KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK

INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE

ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 6. szám Budapest, 2021. szeptember

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten: `www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

Beszámoló a 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 14. és 24. között ismét Oroszország rendezte meg a tavalyihoz nagyon hasonló módon. A koronavírus-világjárvány miatt a szervezők a Diákolimpia online megrendezése mellett döntöttek, tehát a 619 résztvevő diák egyetlen központi helyszín helyett a 107 résztvevő ország által felállított 157 vizsgaközpontban írta meg a versenydolgozatot. A vizsgaközpontokban egy-egy vizsgabiztos ellenőrizte személyesen a verseny tisztaságát, emellett a vizsgaközpontokban működő webkamerák által közvetített képet a szervezők által megbízott felügyelők figyelték. Nagy földrajzi kiterjedésű, vagy a járvány által súlyosan érintett országokban, ahol a belföldi utazás is nehézségekbe ütközött volna, több vizsgaközpontot is létrehoztak. Magyarországon egyetlen vizsgaközpont volt, mégpedig Budapesten, a Rényi Intézetben. A versenydolgozatokat minden vizsgaközpontban a vizsgabiztos beszkennelte és feltöltötte a Diákolimpia szerverére. A mintegy 22 400 oldalnyi szkennelt anyagot 90 koordinátor nézte át (akik közül 70 a szentpétervári központi helyszínen, 20 pedig online vett részt). A versenyzők pontszáma a koordinátorok és a csapatvezetők közötti egyeztetés révén alakult ki.

A Diákolimpiára 51 ország összesen 175 feladatot javasolt, ezek közül került ki a hat kitűzött feladat. A versenyen, szokás szerint, mindkét napon négy és fél óra alatt három-három feladatot kellett megoldani. A feladatok szövegét alább közöljük. Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 24–42 pontot elérő, ezüstérmet a 19–23 pontos, míg bronzérmet a 12–18 ponttal rendelkező tanulók szereztek. A szokatlanul alacsony ponthatárok főként annak tudhatók be, hogy a 3. és 6. feladaton kívül idén a 2. feladat is igen nehéznek bizonyult.

A magyar csapatot a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium hat tanulója alkotta.

Várkonyi Zsombor (12. oszt.) 22 ponttal *ezüstérmet* nyert.
Füredi Erik (12. oszt.) 18 ponttal,
Kovács Tamás (11. oszt.) 18 ponttal,
Szabó Kornél György (12. oszt.) 16 ponttal,
Fleiner Zsigmond (11. oszt.) 14 ponttal és
Velich Nóra Zoé (12. oszt.) 13 ponttal *bronzérmet* kapott.

Frenkel Péter (ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék; Rényi Intézet) a magyar csapat vezetőjeként, *Dobos Sándor* (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium) a magyar csapat helyettes vezetőjeként, *Kovács Benedek* (ELTE TTK, matematikus mesterszakos hallgató) és *Terpai Tamás* (ELTE TTK Analízis Tanszék) hivatalos megfigyelőként, *Kós Géza* (SZTAKI, ELTE TTK) a Feladatkiválasztó Bizottság tagjaként és koordinátorként, *Kunszenti-Kovács Dávid* (ELTE TTK Alkalmazott Analízis Tanszék; Rényi Intézet) a Diákolimpiát irányító öttagú Tábla és az Etikai Bizottság tagjaként, *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék) pedig a Hivatalos Nyelvek Bizottság tagjaként működött közre az olimpián.

Az országok nem-hivatalos pontversenyében Magyarország a résztvevő 107 ország között a 32. helyen végzett.

A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Kína 208, 2. Oroszország 183, 3. Dél-Korea 172, 4. USA 165, 5. Kanada 151, 6. Ukrajna 149, 7-8. Izrael és Olaszország 139, 9-10. Egyesült Királyság és Tajvan 131, 11. Mongólia 130, 12. Németország 129, 13. Lengyelország 126, 14. Vietnám 125, 15. Szingapúr 123, 16-17. Csehország és Thaiföld 121, 18-19. Ausztrália és Bulgária 120, 20. Kazahsztán 117, 21-22. Hongkong és Horvátország 113, 23. Fülöp-szigetek 111, 24. Belarusz 109, 25. Japán 108, 26. India 106, 27-28. Franciaország és Románia 105, 29. Irán 104, 30. Peru 103.

Az összes résztvevő ország és versenyző neve és eredménye megtalálható az `imo-official.org` honlapon.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. A központi olimpiai felkészítő szakkör vezetője a helyettes csapatvezető, *Dobos Sándor* volt. A felkészítés részét képezte egy egyhetes táborozás június végén, *Dobos Sándor* és *Kiss Géza* (szintén a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium tanára) vezetésével. A versenyzők további tanárainak felsorolásában a tanárok neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik: *Fazakas Tünde* és *Kocsis Szilveszter* (FE, SzKGy, VZs, VNZ); *Gyenes Zoltán* (FZs, KT, SzKGy); *Pósa Lajos* (SzKGy, VZs, VNZ); *Hujter Bálint* és *Juhász Péter* (FZs, KT); *Surányi László* (SzKGy).

Köszönöm a helyettes csapatvezető és a hivatalos megfigyelők munkáját. Köszönöm a Rényi Intézet vezetőinek és dolgozóinak támogatását, továbbá *Nika Salia* vizsgabiztos lelkiismeretes munkáját.

A diákolimpia résztvevői számára sakkbajnokságot is szerveztek, amely blitz és rapid mérkőzésekből állt. Az indulókat két csoportba osztották. A „keleti" csoport győztese a magyar Füredi Erik lett.

Ezen a virtuális olimpián is voltak matematikai és kulturális-turisztikai jellegű kísérő programok is, így exkluzív interjúk híres matematikusokkal (köztük a Fields-érmes Stanislav Smirnovval és a friss Abel-díjas Lovász Lászlóval) és virtuális városnéző séták Szentpéterváron. A teljes program megtalálható az olimpia honlapján: `https://imo2021.ru/`.

A következő, 2022. évi matematikai diákolimpiát Norvégia rendezi, remélhetőleg személyes jelenléttel Oslóban.

Frenkel Péter

A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai

Első nap

1. feladat. Legyen $n \geqslant 100$ egész. Iván felírja az $n, n+1, \ldots, 2n$ számokat egy-egy különböző kártyára. Ezután összekeveri ezt az $n+1$ kártyát, és két pakliba osztja őket. Bizonyítandó, hogy legalább az egyik pakli tartalmaz két olyan kártyát, amelyekre írt számok összege négyzetszám.

