A matekes pedagógus – Eigel Ernő emlékére

1990. január első hetében segélyeket vittünk Gyuláról Csíkszeredába (Trabant, Wartburg gépkocsikkal, IFA teherautóval). Az alföldi embereknek nehéz volt a mínusz húsz-huszonhét fokos hideg, de megérte. Ekkor találkoztunk először *Eigel Ernővel,* aki a történelmi Magyarország legnagyobb gimnáziumát vezette. A több mint négyszáz éves iskola hamarosan *Márton Áron* püspök nevét vette fel. Felemelő volt a találkozás, bozontos szemöldöke, mint a *Mikulásé,* haja már „őszbe csavaradott", de hihetetlenül csillogó szeme nemcsak derűt, de okosságot, szellemességet sugárzott. Hamarosan kiderült, hogy tanítványai hozsannáztak a matematikaóráinak érdekessége és különleges tanítása miatt.

Eigel Ernő 1932. december 30-án született Csíkszeredán és 2021. március 12-én hunyt el Gyulán, Magyarországon. Felmenői Csehországból az 1810-es években települtek Erdélybe, Borszék-Csíkszereda térségébe, katolikus vallású területére. Mesteremberek voltak, üveggyártással foglalkoztak, hiszen a borszéki savas víz palackozását végezték. A harmadik nemzedék már elfelejtette német nyelvét, csak magyar nyelven beszéltek, magukat magyar-székely embereknek tartották. A huszadik században értelmiségi foglalkozást űztek.

Tehetségét, okosságát környezete hamar felismerte. Alig múlt tizenkét éves, amikor 1944-ben Budapestre menekültek. A kamaszodó fiú két éven keresztül a Keleti Károly utcában, az *Érseki Katolikus Gimnázium*ban tanult. Tőle hallhattuk, hogy kezdetben társai *„erdélyi kutyának"* nevezték, de amikor elsőre a legjobb matematikai dolgozatot megírta, már *„Ernő"* lett. 1946 őszén visszatértek Csík vármegyébe, Borszékre. Bentlakásos diákként Csíkszeredán folytatta és fejezte be gimnáziumi tanulmányait. Már ekkor kijelentette: *a matematika a sorsommá vált.* Ugyanakkor kiderült, hogy zenei adottsága-tehetsége is kimagasló volt. Négy éven át a matematika mellett zenélt, nagy, négyszólamú kórust vezetett, és azt vezényelte is. Sokat vállalt. Tanárai könnyíteni akartak munkáján, s kérdezték tőle: miben segíthetnénk? A válasz rövid volt: mentsenek fel a testnevelés alól. Megtették.

A *Babeş–Bolyai Tudományegyetemen* tanult matematikát. Három-négy hét múlva kiderült, hogy valóban sorsává vált a matematika. A diploma átvétele után Csík megyében, a baróti gimnáziumban kezdte a tanítást. Egy év múlva igazgatóvá választották. Az 1956-os forradalom után ugyan nem bántották, de leváltották igazgatói posztjáról. Jól járt.

Végre taníthatott, s azt, amit nagyon szeretett, ráadásul a csíkszeredai gimnáziumban. *Bögözi Mihállyal* együtt országos élvonalba emelte a gimnázium matematika-fizika oktatását. *Eigel Ernő* célja ez volt: *jól tanítani és a magyar értelmiséget magasra emelni.* E mögött nemcsak a tehetség áll, de a jó tanár tanítási módszere, ami a jó tanulót felemeli. Egyik tanítványa, aki kiváló matematikus lett, a következőket mondta: *Eigel Ernő* sokkal nagyobb mozgásszabadságot biztosított nekem, mint a többi diáknak, és ez nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy a matematika tanulmányozásában elmélyülhessek.

Eigel Ernő fontosnak találta a fiatal pedagógusok segítését is. Kiváló óraelemző volt. Egykoron nála kezdők tisztelettel meséltek a vele való találkozásról. *Eigel Ernő* megnézte tanóráikat, és három perc alatt meg tudta mondani, mik voltak az óra erősségei és gyenge pontjai. Nemcsak ezekről mondta el a véleményét, hanem felvázolta a lehetőségeket is, pl. ő hogyan csinálná. Később már csak azért nézte meg őket, hogy fejlődésüket figyelje. Mindig segítő szándékkal és nem ellenőrző szervként látogatott. Ő is meghívta óráira a kezdőket, akik szívesen mentek hozzá hospitálni, rengeteget lehetett tőle tanulni. Általában is segítőkész volt a kezdő tanárokhoz: a fiatal tanárnőkhöz, a fiatal tanár urakhoz egyaránt, akik csak felnézni tudtak és tudnak rá.

