kör AC oldallal párhuzamos érintője a kört az E pontban érinti, továbbá az AB oldalt a D, a BC alapot pedig az F pontban metszi.



1. ábra

Az ABC háromszög hasonló a DBF háromszöghöz, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság arányát a kerületek arányából fogjuk kiszámolni.

A DBF háromszög kerülete:

$$DB+BF+FE+ED=DB+BF+FH+DG=$$
$$=(DB+DG)+(BF+FH)=BG+BH=2\cdot BH=BC=a.$$

Az ABC háromszög kerülete $a+b+c$, ezért a hasonlóság aránya

$$\frac{a}{a+b+c}.$$

Legyen T az ABC háromszög területe, r a beírt körének sugara, s pedig a félkerülete. Az ABC háromszögben $m=AH$ az alaphoz tartozó magasság, így a DBF

háromszög D-hez tartozó magassága az ismert $T = rs$ összefüggés felhasználásával:

$$m \cdot \frac{a}{a+b+c} = \frac{ma}{a+b+c} = \frac{2T}{a+b+c} = \frac{2rs}{a+b+c} = \frac{2rs}{2s} = r.$$

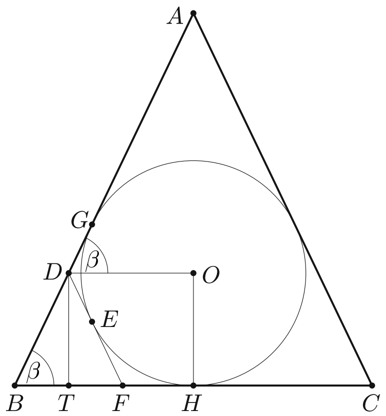
Ezt kellett bizonyítanunk.

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

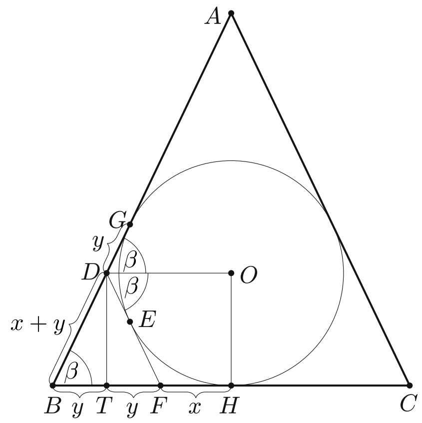
II. megoldás. Az első megoldás jelöléseit megtartjuk (*2. ábra*).

A DBF háromszög szempontjából az eredeti ABC háromszög beírt köre már a DF oldalhoz hozzáírt kör. A hozzáírt kör középpontja egy belső és két külső szögfelező metszéspontja. A DBF egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei $DBF\sphericalangle = BFD\sphericalangle = \beta$, így a D csúcsnál fekvő külső szög $ADF\sphericalangle = 2\beta$. E szög felezője, a DO félegyenes tehát β nagyságú szögekre osztja ezt a szöget. Látjuk, hogy a DBF és az ADO szögek egyállásúak, vagyis $DO \parallel BC$. Tudjuk még, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, vagyis $OH \perp BC$. Innen már azonnal adódik, hogy a D, illetve O pontból a BC-re állított merőleges szakaszok egyenlő hosszúak: $DT = OH = r$.

Bognár András Károly (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)



2. ábra



3. ábra

III. megoldás. Egészítsük ki az előző megoldások jelöléseit: legyen a D pontból a BC alapra bocsátott merőleges talppontja T.

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségét fogjuk többször felhasználni. A *3. ábra* jelöléseivel:

$$EF = FH = x, \qquad DE = DG = y, \qquad BD = FD = x + y.$$

A T pont felezi a BF szakaszt, továbbá a B pontból a körhöz húzott érintőszakaszok is egyenlő hosszúságúak, tehát

$$BH = BF + FH = 2BT + x,$$

illetve

$$BH = BG = BD + DG = DF + DG = x + y + y = x + 2y.$$

A BH kétféle felírása alapján $BT = y = DG$. Mivel az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így $OG \perp AB$. A BTD és DGO derékszögű háromszögek egyik befogója és a második megoldás alapján hegyesszögei is megegyeznek, tehát a két háromszög egybevágó, amiből $DT = OG = r$.

Deák Gergely (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 146 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 100 versenyző, 2 pontos 23, 1 pontos 16 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 6 tanuló. Nem versenyszerű 1 tanuló dolgozata.

B. 5115. *Ali erszényében n darab érme lapul, Babának pedig van $n-1$ darab, kezdetben üres erszénye. Baba a következő játékot játssza: a kezdetben egy erszényben lévő érméket szétosztja két erszénybe, egyikbe a_1, másikba b_1 érmét téve ($a_1, b_1 > 0$), és a táblára felírja az a_1b_1 szorzatot. Majd innentől (az előzőhöz hasonlóan) a k-adik lépésben ($k = 2, 3, \ldots$) kiválaszt egy legalább két érmét tartalmazó erszényt, a benne lévő érméket szétosztja két üres erszénybe, egyikbe a_k, másikba b_k érmét téve ($a_k, b_k > 0$), és a táblára felírja az a_kb_k szorzatot.*

A játék akkor ér véget, ha minden erszénybe 1-1 *érme került. Ekkor Ali kiszámolja a táblán lévő a_kb_k szorzatok összegét és ennyi aranyat ad Babának.*

Legfeljebb mennyi aranyat kaphat Baba?