2. feladat. Mutassuk meg, hogy az

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i-x_j|} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{|x_i+x_j|}$$

egyenlőtlenség fennáll tetszőleges $x_1, \ldots, x_n$ valós számokra.

3. feladat. Legyen D olyan belső pontja az $AB > AC$ tulajdonságú, hegyesszögű ABC háromszögnek, hogy $DAB\sphericalangle = CAD\sphericalangle$. Az AC szakasz E pontjára $ADE\sphericalangle = BCD\sphericalangle$ teljesül, az AB szakasz F pontjára $FDA\sphericalangle = DBC\sphericalangle$ teljesül, és az AC egyenes X pontjára $CX = BX$ teljesül. Jelölje O_1 és O_2 az ADC, illetve EXD háromszög köré írt kör középpontját. Bizonyítandó, hogy a BC, EF és O_1O_2 egyenesek egy ponton mennek át.

Második nap

4. feladat. Legyen Γ egy I középpontú kör, és legyen $ABCD$ olyan konvex négyszög, hogy az AB, BC, CD és DA szakaszok mindegyike érinti Γ-t. Legyen Ω az AIC háromszög körülírt köre. A BA szakasz A-n túli meghosszabbítása Ω-t X-ben metszi, és a BC szakasz C-n túli meghosszabbítása Ω-t Z-ben metszi. Az AD, illetve a CD szakasz D-n túli meghosszabbítása Ω-t Y-ban, illetve T-ben metszi. Bizonyítandó, hogy

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

5. feladat. Két mókus, Bozontos és Ugrálós, 2021 diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat 1-től 2021-ig, és ásott 2021 kis lyukat a talajba köralakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat 2021 egymást követő lépésben. A k-adik lépésben Ugrálós felcseréli a k sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan k érték, hogy a k-adik lépésben Ugrálós olyan a és b sorszámú diókat cserél fel, amelyekre $a < k < b$.

6. feladat. Legyen $m \geqslant 2$ egész szám, A egy véges halmaza egész számoknak (amelyek nem feltétlenül pozitívak), és legyenek $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ részhalmazai A-nak. Tegyük fel, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, m$ esetén B_k elemeinek összege m^k. Bizonyítandó, hogy A legalább $m/2$ elemet tartalmaz.

Olimpiai előkészítő szakkörök a 2021/2022. tanévben

A Bolyai János Matematikai Társulat által szervezett Központi olimpiai szakköri felkészülés az alábbiak szerint történik:

Az első alkalom szeptember 24-én, a második október 15-én (pénteken) lesz a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban (Budapest VIII. kerület, Horváth M. tér 8.) 14:30-tól, szakkörvezető: *Dobos Sándor.* További időpontok a szakköri honlapnak (`https://cms.renyi.hu/olimpiak/hu/node/1`) megfelelően.

EGMO 2021/2022 felhívás[*]

2022. április 6. és 12. között Egerben rendezik a tizenegyedik Európai Lány Matematikai Diákolimpiát, az EGMO-t (`https://egmo2022.hu/`, `https://www.egmo.org/`). Jövőre ezúttal nyolc fős csapattal indulhatunk, melynek összetétele 2022. elején derül ki. A válogatás szempontjai: válogatóversenyek (2021. őszén és 2022. elején) – kis mértékben az elmúlt évi is –, országos kifejtős egyéni versenyek (matematika OKTV, Kürschák József Matematikai Tanulóverseny, Arany Dániel Matematikaverseny), a KöMaL (A és) B pontversenyei, valamint az évközi munka.

A versenyen való sikeres szerepléshez, illetve a csapatba való bekerüléshez is alapvetően nélkülözhetetlen az alapos felkészülés, ezt többféleképpen is szeretnénk segíteni. Év közben időközönként küldünk az érdeklődőknek (tematikus) feladatsorokat; az ezekre küldött megoldásokra személyesen is visszajelzünk, illetve lehet kérdezni is. Emellett az őszi válogatóig legeredményesebb diákok részt vehetnek a téli brit-magyar közös IMO felkészítő táborban. A két válogató összesített eredménye alapján a legeredményesebb diákok részt vehetnek az intenzív EGMO felkészítő hétvégén.

Érdemes minél előbb, akár már kilencedikesként bekapcsolódni. Minden lány jelentkezését szeretettel várjuk, akit érdekel a versenyrészvétel lehetősége és nem riad vissza attól, hogy ezért komolyabb munkát fektessen bele.

Aki szeretne részt venni a válogatásban és felkészülésben, vagy bármilyen kérdése van, írjon minél előbb az `egmo.hungary@gmail.com` címre, vagy jelentkezzen a honlapon leírtak szerint: `https://nagyzoli.web.elte.hu/EGMO.html`.

Kiss Melinda Flóra, Baran Zsuzsa, Janzer Lili

[*] Az idei versenyről a beszámoló jövő havi számunkban jelenik majd meg.

A matekes pedagógus – Eigel Ernő emlékére

1990. január első hetében segélyeket vittünk Gyuláról Csíkszeredába (Trabant, Wartburg gépkocsikkal, IFA teherautóval). Az alföldi embereknek nehéz volt a mínusz húsz-huszonhét fokos hideg, de megérte. Ekkor találkoztunk először *Eigel Ernővel,* aki a történelmi Magyarország legnagyobb gimnáziumát vezette. A több mint négyszáz éves iskola hamarosan *Márton Áron* püspök nevét vette fel. Felemelő volt a találkozás, bozontos szemöldöke, mint a *Mikulásé,* haja már „őszbe csavaradott", de hihetetlenül csillogó szeme nemcsak derűt, de okosságot, szellemességet sugárzott. Hamarosan kiderült, hogy tanítványai hozsannáztak a matematikaóráinak érdekessége és különleges tanítása miatt.

Eigel Ernő 1932. december 30-án született Csíkszeredán és 2021. március 12-én hunyt el Gyulán, Magyarországon. Felmenői Csehországból az 1810-es években települtek Erdélybe, Borszék-Csíkszereda térségébe, katolikus vallású területére. Mesteremberek voltak, üveggyártással foglalkoztak, hiszen a borszéki savas víz palackozását végezték. A harmadik nemzedék már elfelejtette német nyelvét, csak magyar nyelven beszéltek, magukat magyar-székely embereknek tartották. A huszadik században értelmiségi foglalkozást űztek.