Kérdeztük tőle egyszer, hogy tanításának mi a titka? Egyszerű, mondta: a hagyományos oktatás szerint a tanuló áll a táblánál, a tanár nézi, a többieknek a *„nyakizmát fejleszti”*. Nehezen felírnak a táblára egy *„fejleményt”*: $x+3+10y\ldots$, a hatékonyság nagyon kicsi. A *mateket* viszont így kell tanítani, ez a megoldás: reprezentatív-elmélet megismerése; két feladat közös megbeszélése; tíz-húsz feladat önálló megoldása (ez már harmadik-negyedik tanóra), miközben a tanár megy fel-le, s nézi, ki-ki meddig jutott el, közben súg neki, ez itt nem jó vagy nagyon jó stb. Van, aki már a nyolcadik feladatnál jár, más még a másodiknál, de mindegyikük saját maga dolgozik az órán. Aztán a diák bemutatja a munkáját, a többiek kérdezik, hogyan csinálta … Ehhez kapcsolódhat az unokája kedves története is, aki mikor elkezdte az iskolát, *„tiszta fejjel”* könnyen meg tudta oldani a közismert féltéglás-egész téglás kis feladatocskát. Miután elvégezte a gyermek az első osztályt, a nagyapa (*Ernő bácsi*) újból feladta unokájának ugyanazt a fejtörőt, akinek ekkor már nem sikerült a megoldás. Gondolkodását az iskola sablonokba szorította, ami nem segített, mondván még nem jutottak el ahhoz az anyaghoz. Tanulságos a történet.

1994-től fogva fél évtizeden keresztül matematikát tanított Gyulán az *Erkel Ferenc Gimnáziumban.* Diákjai itt is nagyon tisztelték és szerették, bár a kezdetekben egy kicsit tartottak tőle. A gyulai diákok az első hónapokban csak „az öreg román” kifejezést használták a háta mögött, de néhány hónap múltán már úgy szólították: *Ernő bácsi.*

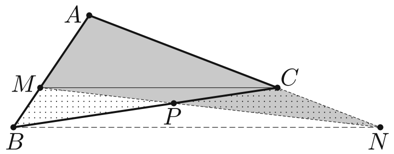
A jó tanár ennél szebb elismerést nem ismer.

Válogatás egy matematikatanár gyűjteményéből

A következő feladatok *Eigel Ernő* két feladatgyűjteményéből – *Síkgeometriai feladatok, Térgeometriai feladatok* – valók. A feladatok bemutatásakor lényegében a könyvekben szereplő megoldásokat követtük, azokat részben kiegészítettük, és a módszertani megjegyzések mellett igyekeztünk megmutatni azt is, ha lehet, hogyan segíthet pl. a *GeoGebra* a megoldások megsejtetésében vagy a viszonylag bonyolult problémák szemléltetésében.

Az emlékezés mellett a diákok és a kollégák figyelmét is szeretnénk felhívni erre a két kiváló könyvre.

1. *Legyen ABC háromszög AB oldalán M egy tetszőleges mozgó pont. B-ből CM egyenessel húzott párhuzamos egyenes az AC egyenesét az N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AMN háromszög területe nem változik, ha az M pont mozog az AB szakaszon.* **[EE/I/25.]**

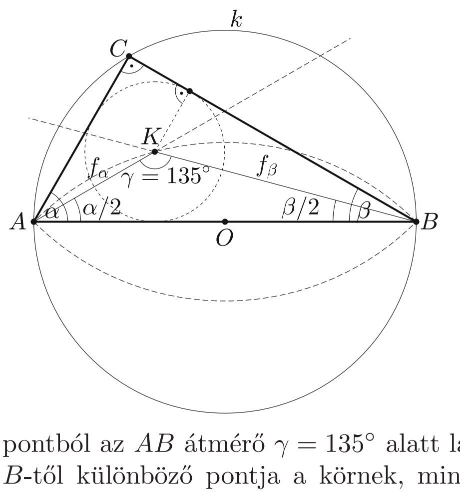


Megoldás. A feltételek alapján az $MBNC$ négyszög létezik (M belső pont), és trapéz ($MC \parallel BN$). Legyen P az $MBNC$ trapéz átlóinak metszéspontja.