(*5 pont*)

I. megoldás. Az n szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy Babának mindig $n(n-1)/2$ a nyeresége.

(I) $n = 1; 2$ esetén triviális az állítás.

(II) Tegyük fel, hogy egy $n = k$-ig minden nála kisebb, vagy egyenlő pozitív egészre igaz az állítás.

(III) Igaz-e $n = k + 1$-re?

Osszuk a $k + 1$ aranyat tetszőlegesen két, $a_1 = m > 0$ és $b_1 = k + 1 - m > 0$ részre. A táblára kerülő első szorzat ilymódon: $a_1b_1 = m(k + 1 - m)$. Innentől az indukciós feltevés alapján az m érmés erszény miatt $m(m-1)/2$, a másik, $k + 1 - m$ érmés erszény miatt pedig $(k + 1 - m)(k - m)/2$ érme lesz Baba nyereménye. Így Baba teljes nyereménye:

$$\begin{aligned}
&m(k+1-m) + m(m-1)/2 + (k+1-m)(k-m)/2 = \\
&= m(m-1)/2 + m(k+1-m)/2 + m(k+1-m)/2 + (k+1-m)(k-m)/2 = \\
&= m(m-1+k+1-m)/2 + (k+1-m)(m+k-m)/2 = \\
&= mk/2 + (k+1-m)k/2 = k(m+k+1-m)/2 = k(k+1)/2 = n(n-1)/2.
\end{aligned}$$

II. megoldás. Rajzoljunk egy n csúcsú (kezdetben) teljes gráfot. A gráf csúcsai az n darab érmét jelentik, míg a gráf élei azt ábrázolják, hogy az adott két érme egy erszényben van-e. Abban a lépésben, amikor két érme külön erszénybe kerül, töröljük le a megfelelő élt! Gondoljuk végig, mi történik, ha egy $a_k + b_k$ érméből álló erszényt két, egyenként a_k és b_k érmés erszényre osztunk. Az $a_k + b_k$ érmés erszénynek a gráfban megfelelő $a_k \cdot b_k$ darab élt le kell törölnünk. Tehát a táblára írt $a_k b_k$ számok pontosan az adott lépés során a gráfban letörölt élek számával egyeznek meg. Mivel a gráfban végül nincs egyetlen él sem (és minden élt pontosan egyszer töröltünk le),

$$\sum_i a_i b_i = n(n-1)/2,$$

azaz Baba nyereménye valóban bármely esetben $n(n-1)/2$.

III. megoldás. Jelölje a k-adik lépés után egy n-dimenziós v_k vektor az érmék elhelyezkedését. A v_k i-edik koordinátája $x_{k,i}$ annyi, ahány érme a k-adik lépés után az i-edik erszényben van. Vizsgáljuk

$$|v_k|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i}^2$$

értékének változását. Tegyük föl, hogy a k-adik lépésben a c-edik erszényből vettük ki a benne levő pénzt, és szétraktuk a d-edik és az e-edik erszénybe. Ekkor

$$x_{k-1,c} = a_k + b_k, \quad x_{k-1,d} = x_{k-1,e} = 0$$

és $x_{k,c} = 0$, $x_{k,d} = a_k$, $x_{k,e} = b_k$. Ezeken kívül c, d és e kivételével minden i-re teljesül, hogy $x_{k-1,i} = x_{k,i}$.

Nézzük $|v_k|^2 - |v_{k-1}|^2$ értékét.

$$\begin{aligned} |v_k|^2 - |v_{k-1}|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_{k,i})^2 - x_{k-1,i})^2 = \\ &= x_{k,c}^2 + x_{k,d}^2 + x_{k,e}^2 - x_{k-1,c}^2 - x_{k-1,d}^2 - x_{k-1,e}^2 = \\ &= a_k^2 + b_k^2 - (a_k + b_k)^2 = -2a_k b_k. \end{aligned}$$

Tehát a k-adik lépésben a v vektor hosszának négyzete $2a_k b_k$-val csökken, ezért az összes lépés alatt pont kétszer annyival csökken, mint amennyi a táblán lévő szorzatok összege. Kezdetben $v_0 = (n, 0, 0, \ldots, 0)$, így $|v_0|^2 = n^2$. Az utolsó lépést követően pedig $v_u = (1, 1, 1, \ldots, 1)$, tehát $|v_u|^2 = n$. Mivel összesen $(n^2 - n)$-nel csökken a vektor hosszának a négyzete, a felírt szorzatok összege minden esetben $(n^2 - n)/2$. Tehát Baba ennyi érmét kap.

Terjék András (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

101 dolgozat érkezett. 5 pontos 85, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe: 1 dolgozat.