Tehetségét, okosságát környezete hamar felismerte. Alig múlt tizenkét éves, amikor 1944-ben Budapestre menekültek. A kamaszodó fiú két éven keresztül a Keleti Károly utcában, az *Érseki Katolikus Gimnázium*ban tanult. Tőle hallhattuk, hogy kezdetben társai *„erdélyi kutyának"* nevezték, de amikor elsőre a legjobb matematikai dolgozatot megírta, már *„Ernő"* lett. 1946 őszén visszatértek Csík vármegyébe, Borszékre. Bentlakásos diákként Csíkszeredán folytatta és fejezte be gimnáziumi tanulmányait. Már ekkor kijelentette: *a matematika a sorsommá vált.* Ugyanakkor kiderült, hogy zenei adottsága-tehetsége is kimagasló volt. Négy éven át a matematika mellett zenélt, nagy, négyszólamú kórust vezetett, és azt vezényelte is. Sokat vállalt. Tanárai könnyíteni akartak munkáján, s kérdezték tőle: miben segíthetnénk? A válasz rövid volt: mentsenek fel a testnevelés alól. Megtették.

A *Babeş–Bolyai Tudományegyetemen* tanult matematikát. Három-négy hét múlva kiderült, hogy valóban sorsává vált a matematika. A diploma átvétele után Csík megyében, a baróti gimnáziumban kezdte a tanítást. Egy év múlva igazgatóvá választották. Az 1956-os forradalom után ugyan nem bántották, de leváltották igazgatói posztjáról. Jól járt.

Végre taníthatott, s azt, amit nagyon szeretett, ráadásul a csíkszeredai gimnáziumban. *Bögözi Mihállyal* együtt országos élvonalba emelte a gimnázium matematika-fizika oktatását. *Eigel Ernő* célja ez volt: *jól tanítani és a magyar értelmiséget magasra emelni.* E mögött nemcsak a tehetség áll, de a jó tanár tanítási módszere, ami a jó tanulót felemeli. Egyik tanítványa, aki kiváló matematikus lett, a következőket mondta: *Eigel Ernő* sokkal nagyobb mozgásszabadságot biztosított nekem, mint a többi diáknak, és ez nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy a matematika tanulmányozásában elmélyülhessek.

Eigel Ernő fontosnak találta a fiatal pedagógusok segítését is. Kiváló óraelemző volt. Egykoron nála kezdők tisztelettel meséltek a vele való találkozásról. *Eigel Ernő* megnézte tanóráikat, és három perc alatt meg tudta mondani, mik voltak az óra erősségei és gyenge pontjai. Nemcsak ezekről mondta el a véleményét, hanem felvázolta a lehetőségeket is, pl. ő hogyan csinálná. Később már csak azért nézte meg őket, hogy fejlődésüket figyelje. Mindig segítő szándékkal és nem ellenőrző szervként látogatott. Ő is meghívta óráira a kezdőket, akik szívesen mentek hozzá hospitálni, rengeteget lehetett tőle tanulni. Általában is segítőkész volt a kezdő tanárokhoz: a fiatal tanárnőkhöz, a fiatal tanár urakhoz egyaránt, akik csak felnézni tudtak és tudnak rá.

Kérdeztük tőle egyszer, hogy tanításának mi a titka? Egyszerű, mondta: a hagyományos oktatás szerint a tanuló áll a táblánál, a tanár nézi, a többieknek a *„nyakizmát fejleszti”.* Nehezen felírnak a táblára egy *„fejleményt”:* $x+3+10y\ldots$, a hatékonyság nagyon kicsi. A *mateket* viszont így kell tanítani, ez a megoldás: reprezentatív-elmélet megismerése; két feladat közös megbeszélése; tíz-húsz feladat önálló megoldása (ez már harmadik-negyedik tanóra), miközben a tanár megy fel-le, s nézi, ki-ki meddig jutott el, közben súg neki, ez itt nem jó vagy nagyon jó stb. Van, aki már a nyolcadik feladatnál jár, más még a másodiknál, de mindegyikük saját maga dolgozik az órán. Aztán a diák bemutatja a munkáját, a többiek kérdezik, hogyan csinálta … Ehhez kapcsolódhat az unokája kedves története is, aki mikor elkezdte az iskolát, *„tiszta fejjel”* könnyen meg tudta oldani a közismert féltéglás-egész téglás kis feladatocskát. Miután elvégezte a gyermek az első osztályt, a nagyapa (*Ernő bácsi*) újból feladta unokájának ugyanazt a fejtörőt, akinek ekkor már nem sikerült a megoldás. Gondolkodását az iskola sablonokba szorította, ami nem segített, mondván még nem jutottak el ahhoz az anyaghoz. Tanulságos a történet.

1994-től fogva fél évtizeden keresztül matematikát tanított Gyulán az *Erkel Ferenc Gimnáziumban.* Diákjai itt is nagyon tisztelték és szerették, bár a kezdetekben egy kicsit tartottak tőle. A gyulai diákok az első hónapokban csak „az öreg román” kifejezést használták a háta mögött, de néhány hónap múltán már úgy szólították: *Ernő bácsi.*

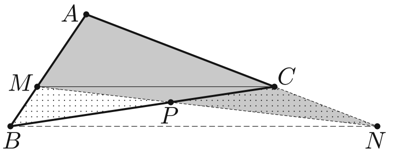
A jó tanár ennél szebb elismerést nem ismer.

Válogatás egy matematikatanár gyűjteményéből

A következő feladatok *Eigel Ernő* két feladatgyűjteményéből – *Síkgeometriai feladatok, Térgeometriai feladatok* – valók. A feladatok bemutatásakor lényegében a könyvekben szereplő megoldásokat követtük, azokat részben kiegészítettük, és a módszertani megjegyzések mellett igyekeztünk megmutatni azt is, ha lehet, hogyan segíthet pl. a *GeoGebra* a megoldások megsejtetésében vagy a viszonylag bonyolult problémák szemléltetésében.

Az emlékezés mellett a diákok és a kollégák figyelmét is szeretnénk felhívni erre a két kiváló könyvre.