Az MBN háromszög és a CBN háromszög területe egyenlő, mivel BN oldaluk közös, és az ezen oldalhoz tartozó magasságuk az $MC \parallel BN$ miatt egyenlő. Ebből a két egyenlő területből kivonva a BNP háromszög területét, kapjuk, hogy az MBP háromszög és a CPNháromszög (nem szükségszerűen egybevágók) területei megegyeznek. Ezt felhasználva, és a konstrukciót figyelembe véve kapjuk, hogy $t_{AMN} = t_{AMPC} + t_{CPN} = t_{AMPC}+t_{MBP} = t_{ABC}$. Mivel az ABC háromszög fix volt, így a területe sem változott, állandó maradt, amivel igazoltuk állításunkat.

Az $A = M$ esetén nem keletkezik háromszög, nincs mit bizonyítani. $M = B$ esetén pedig a keletkezett háromszög megegyezik az ABC háromszöggel, így az állítás nyilvánvaló. Azt, hogy az AMN háromszög területe (t_{AMN}) állandó, a *GeoGebra* dinamikus funkciója az M pont mozgatásával sejteti ($= t_{ABC}$), hiszen az AMN háromszög „rásimul" az ABC háromszögre.

2. *AB egy adott kör átmérője, C mozgó pont a körön. Határozzuk meg az ABC háromszögekbe írható körök K középpontjainak mértani helyét, ha a C befutja a teljes kört.* **[EE/I/285/a]**



Megoldás. Legyen először a C pont A-tól és B-től különböző pontja a körnek. Ekkor *Thalész* tétele miatt az $ACB\sphericalangle = 90°$ lesz. Ha az A csúcsnál lévő szöget α-val, a B csúcsnál lévő szöget β-val jelöljük, akkor a háromszögek belső szögeinek összegét kihasználva $\alpha + \beta = 90°$. Mivel a háromszögbe írható kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja ($K = f_\alpha \cap f_\beta$), ezért az ABK háromszög AB oldalán fekvő szögei $\frac{\alpha}{2}$, illetve $\frac{\beta}{2}$, amelyek összege 45°. Így az $AKB\sphericalangle = \gamma = 135°$, ami azt jelenti, hogy a K pontból az AB átmérő $\gamma = 135°$ alatt látszik, tehát a K pont, ha C pont A-tól és B-től különböző pontja a körnek, mindig az AB átmérő 135°-os látószögkörívpárján van. Ha a C pont megegyezik A-val vagy B-vel, akkor nem keletkezik az ABC háromszög, így beírható kör sem, tehát a megoldáshoz nem tartozik az AB átmérő két végpontja.

Kérdés még, hogy a látószögkörív-párok bármely, A-tól és B-től különböző K' pontjához tartozik-e az eredeti k körön lévő C' pont. Tükrözzük tengelyesen az AB átmérőt AK' és BK' egyenesére, ezen tükörképek metszéspontja pedig legyen C'. Az $AC'B\sphericalangle = 90°$ lesz a $\gamma = 135°$ és az $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45°$ miatt ($AK'B$ háromszögben), így a *Thalész*-tétel megfordítása adja, hogy C' rajta lesz a k körön, miközben a K' a tükrözés miatt a belső szögfelezők metszéspontja is, tehát a beírható kör középpontja. Így a keresett mértani hely az AB szakaszra rajzolt 135°-os teljes látószögkörív-pár, kivéve az A és a B pontot.

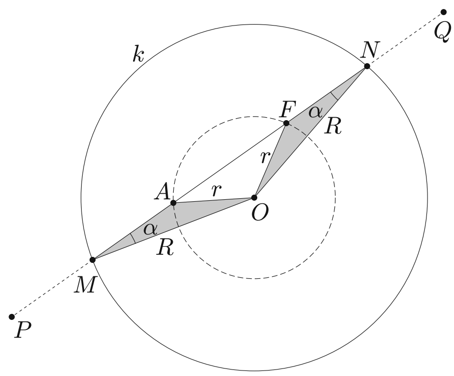
A megoldás megsejtéséhez (nem bizonyításához) a *GeoGebra* nyomvonal funkciója ismét segít, hiszen a C pontot végigfuttatva a körön, kirajzolódik a két körív.

3. *Legyen A pont a k körlemez egy tetszőleges belső, a középponttól különböző, rögzített pontja, és MN változó szelő, amely átmegy az A ponton. Legyen P, illetve Q az A-nak az M-re, illetve az N-re vonatkozó tükörképe. Mi lesz a PQ szakasz F felezőpontjának a mértani helye, ha M befutja a körvonalat?* **[EE/I/125.]**

Megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az O pont nem illeszkedik az MN húrra.

