

A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai

Első nap

1. feladat. Legyen $n \geq 100$ egész. Iván felírja az $n, n+1, \dots, 2n$ számokat egy-egy különböző kártyára. Ezután összekeveri ezt az $n+1$ kártyát, és két pakliba osztja őket. Bizonyítandó, hogy legalább az egyik pakli tartalmaz két olyan kártyát, amelyekre írt számok összege négyzetszám.

2. feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}$$

egyenlőtlenség fennáll tetszőleges x_1, \dots, x_n valós számokra.

3. feladat. Legyen D olyan belső pontja az $AB > AC$ tulajdonságú, hegyesszögű ABC háromszögnek, hogy $DAB \sphericalangle = CAD \sphericalangle$. Az AC szakasz E pontjára $ADE \sphericalangle = BCD \sphericalangle$ teljesül, az AB szakasz F pontjára $FDA \sphericalangle = DBC \sphericalangle$ teljesül, és az AC egyenes X pontjára $CX = BX$ teljesül. Jelölje O_1 és O_2 az ADC , illetve EXD háromszög köré írt kör középpontját. Bizonyítandó, hogy a BC , EF és O_1O_2 egyenesek egy ponton mennek át.

Második nap

4. feladat. Legyen Γ egy I középpontú kör, és legyen $ABCD$ olyan konvex négyszög, hogy az AB , BC , CD és DA szakaszok mindegyike érinti Γ -t. Legyen Ω az AIC háromszög körülírt köre. A BA szakasz A -n túli meghosszabbítása Ω -t X -ben metszi, és a BC szakasz C -n túli meghosszabbítása Ω -t Z -ben metszi. Az AD , illetve a CD szakasz D -n túli meghosszabbítása Ω -t Y -ban, illetve T -ben metszi. Bizonyítandó, hogy

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

5. feladat. Két mókus, Bozontos és Ugrálós, 2021 diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat 1-től 2021-ig, és ásott 2021 kis lyukat a talajba kör alakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat 2021 egymást követő lépésben. A k -edik lépésben Ugrálós felcseréli a k sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan k érték, hogy a k -edik lépésben Ugrálós olyan a és b sorszámú diókat cserél fel, amelyekre $a < k < b$.

6. feladat. Legyen $m \geq 2$ egész szám, A egy véges halmaza egész számoknak (amelyek nem feltétlenül pozitívak), és legyenek $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ részhalmazai A -nak. Tegyük fel, hogy minden $k = 1, 2, \dots, m$ esetén B_k elemeinek összege m^k . Bizonyítandó, hogy A legalább $m/2$ elemet tartalmaz.