1. *Legyen ABC háromszög AB oldalán M egy tetszőleges mozgó pont. B-ből CM egyenessel húzott párhuzamos egyenes az AC egyenesét az N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy az AMN háromszög területe nem változik, ha az M pont mozog az AB szakaszon.* **[EE/I/25.]**

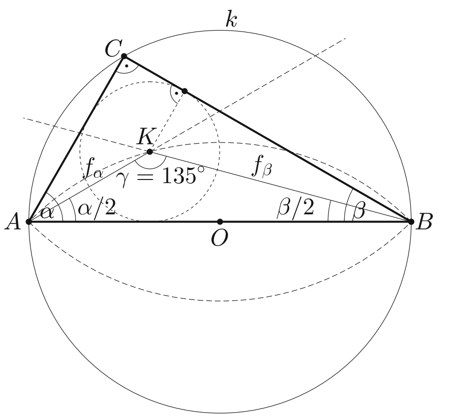


Megoldás. A feltételek alapján az $MBNC$ négyszög létezik (M belső pont), és trapéz ($MC \parallel BN$). Legyen P az $MBNC$ trapéz átlóinak metszéspontja.

Az MBN háromszög és a CBN háromszög területe egyenlő, mivel BN oldaluk közös, és az ezen oldalhoz tartozó magasságuk az $MC \parallel BN$ miatt egyenlő. Ebből a két egyenlő területből kivonva a BNP háromszög területét, kapjuk, hogy az MBP háromszög és a CPNháromszög (nem szükségszerűen egybevágók) területei megegyeznek. Ezt felhasználva, és a konstrukciót figyelembe véve kapjuk, hogy $t_{AMN} = t_{AMPC} + t_{CPN} = t_{AMPC} + t_{MBP} = t_{ABC}$. Mivel az ABC háromszög fix volt, így a területe sem változott, állandó maradt, amivel igazoltuk állításunkat.

Az $A = M$ esetén nem keletkezik háromszög, nincs mit bizonyítani. $M = B$ esetén pedig a keletkezett háromszög megegyezik az ABC háromszöggel, így az állítás nyilvánvaló. Azt, hogy az AMN háromszög területe (t_{AMN}) állandó, a *GeoGebra* dinamikus funkciója az M pont mozgatásával sejteti ($= t_{ABC}$), hiszen az AMN háromszög „rásimul" az ABC háromszögre.

2. *AB egy adott kör átmérője, C mozgó pont a körön. Határozzuk meg az ABC háromszögekbe írható körök K középpontjainak mértani helyét, ha a C befutja a teljes kört.* **[EE/I/285/a]**



Megoldás. Legyen először a C pont A-tól és B-től különböző pontja a körnek. Ekkor *Thalész* tétele miatt az $ACB\sphericalangle = 90°$ lesz. Ha az A csúcsnál lévő szöget α-val, a B csúcsnál lévő szöget β-val jelöljük, akkor a háromszögek belső szögeinek összegét kihasználva $\alpha + \beta = 90°$. Mivel a háromszögbe írható kör középpontja a belső szögfelezők metszéspontja ($K = f_\alpha \cap f_\beta$), ezért az ABK háromszög AB oldalán fekvő szögei $\frac{\alpha}{2}$, illetve $\frac{\beta}{2}$, amelyek összege 45°. Így az $AKB\sphericalangle = \gamma = 135°$, ami azt jelenti, hogy a K pontból az AB átmérő $\gamma = 135°$ alatt látszik, tehát a K pont, ha C pont A-tól és B-től különböző pontja a körnek, mindig az AB átmérő 135°-os látószögkörívpárján van. Ha a C pont megegyezik A-val vagy B-vel, akkor nem keletkezik az ABC háromszög, így beírható kör sem, tehát a megoldáshoz nem tartozik az AB átmérő két végpontja.

Kérdés még, hogy a látószögkörív-párok bármely, A-tól és B-től különböző K' pontjához tartozik-e az eredeti k körön lévő C' pont. Tükrözzük tengelyesen az AB átmérőt AK' és BK' egyenesére, ezen tükörképek metszéspontja pedig legyen C'. Az $AC'B\sphericalangle=90^\circ$ lesz a $\gamma=135^\circ$ és az $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=45^\circ$ miatt ($AK'B$ háromszögben), így a *Thalész*-tétel megfordítása adja, hogy C' rajta lesz a k körön, miközben a K' a tükrözés miatt a belső szögfelezők metszéspontja is, tehát a beírható kör középpontja. Így a keresett mértani hely az AB szakaszra rajzolt 135°-os teljes látószögkörív-pár, kivéve az A és a B pontot.

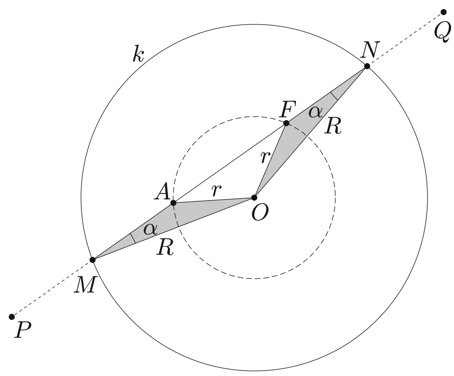
A megoldás megsejtéséhez (nem bizonyításához) a *GeoGebra* nyomvonal funkciója ismét segít, hiszen a C pontot végigfuttatva a körön, kirajzolódik a két körív.

3. *Legyen A pont a k körlemez egy tetszőleges belső, a középponttól különböző, rögzített pontja, és MN változó szelő, amely átmegy az A ponton. Legyen P, illetve Q az A-nak az M-re, illetve az N-re vonatkozó tükörképe. Mi lesz a PQ szakasz F felezőpontjának a mértani helye, ha M befutja a körvonalat?* **[EE/I/125.]**

Megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az O pont nem illeszkedik az MN húrra.

A konstrukció és a jelölések alapján:

$$PF=\frac{PQ}{2}=\frac{PA+AQ}{2}=$$
$$=\frac{2MA+2NA}{2}=$$
$$=MA+NA=MN,$$
$$MA=PM=PF-MF=$$
$$=MN-MF=FN.$$



Mivel az MON háromszög egyenlő szárú, mert $OM=ON:=R$, így $OMN\sphericalangle = ONM\sphericalangle$, amikből következik, hogy $OMA\triangle\cong ONF\triangle$, ami azt jelenti, hogy $OF=OA=\text{állandó}:=r$. Ez annyit jelent, hogy az F felezőpont állandó, $r=OA$ távolságra van az O ponttól, és ezért a mértani hely az O középpontú, $r=OA$ sugarú körön van.