A konstrukció és a jelölések alapján:

$$PF = \frac{PQ}{2} = \frac{PA + AQ}{2} =$$
$$= \frac{2MA + 2NA}{2} =$$
$$= MA + NA = MN,$$
$$MA = PM = PF - MF =$$
$$= MN - MF = FN.$$



Mivel az MON háromszög egyenlő szárú, mert $OM = ON := R$, így $OMN\sphericalangle = = ONM\sphericalangle$, amikből következik, hogy $OMA\triangle \cong ONF\triangle$, ami azt jelenti, hogy $OF = OA =$ állandó $:= r$. Ez annyit jelent, hogy az F felezőpont állandó, $r = OA$ távolságra van az O ponttól, és ezért a mértani hely az O középpontú, $r = OA$ sugarú körön van.

Ha O illeszkedik az MN húrra, akkor $MA = FN$ hasonlóan igaz, és az egybevágó háromszögek keletkezése nélkül $OF = OA =$ állandó $:= r$ egyszerűen adódik.

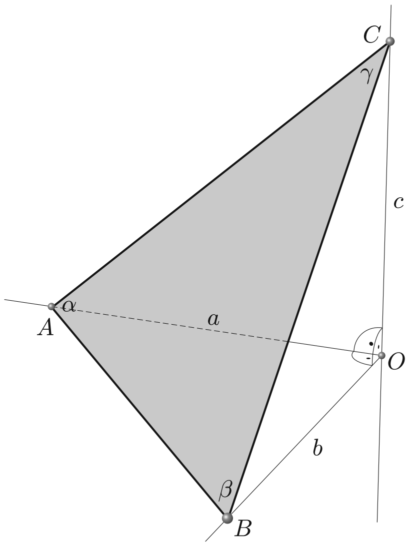
Azt kellene belátni még, hogy a várt mértani hely (O középpontú, $r = OA$ sugarú kör) minden F' pontja esetén F' felezi az eredeti konstrukció alapján kapott PQ szakaszt. Ha F' megegyezik A-val vagy A-nak O-ra vonatkozó tükörképével, akkor ez nyilvánvaló. Ha F' nem egyezik meg sem A-val, sem A-nak O-ra vonatkozó tükörképével, akkor a keletkezett egyenlő szárú háromszögek okán $OMA\triangle \cong ONF'\triangle$, vagyis $F'N = MA$. Így $PF' = F'A + 2MA$, illetve

$$QF' = F'N + NQ = F'N + NA = F'N + F'A + F'N =$$
$$= F'A + 2F'N = F'A + 2MA,$$

ami az F' pont felező tulajdonságát igazolja. Tehát a megoldás az O középpontú, $r = OA$ sugarú kör minden pontja.

Ismét segít a feladat megoldásában a *GeoGebra* nyomvonal funkciója, hiszen az M körbefuttatásakor látható az eredetivel koncentrikus kör, a remélt mértani hely. A bizonyítást nem mellőzhetjük.

Ha $A = O$ lenne, akkor a mértani hely az O pont lesz. Itt is segít a *GeoGebra,* de az olvasóra bízott indoklás hasznos gyakorlás lehet.



4. *Az O közös pontból kiinduló három félegyenes páronként egymásra merőleges (derékszögű triéder), és a félegyenesek egy-egy tetszőleges, O-tól különböző pontja legyen A; B és C. Igazoljuk, hogy az így keletkezett ABC háromszög bármely helyzetében hegyesszögű.* **[EE/II/I.10.]**

Megoldás. A kezdeti feltételek, a konstrukció és a jelölések alapján háromszor alkalmazva *Pitagorasz* tételét, kapjuk:

$$OA := a; \quad OB := b; \quad OC := c,$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}\,; \quad BC = \sqrt{b^2 + c^2}\,;$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}\,.$$

Ezek után az ABC háromszögben pl. a BC oldalra és α-ra felírhatjuk a koszinusztételt, azt rendezzük:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + c^2 + a^2 + b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Mivel a jobb oldal pozitív, így $\cos\alpha > 0 \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (háromszög belső szögéről van szó) $\Rightarrow \alpha$ hegyesszög. Hasonlóan látható be β-ra és γ-ra is, tehát az ABC háromszög hegyesszögű. Mivel az ABC háromszög létezik, ezért az $\alpha; \beta; \gamma = 0^\circ$ ($\cos 0^\circ = 1 > 0$) lehetőséget nem kell figyelembe venni.

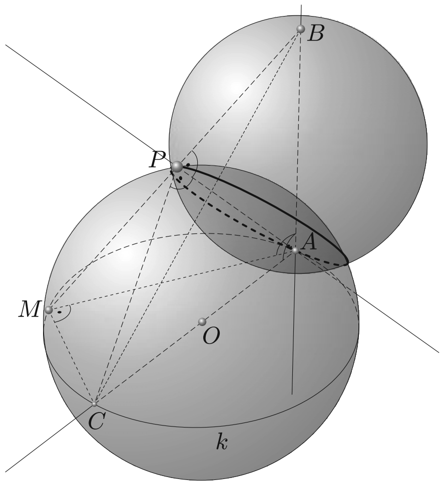
A feladatnak biztosan vannak más, a koordináta-geometria eszközeit nem kihasználó (pl. a *Pitagoraszi* egyenlőtlenség) megoldásai is.

5. *Egy k kör rögzített A pontjában húzzunk merőlegest a kör síkjára. Ezen az egyenesen jelöljünk ki egy tetszőleges, A-tól különböző, rögzített B pontot. Legyen*

M a kör egy tetszőleges, mozgó pontja. Határozzuk meg az A pont BM szakaszra eső merőleges vetületének mértani helyét a térben, ha az M pont befutja a k kört. **[EE/II/V.7.]**

Megoldás. Legyen AC a k kör átmérője, M a k körnek az AC végpontjaitól különböző pontja, valamint legyen P az A pont merőleges vetülete a BM szakaszon. Merőleges vetület miatt $APB\sphericalangle = 90°$, így a térbeli *Thalész*-tétel megfordítása miatt P rajta van az AB átmérőjű gömbön,

$$(*) \qquad P \in G_{AB}.$$



A síkbeli *Thalész*-tétel miatt $CMA\sphericalangle = 90°$. Mivel a feltétel miatt $CM \perp AB$, ezért $CM \perp S(ABM)$, ami azt is jelenti, hogy $CM \perp S(ABM)$ minden egyenesére, pl. $CM \perp AP$. Kihasználva a feltételt, hogy $AP \perp BM$, ezért $AP \perp S(BMC)$ is igaz. Ez azt is jelenti, hogy $AP \perp CP \subset S(BMC)$, vagyis a $CPA\sphericalangle = 90°$. Így a térbeli *Thalész*-tétel megfordítása miatt a P pont rajta van az AC átmérőjű gömbön is,

$$(**) \qquad P \in G_{AC}.$$

Ha $M = C$, akkor $MP = CP$, így a $CPA = 90°$a merőleges vetület miatt nyilvánvaló. Ha pedig $M = A$, akkor $M = A = P$ adódik.

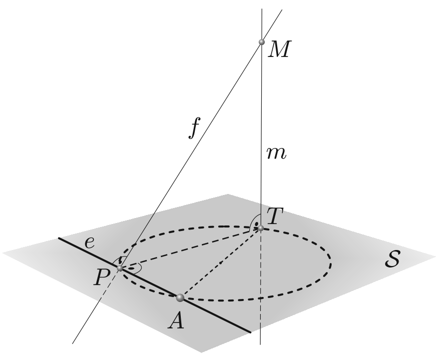
Így az $(*)$, a $(**)$ és a speciális helyzeteket is figyelembe véve $P \in G_{AB} \cap G_{AC}$.

Igazolnunk kellene még, hogy a gömbök közös körének $(G_{AB} \cap G_{AC})$ egy tetszőleges, az A-tól és az A-nak a BC-re vonatkozó merőleges vetületétől (ezek nyilvánvalóan elemei a megoldásnak) különböző P' pontjához tartozik egy, a k körön lévő M' pont (BPM' kollineárisak), ami esetén az eredeti feltételek teljesülnek. Legyen M' a B-ből kiinduló, P'-t tartalmazó félegyenes és az eredeti sík metszéspontja. Mivel $P' \in G_{AB} \cap G_{AC}$, ezért rajta lesz mind a két gömbön, így a *Thalész*-tétel miatt $AP'B\sphericalangle = CP'A\sphericalangle = 90°$. Mivel $AP' \perp CP'$ és $AP' \perp M'P'$ ($AP'M'\sphericalangle = 90°$, kiegészítő szög), így $AP' \perp S(CM'P') = S(CM'B)$, amiből az következik, hogy $AP' \perp CM'$ is igaz. Mivel $CM' \perp AB$ (eredeti feltétel), így $CM' \perp S(ABP') = S(ABM')$, egyben $CM' \perp M'A$ is. A *Thalész*-tétel megfordításából az következik (a $CM'A$ derékszögű háromszög létezik), hogy M' rajta van az eredeti k körön.