Ha O illeszkedik az MN húrra, akkor $MA=FN$ hasonlóan igaz, és az egybevágó háromszögek keletkezése nélkül $OF=OA=\text{állandó}:=r$ egyszerűen adódik.

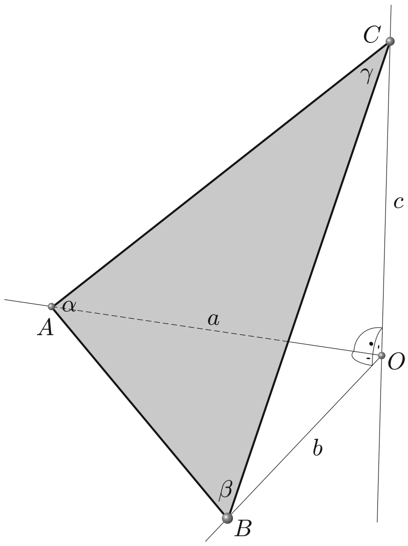
Azt kellene belátni még, hogy a várt mértani hely (O középpontú, $r=OA$ sugarú kör) minden F' pontja esetén F' felezi az eredeti konstrukció alapján kapott PQ szakaszt. Ha F' megegyezik A-val vagy A-nak O-ra vonatkozó tükörképével, akkor ez nyilvánvaló. Ha F' nem egyezik meg sem A-val, sem A-nak O-ra vonatkozó tükörképével, akkor a keletkezett egyenlő szárú háromszögek okán $OMA\triangle\cong ONF'\triangle$, vagyis $F'N=MA$. Így $PF'=F'A+2MA$, illetve

$$QF'=F'N+NQ=F'N+NA=F'N+F'A+F'N=$$
$$=F'A+2F'N=F'A+2MA,$$

ami az F' pont felező tulajdonságát igazolja. Tehát a megoldás az O középpontú, $r = OA$ sugarú kör minden pontja.

Ismét segít a feladat megoldásában a *GeoGebra* nyomvonal funkciója, hiszen az M körbefuttatásakor látható az eredetivel koncentrikus kör, a remélt mértani hely. A bizonyítást nem mellőzhetjük.

Ha $A = O$ lenne, akkor a mértani hely az O pont lesz. Itt is segít a *GeoGebra,* de az olvasóra bízott indoklás hasznos gyakorlás lehet.



4. *Az O közös pontból kiinduló három félegyenes páronként egymásra merőleges (derékszögű triéder), és a félegyenesek egy-egy tetszőleges, O-tól különböző pontja legyen A; B és C. Igazoljuk, hogy az így keletkezett ABC háromszög bármely helyzetében hegyesszögű.* **[EE/II/I.10.]**

Megoldás. A kezdeti feltételek, a konstrukció és a jelölések alapján háromszor alkalmazva *Pitagorasz* tételét, kapjuk:

$$OA := a;\quad OB := b;\quad OC := c,$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}\,;\quad BC = \sqrt{b^2 + c^2}\,;$$

$$AC = \sqrt{a^2 + c^2}\,.$$

Ezek után az ABC háromszögben pl. a BC oldalra és α-ra felírhatjuk a koszinusztételt, azt rendezzük:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 + c^2 = a^2 + c^2 + a^2 + b^2 - 2 \cdot \sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}.$$

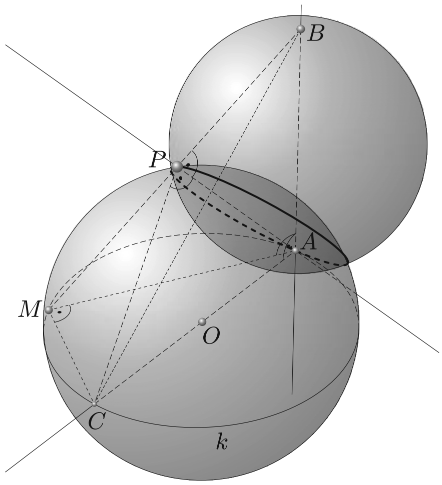
Mivel a jobb oldal pozitív, így $\cos\alpha > 0 \Rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ (háromszög belső szögéről van szó) $\Rightarrow \alpha$ hegyesszög. Hasonlóan látható be β-ra és γ-ra is, tehát az ABC háromszög hegyesszögű. Mivel az ABC háromszög létezik, ezért az $\alpha; \beta; \gamma = 0^\circ$ $(\cos 0^\circ = 1 > 0)$ lehetőséget nem kell figyelembe venni.

A feladatnak biztosan vannak más, a koordináta-geometria eszközeit nem kihasználó (pl. a *Pitagoraszi* egyenlőtlenség) megoldásai is.

5. *Egy k kör rögzített A pontjában húzzunk merőlegest a kör síkjára. Ezen az egyenesen jelöljünk ki egy tetszőleges, A-tól különböző, rögzített B pontot. Legyen*

M a kör egy tetszőleges, mozgó pontja. Határozzuk meg az A pont BM szakaszra eső merőleges vetületének mértani helyét a térben, ha az M pont befutja a k kört. **[EE/II/V.7.]**

Megoldás. Legyen AC a k kör átmérője, M a k körnek az AC végpontjaitól különböző pontja, valamint legyen P az A pont merőleges vetülete a BM szakaszon. Merőleges vetület miatt $APB\sphericalangle = 90°$, így a térbeli *Thalész*-tétel megfordítása miatt P rajta van az AB átmérőjű gömbön,



$$(*)\qquad P \in G_{AB}.$$

A síkbeli *Thalész*-tétel miatt $CMA\sphericalangle = 90°$. Mivel a feltétel miatt $CM \perp AB$, ezért $CM \perp S(ABM)$, ami azt is jelenti, hogy $CM \perp S(ABM)$ minden egyenesére, pl. $CM \perp AP$. Kihasználva a feltételt, hogy $AP \perp BM$, ezért $AP \perp S(BMC)$ is igaz. Ez azt is jelenti, hogy $AP \perp CP \subset S(BMC)$, vagyis a $CPA\sphericalangle = 90°$. Így a térbeli *Thalész*-tétel megfordítása miatt a P pont rajta van az AC átmérőjű gömbön is,

$$(**)\qquad P \in G_{AC}.$$

Ha $M = C$, akkor $MP = CP$, így a $CPA = 90°$a merőleges vetület miatt nyilvánvaló. Ha pedig $M = A$, akkor $M = A = P$ adódik.