Tehát a mértani hely: az AB szakaszra, illetve a BC szakaszra mint átmérőkre illeszkedő gömbök közös körének minden pontja. A közös kör középpontját és átmérőjét ki lehet számolni az $M = C$ esetből (házi feladat).

A *GeoGebra* ennek a feladatnak nemcsak a megoldásának a megtalálását segíti, de a viszonylag bonyolult térbeli problémát is szemléletessé, átláthatóvá teszi.

6. *Az $\mathcal{S}$ síkban fekvő e egyenes forog a rajta lévő fix A pont körül. Legyen az m egyenes az $\mathcal{S}$ síkra merőleges, metszéspontjuk pedig T, az M pedig az m egyenes T-től különböző pontja. Határozzuk meg az M-ből az e egyenesre húzott f merőlegesek P talppontjainak mértani helyét az e körbeforgása esetén.* **[EE/II/V.5.]**



Megoldás. A feladat szövege alapján vezessük be a következő jelöléseket:

$$M \in m;\quad m \perp \mathcal{S};\quad m \cap \mathcal{S} := T;$$

$$M \in f;\quad e \perp f;\quad e \cap f := P.$$

Vizsgáljuk először, ha $P \neq A; T$. Az $e \perp f$ és $m \perp \mathcal{S}$ feltételekből a három merőleges egyenes tétele alapján következik, hogy

$$TP \perp e \Rightarrow TPA = 90^\circ.$$

Ezért *Thalész* tételének megfordítása következtében igaz, hogy P rajta van az AT szakaszra mint átmérőre rajzolt *Thalész*-körön.

Speciális helyzetben, ha $TA \perp e$ vagy $T \in e$, akkor $P = A$, illetve $P = T$ adódik, nem alakul ki a derékszögű TPA háromszög, de a T és az A pont a feltételek nyilvánvaló teljesülése miatt hozzátartozik a keresett mértani helyhez.

Meg kell még néznünk, hogy az A-tól és a T-től (ezek részei a megoldáshalmaznak) is különböző, a körön lévő tetszőleges P' pont esetén a $P'M \perp e$ $(f' \perp e)$ igaz lesz-e. Az $AP'T\sphericalangle = 90^\circ$ a *Thalész*-tétel miatt (az $AP'T$ háromszög létezik), az $AP' \perp m$ (eredeti feltétel), így $AP' \perp S(P'TM)$, amiből az következik, hogy $P'M \perp e$ $(f' \perp e)$ igaz lesz, így a mértani hely az AT átmérőjű teljes körvonal lesz.

A feladat megoldását ismét kezdhetjük a *GeoGebrának* a kört kirajzoló nyomvonal funkciójával, ami segít a speciális helyzetek diszkussziójában is.

Gyula, Csíkszereda, 2021 nyarán

Isten veled, Barátunk!

Kereskényi Miklós, Marczis György, Páll R. Olga
Segítettek: *Bíró Bálint, Pálinkás István, Szilassi Lajos*

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

Az első néhány számban a feladatsorok nem fedik le teljes egészében a hivatalos követelményrendszert, hogy a már tanult ismereteket kelljen csak felhasználni a megoldáshoz. Igyekszünk a feladatsorok nehézségét az éles sorokhoz igazítani, vagyis – az előző évekhez képest – könnyebbek lesznek.

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$,

b) $\dfrac{1}{\cos x+1}+\dfrac{1}{\cos x-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}$. (*12 pont*)

2. Ha a fonyódi hajóállomás mólójának (F) végéről a badacsonyi kikötő (B) felé nézünk, akkor ettől az iránytól jobbra 75°-os szögben Révfülöp kikötője (R), balra 28°-os szögben pedig Szigliget kikötője (S) látszik. Tudjuk, hogy az FRB háromszög egyenlő szárú, melynek alapja FB, valamint azt is, hogy az FBS háromszög is egyenlő szárú, amelynek alapja az FS szakasz. Egy vitorlás hajó egyik nap Fonyódról Révfülöpre, onnan Badacsonyba, majd Szigligetre vitorlázott, ahol a hajón utazók megebédeltek, és visszatértek Fonyódra. Fonyód a Balaton déli partján, Badacsony vele szemben, a Balaton északi partján található. A badacsonyi kikötő a fonyóditól 5,2 km-re van ($FB=5{,}2$ km), a Föld görbületétől eltekinthetünk.

a) Számítsuk ki, hogy legalább hány km-t tett meg ezen a napon a vitorlás. A végeredményt egész számra kerekítve km-ben adjuk meg.

Kiderült, hogy a hajón tartózkodók közül néhányan már korábban is ismerték egymást (az ismeretség kölcsönös). Egy n csúcsú gráffal ábrázoltuk ezeket az ismeretségi viszonyokat, ahol a személyeket a csúcsok jelképezték, két csúcsot akkor és csak akkor kötött össze él, ha a csúcsoknak megfelelő személyek korábban már ismerték egymást. Olyan egyszerű, összefüggő gráfot kaptunk, amelynek 10 éle lett. Jelölje A az n csúcsú egyszerű, összefüggő gráf élei számának lehetséges legkisebb, B pedig a lehetséges legnagyobb értékét.

b) Hányan utaztak a hajón, ha $\frac{A+B}{2}=10$? (*12 pont*)

3. Tekintsük az alábbi kijelentéseket:

A) Ha egy egyszerű gráf csúcsainak száma páratlan, akkor van páros fokú csúcsa.

B) Ha egy számtani sorozat konvergens, akkor különbsége pozitív szám.

C) Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem korlátos.

D) Ha egy mértani sorozat hányadosának abszolút értéke egynél kisebb, akkor a sorozat konvergens.

a) Igazak vagy hamisak az állítások?

b) Fogalmazzuk meg az *A*) és *D*) kijelentések megfordítását, majd döntsük el ezek logikai értékét.

Minden esetben indokoljuk válaszunkat. (*14 pont*)

4. *a*) Számítsuk ki az y tengely azon pontjának koordinátáit, amelyből az $A(-1;1)$, $B(3;9)$ pontok derékszögben látszanak.

Az $A(-1;1)$, $B(3;9)$, továbbá a C pont illeszkedik az $y=x^2$ egyenletű parabolára, C rajta van a parabola A és B közé eső ívén.

b) Határozzuk meg C koordinátáit, ha az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb. (*13 pont*)

II. rész

5. Egy 100 lakásos társasház lakói az éves rendes közgyűlésre készülnek. A Lakóbizottság a közelgő nagy felújítás költségeinek biztosítására a jelenlegi közös költség emelését fogja javasolni. A korábbi tapasztalatok szerint azonban p%-os emelés esetén a lakók $\frac{p}{3}$%-a csak az emelés előtti összeget hajlandó fizetni (velük szemben jogi eljárást indíthat a Lakóbizottság, ami hosszabb távon eredményre vezethet, de a közelgő felújításig nem fog befejeződni), a többiek fizetik az emelt költséget. Most minden lakás tulajdonosa fizeti a havi 10 000 Ft-os közös költséget.

a) Összesen mennyi pénzt fizetnének be a tulajdonosok havonta a társasház számlájára, ha 15%-kal növekedne a közös költség?

A Lakóbizottság tagjai tudják, hogy nagymértékű emelést a közgyűlés nem fogadna el, ezért a felújításhoz minimálisan szükséges emelést fogják javasolni. A társasház folyószámláján 3 millió 430 ezer Ft van, a 36 hónap múlva kezdődő felújításig a számlán legalább 50 millió Ft-nak kell lennie. A társasháznak a lakók befizetésén kívül más bevétele nincs, a folyószámlát kezelő bank által fizetett kamat elfogy a banki költségekre és egyéb apróbb kiadásokra.

b) Számítsuk ki, hogy mennyi legyen a lakásonként fizetendő megemelt havi közös költség a megadott feltételekkel. Az eredményt 100 Ft-ra kerekítve adjuk meg.

A közös képviselő a korábbi közgyűlési jegyzőkönyveket tanulmányozva érdekes dolgot figyelt meg. Hét olyan közgyűlés volt, amelyen a résztvevők létszáma – megfelelő sorrendbe rakva – egy számtani sorozat szomszédos elemeit képezte. A hét adat mediánja 66, szórása 6.

c) Mekkora az adatok terjedelme? (*16 pont*)

6. Értelmezzük a valós számok halmazán az „újösszeg" (jele: $\oplus$) műveletet a következőképpen:

$$a \oplus b = a + b + ab \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

valamint az „újszorzat" (jele: $\odot$) műveletet az alábbiak szerint:

$$a \odot b = \frac{ab}{a+b} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a + b \neq 0).$$

a) Melyek azok a valós számok, amelyeknek „újösszege" 90, „újszorzata" 4?