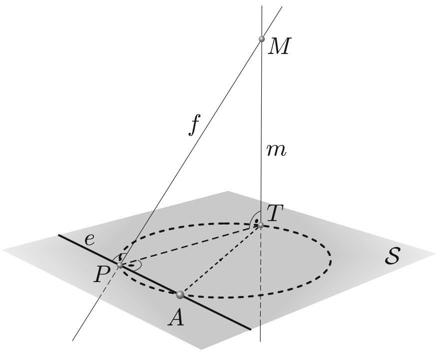
Így az $(*)$, a $(**)$ és a speciális helyzeteket is figyelembe véve $P \in G_{AB} \cap G_{AC}$.

Igazolnunk kellene még, hogy a gömbök közös körének ($G_{AB} \cap G_{AC}$) egy tetszőleges, az A-tól és az A-nak a BC-re vonatkozó merőleges vetületétől (ezek nyilvánvalóan elemei a megoldásnak) különböző P' pontjához tartozik egy, a k körön lévő M' pont (BPM' kollineárisak), ami esetén az eredeti feltételek teljesülnek. Legyen M' a B-ből kiinduló, P'-t tartalmazó félegyenes és az eredeti sík metszéspontja. Mivel $P' \in G_{AB} \cap G_{AC}$, ezért rajta lesz mind a két gömbön, így a *Thalész*-tétel miatt $AP'B\sphericalangle = CP'A\sphericalangle = 90°$. Mivel $AP' \perp CP'$ és $AP' \perp M'P'$ ($AP'M'\sphericalangle = 90°$, kiegészítő szög), így $AP' \perp S(CM'P') = S(CM'B)$, amiből az következik, hogy $AP' \perp CM'$ is igaz. Mivel $CM' \perp AB$ (eredeti feltétel), így $CM' \perp S(ABP') = S(ABM')$, egyben $CM' \perp M'A$ is. A *Thalész*-tétel megfordításából az következik (a $CM'A$ derékszögű háromszög létezik), hogy M' rajta van az eredeti k körön.

Tehát a mértani hely: az AB szakaszra, illetve a BC szakaszra mint átmérőkre illeszkedő gömbök közös körének minden pontja. A közös kör középpontját és átmérőjét ki lehet számolni az $M = C$ esetből (házi feladat).

A *GeoGebra* ennek a feladatnak nemcsak a megoldásának a megtalálását segíti, de a viszonylag bonyolult térbeli problémát is szemléletessé, átláthatóvá teszi.

6. *Az $\mathcal{S}$ síkban fekvő e egyenes forog a rajta lévő fix A pont körül. Legyen az m egyenes az $\mathcal{S}$ síkra merőleges, metszéspontjuk pedig T, az M pedig az m egyenes T-től különböző pontja. Határozzuk meg az M-ből az e egyenesre húzott f merőlegesek P talppontjainak mértani helyét az e körbeforgása esetén.* **[EE/II/V.5.]**



Megoldás. A feladat szövege alapján vezessük be a következő jelöléseket:

$$M \in m;\quad m \perp \mathcal{S};\quad m \cap \mathcal{S} := T;$$

$$M \in f;\quad e \perp f;\quad e \cap f := P.$$

Vizsgáljuk először, ha $P \neq A; T$. Az $e \perp f$ és $m \perp \mathcal{S}$ feltételekből a három merőleges egyenes tétele alapján következik, hogy

$$TP \perp e \Rightarrow TPA = 90^\circ.$$

Ezért *Thalész* tételének megfordítása következtében igaz, hogy P rajta van az AT szakaszra mint átmérőre rajzolt *Thalész*-körön.

Speciális helyzetben, ha $TA \perp e$ vagy $T \in e$, akkor $P = A$, illetve $P = T$ adódik, nem alakul ki a derékszögű TPA háromszög, de a T és az A pont a feltételek nyilvánvaló teljesülése miatt hozzátartozik a keresett mértani helyhez.

Meg kell még néznünk, hogy az A-tól és a T-től (ezek részei a megoldáshalmaznak) is különböző, a körön lévő tetszőleges P' pont esetén a $P'M \perp e$ $(f' \perp e)$ igaz lesz-e. Az $AP'T\sphericalangle = 90^\circ$ a *Thalész*-tétel miatt (az $AP'T$ háromszög létezik), az $AP' \perp m$ (eredeti feltétel), így $AP' \perp S(P'TM)$, amiből az következik, hogy $P'M \perp e$ $(f' \perp e)$ igaz lesz, így a mértani hely az AT átmérőjű teljes körvonal lesz.

A feladat megoldását ismét kezdhetjük a *GeoGebrának* a kört kirajzoló nyomvonal funkciójával, ami segít a speciális helyzetek diszkussziójában is.

Gyula, Csíkszereda, 2021 nyarán

Isten veled, Barátunk!

Kereskényi Miklós, Marczis György, Páll R. Olga
Segítettek: *Bíró Bálint, Pálinkás István, Szilassi Lajos*

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

Az első néhány számban a feladatsorok nem fedik le teljes egészében a hivatalos követelményrendszert, hogy a már tanult ismereteket kelljen csak felhasználni a megoldáshoz. Igyekszünk a feladatsorok nehézségét az éles sorokhoz igazítani, vagyis – az előző évekhez képest – könnyebbek lesznek.

I. rész

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{x+3}$,

b) $\dfrac{1}{\cos x+1}+\dfrac{1}{\cos x-1}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x}$. (*12 pont*)

2. Ha a fonyódi hajóállomás mólójának (F) végéről a badacsonyi kikötő (B) felé nézünk, akkor ettől az iránytól jobbra 75°-os szögben Révfülöp kikötője (R), balra 28°-os szögben pedig Szigliget kikötője (S) látszik. Tudjuk, hogy az FRB háromszög egyenlő szárú, melynek alapja FB, valamint azt is, hogy az FBS háromszög is egyenlő szárú, amelynek alapja az FS szakasz. Egy vitorlás hajó egyik nap Fonyódról Révfülöpre, onnan Badacsonyba, majd Szigligetre vitorlázott, ahol a hajón utazók megebédeltek, és visszatértek Fonyódra. Fonyód a Balaton déli partján, Badacsony vele szemben, a Balaton északi partján található. A badacsonyi kikötő a fonyóditól 5,2 km-re van ($FB=5{,}2$ km), a Föld görbületétől eltekinthetünk.

a) Számítsuk ki, hogy legalább hány km-t tett meg ezen a napon a vitorlás. A végeredményt egész számra kerekítve km-ben adjuk meg.

Kiderült, hogy a hajón tartózkodók közül néhányan már korábban is ismerték egymást (az ismeretség kölcsönös). Egy n csúcsú gráffal ábrázoltuk ezeket az ismeretségi viszonyokat, ahol a személyeket a csúcsok jelképezték, két csúcsot akkor és csak akkor kötött össze él, ha a csúcsoknak megfelelő személyek korábban már ismerték egymást. Olyan egyszerű, összefüggő gráfot kaptunk, amelynek 10 éle lett. Jelölje A az n csúcsú egyszerű, összefüggő gráf élei számának lehetséges legkisebb, B pedig a lehetséges legnagyobb értékét.

b) Hányan utaztak a hajón, ha $\frac{A+B}{2}=10$? (*12 pont*)

3. Tekintsük az alábbi kijelentéseket:

A) Ha egy egyszerű gráf csúcsainak száma páratlan, akkor van páros fokú csúcsa.

B) Ha egy számtani sorozat konvergens, akkor különbsége pozitív szám.

C) Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem korlátos.

D) Ha egy mértani sorozat hányadosának abszolút értéke egynél kisebb, akkor a sorozat konvergens.

a) Igazak vagy hamisak az állítások?

b) Fogalmazzuk meg az *A*) és *D*) kijelentések megfordítását, majd döntsük el ezek logikai értékét.

Minden esetben indokoljuk válaszunkat. (*14 pont*)

4. *a*) Számítsuk ki az y tengely azon pontjának koordinátáit, amelyből az $A(-1;1)$, $B(3;9)$ pontok derékszögben látszanak.

Az $A(-1;1)$, $B(3;9)$, továbbá a C pont illeszkedik az $y=x^2$ egyenletű parabolára, C rajta van a parabola A és B közé eső ívén.

b) Határozzuk meg C koordinátáit, ha az ABC háromszög területe a lehető legnagyobb. (*13 pont*)

II. rész

5. Egy 100 lakásos társasház lakói az éves rendes közgyűlésre készülnek. A Lakóbizottság a közelgő nagy felújítás költségeinek biztosítására a jelenlegi közös költség emelését fogja javasolni. A korábbi tapasztalatok szerint azonban p%-os emelés esetén a lakók $\frac{p}{3}$%-a csak az emelés előtti összeget hajlandó fizetni (velük szemben jogi eljárást indíthat a Lakóbizottság, ami hosszabb távon eredményre vezethet, de a közelgő felújításig nem fog befejeződni), a többiek fizetik az emelt költséget. Most minden lakás tulajdonosa fizeti a havi 10 000 Ft-os közös költséget.

a) Összesen mennyi pénzt fizetnének be a tulajdonosok havonta a társasház számlájára, ha 15%-kal növekedne a közös költség?

A Lakóbizottság tagjai tudják, hogy nagymértékű emelést a közgyűlés nem fogadna el, ezért a felújításhoz minimálisan szükséges emelést fogják javasolni. A társasház folyószámláján 3 millió 430 ezer Ft van, a 36 hónap múlva kezdődő felújításig a számlán legalább 50 millió Ft-nak kell lennie. A társasháznak a lakók befizetésén kívül más bevétele nincs, a folyószámlát kezelő bank által fizetett kamat elfogy a banki költségekre és egyéb apróbb kiadásokra.

b) Számítsuk ki, hogy mennyi legyen a lakásonként fizetendő megemelt havi közös költség a megadott feltételekkel. Az eredményt 100 Ft-ra kerekítve adjuk meg.

A közös képviselő a korábbi közgyűlési jegyzőkönyveket tanulmányozva érdekes dolgot figyelt meg. Hét olyan közgyűlés volt, amelyen a résztvevők létszáma – megfelelő sorrendbe rakva – egy számtani sorozat szomszédos elemeit képezte. A hét adat mediánja 66, szórása 6.

c) Mekkora az adatok terjedelme? (*16 pont*)

6. Értelmezzük a valós számok halmazán az „újösszeg” (jele: $\oplus$) műveletet a következőképpen:

$$a \oplus b = a + b + ab \quad (a, b \in \mathbb{R}),$$

valamint az „újszorzat” (jele: $\odot$) műveletet az alábbiak szerint:

$$a \odot b = \frac{ab}{a+b} \quad (a, b \in \mathbb{R},\ a + b \neq 0).$$

a) Melyek azok a valós számok, amelyeknek „újösszege” 90, „újszorzata” 4?

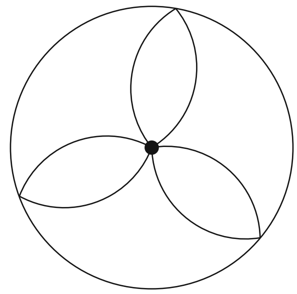
b) Igazoljuk, hogy az „újösszeg” műveletre teljesül a csoportosíthatósági tulajdonság (asszociativitás), azaz

$$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c,$$

vagyis elhagyhatók a zárójelek ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

c) Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x \oplus y \oplus z = 2021$ egyenletet. (*16 pont*)

7. Az *ábra* egy játékokat készítő cég tervezett emblémáját mutatja, melyet a termékekre a kör középpontja körül elforgatható módon rögzítenek. A forgásszimmetrikus alakzat egyes tartományait úgy festik be, hogy a közös határvonallal rendelkező tartományok színe különbözik egymástól. Piros, sárga, kék és zöld szín közül lehet választani, és egy emblémán mind a négy színnek szerepelnie kell. Nevezzük a kör belsejében levő körívek határolta konvex tartományokat „szirom”-nak, a konkáv részeket pedig „háttér”-nek.



a) Hányféleképpen színezhető ki az embléma, ha a „szirmok” színének különbözniük kell egymástól, továbbá azonos színezésűnek tekintjük azokat az emblémákat, amelyek a kör középpontja körüli elforgatással alak és szín szerint egymásba vihetők?