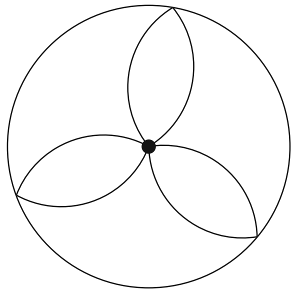
b) Igazoljuk, hogy az „újösszeg" műveletre teljesül a csoportosíthatósági tulajdonság (asszociativitás), azaz

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

vagyis elhagyhatók a zárójelek ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

c) Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x \oplus y \oplus z = 2021$ egyenletet. (*16 pont*)

7. Az *ábra* egy játékokat készítő cég tervezett emblémáját mutatja, melyet a termékekre a kör középpontja körül elforgatható módon rögzítenek. A forgásszimmetrikus alakzat egyes tartományait úgy festik be, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok színe különbözik egymástól. Piros, sárga, kék és zöld szín közül lehet választani, és egy emblémán mind a négy színnek szerepelnie kell. Nevezzük a kör belsejében levő körívek határolta konvex tartományokat „szirom”-nak, a konkáv részeket pedig „háttér”-nek.



a) Hányféleképpen színezhető ki az embléma, ha a „szirmok” színének különbözniük kell egymástól, továbbá azonos színezésűnek tekintjük azokat az emblémákat, amelyek a kör középpontja körüli elforgatással alak és szín szerint egymásba vihetők?

Az emblémák gyártásához használt berendezés üzembe helyezésekor 1000 darabos nullszériát készítettek, amelynek minden példányát megvizsgálták. Dobozba gyűjtötték a hibás darabokat, ezekből összesen 100 db lett, majd feljegyezték, hogy 57-nek szín hibája, 53-nak pedig méret hibája van.

Véletlenszerűen kivettünk ebből a dobozból egy emblémát, megállapítottuk hibájának típusát, ezután visszatettük a többi közé. Később megismételtük az előbbi eljárást még egyszer.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak méret hibás, vagy csak szín hibás emblémákat vettünk ki a dobozból? (*16 pont*)

8. Egy osztály, ahol kétszer annyi a lány, mint a fiú, többnapos kirándulásra készül, amelynek programjában három fakultatív foglalkozás is szerepel, melyekre előzetesen lehetett jelentkezni. Mindenkinek legalább egy programon részt kellett vennie, de akár mindháromra is feliratkozhatott bárki.

Az összesítés után megállapították, hogy a tanulók $\frac{4}{5}$-e hajókirándulásra, $\frac{7}{10}$-e falumúzeumi látogatásra, $\frac{3}{5}$-e pedig kalandparki programra jelentkezett. Hárman jelölték meg mindegyik foglalkozást.

a) Ha az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mennyi a valószínűsége, hogy ő a hajókirándulásra is és a kalandparki programra is jelentkezett, a falumúzeumi látogatásra azonban nem?

Ebben az osztályban egyik alkalommal háromfős bizottságot választottak sorsolással úgy, hogy cetlikre írták az osztályba járó tanulók nevét, mindegyikre egyet-egyet, majd urnába helyezték a cédulákat. Ezután az urnából véletlenszerűen kivettek egy cédulát, a rajta levő nevet felírták a táblára, félretették a papírlapot, majd ezt a sorsolást megismételték még kétszer.

Jelölje $P(A)$ annak valószínűségét, hogy a táblán legalább két lány, $P(B)$ pedig annak valószínűségét, hogy legalább egy fiú neve szerepel.

b) Számítsuk ki $P(A)$ és $P(B)$ értékét. (*16 pont*)

9. A *képen* látható, a hagyományos futball labdához hasonlító testet 12 fekete szabályos ötszög, és alkalmas számú fehér szabályos hatszög határolja.

Az ötszög oldalának hossza megegyezik a hatszög oldalának hosszával.

a) Hány csúcsa, lapja és éle van a testnek?

b) Egy fehér hatszög területe hány %-kal nagyobb egy fekete ötszög területénél?

c) Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a körülírt és beírt körök sugarának összege egyenlő a befogók számtani közepével. (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2021–2022-es tanévre (2021 szeptemberétől 2022 májusáig) 8800 Ft. Azonos címre küldendő, 9-nél nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at: `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonkénti ára 1050 Ft.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2021–2022-es tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás* a KöMaL 2021–2022. évi pontversenyeire

Kedves Versenyzőnk!

Matematikából, fizikából és informatikából különféle nehézségű pontversenyeket indítunk. Az idei tanévtől kezdve csapatban is lehet versenyezni, melynek rész-

*Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.