Az emblémák gyártásához használt berendezés üzembe helyezésekor 1000 darabos nullszériát készítettek, amelynek minden példányát megvizsgálták. Dobozba gyűjtötték a hibás darabokat, ezekből összesen 100 db lett, majd feljegyezték, hogy 57-nek szín hibája, 53-nak pedig méret hibája van.

Véletlenszerűen kivettünk ebből a dobozból egy emblémát, megállapítottuk hibájának típusát, ezután visszatettük a többi közé. Később megismételtük az előbbi eljárást még egyszer.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak méret hibás, vagy csak szín hibás emblémákat vettünk ki a dobozból? (*16 pont*)

8. Egy osztály, ahol kétszer annyi a lány, mint a fiú, többnapos kirándulásra készül, amelynek programjában három fakultatív foglalkozás is szerepel, melyekre előzetesen lehetett jelentkezni. Mindenkinek legalább egy programon részt kellett vennie, de akár mindháromra is feliratkozhatott bárki.

Az összesítés után megállapították, hogy a tanulók $\frac{4}{5}$-e hajókirándulásra, $\frac{7}{10}$-e falumúzeumi látogatásra, $\frac{3}{5}$-e pedig kalandparki programra jelentkezett. Hárman jelölték meg mindegyik foglalkozást.

a) Ha az osztály tanulói közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet, mennyi a valószínűsége, hogy ő a hajókirándulásra is és a kalandparki programra is jelentkezett, a falumúzeumi látogatásra azonban nem?

Ebben az osztályban egyik alkalommal háromfős bizottságot választottak sorsolással úgy, hogy cetlikre írták az osztályba járó tanulók nevét, mindegyikre egyet-egyet, majd urnába helyezték a cédulákat. Ezután az urnából véletlenszerűen kivettek egy cédulát, a rajta levő nevet felírták a táblára, félretették a papírlapot, majd ezt a sorsolást megismételték még kétszer.

Jelölje $P(A)$ annak valószínűségét, hogy a táblán legalább két lány, $P(B)$ pedig annak valószínűségét, hogy legalább egy fiú neve szerepel.

b) Számítsuk ki $P(A)$ és $P(B)$ értékét. (*16 pont*)

9. A *képen* látható, a hagyományos futball labdához hasonlító testet 12 fekete szabályos ötszög, és alkalmas számú fehér szabályos hatszög határolja.

Az ötszög oldalának hossza megegyezik a hatszög oldalának hosszával.

a) Hány csúcsa, lapja és éle van a testnek?

b) Egy fehér hatszög területe hány %-kal nagyobb egy fekete ötszög területénél?

c) Igazoljuk, hogy a derékszögű háromszögben a körülírt és beírt körök sugarának összege egyenlő a befogók számtani közepével. (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Tájékoztató a folyóirat előfizetéséről

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok megrendelhető a kiadónál, a MATFUND Alapítványnál a szerkesztőség címén; valamint a következő címen: `http://www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`. Előfizetési díj a 2021–2022-es tanévre (2021 szeptemberétől 2022 májusáig) 8800 Ft. Azonos címre küldendő, 9-nél nagyobb példányszámú megrendelés esetén a csoportos előfizetési díj a korábbi évekhez képest változott, a részletes árak a fenti oldalon olvashatók. Csekket és számlát a szeptemberi számmal együtt küldünk, a fizetés csak ezután történhet.

Lapunk előfizetői az előfizetett példány címlapján látható előfizetői azonosító segítségével a kitűzött feladatainkhoz már a lap nyomtatott változatának megjelenésével egyidejűleg hozzáférhetnek.

A Bolyai János Matematikai Társulat (BJMT) tagjai által igénybevehető kedvezményekről kérjük, olvassa el a Társulat honlapján a „Tagsági információk”-at: `www.bolyai.hu`.

Azok, akik az idén kérik felvételüket a Bolyai János Matematikai Társulatba, felvételi kérelmük elbírálása után (legközelebb várhatóan októberben) értesítést és tagdíjbefizetési csekket kapnak, ezért külön nem szükséges előbb jelentkezniük.

A Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok példányonkénti ára 1050 Ft.

Kérjük versenyzőinket, hogy a KöMaL 2021–2022-es tanévi matematika, fizika és informatika pontversenyének *versenykiírását* figyelmesen olvassák el!

Versenykiírás*
a KöMaL 2021–2022. évi pontversenyeire

Kedves Versenyzőnk!

Matematikából, fizikából és informatikából különféle nehézségű pontversenyeket indítunk. Az idei tanévtől kezdve csapatban is lehet versenyezni, melynek rész-

*Kérjük, hogy azok is figyelmesen olvassák el a versenykiírást, akik tavaly már részt vettek valamelyik versenyünkben.

letei a továbbiakban olvashatók. A versenyek 9 hónapon keresztül, 2021 szeptemberétől 2022. június elejéig tartanak. Minden hónapban új feladatokat tűzünk ki, és a megoldásokat a következő hónap elejéig küldheted be. A verseny végeredményét 2022. szeptemberi számunkban hirdetjük ki. A díjakat jövő ősszel, a KöMaL Ifjúsági Ankéton adjuk át.

Pontversenyeinkben a részvétel a 2021/2022-es tanévben is térítésmentes. Kérjük azonban versenyzőink szüleit, hozzátartozóit, vagy az őket támogató intézményeket, cégeket, hogy előfizetésükkel és adományaikkal segítsék Lapunk fennmaradását.

Nevezés a versenyre

Versenyeinkben minden általános iskolás és középiskolás korú tanuló részt vehet.

Az Európai Unió Általános Adatvédelmi Rendelete (GDPR) értelmében szülői engedély szükséges a 16 évesnél fiatalabb versenyzőink adatainak nyilvántartásához. Az ő esetükben egy szülői nyilatkozatra is szükség van, melyet a regisztráció során lehet megadni. Amennyiben a szülői nyilatkozat nem érkezik meg, a versenyző nem szerepelhet az eredménylistában. Adatkezelési szabályzatunk a `https://www.komal.hu/info/adatkezeles.h.shtml` címen olvasható.

Regisztráció

Ha még soha nem vettél részt a KöMaL versenyeiben, az első lépés a *regisztráció a honlapunkon* (`https://www.komal.hu/u?a=reg`). A regisztráció során alapvető adatokat (név, születési dátum, iskola, osztály, e-mail cím) kérünk. A későbbi bejelentkezéshez szükséges jelszavadat e-mailben küldjük el.

A nagyon gyakori családnevű versenyzőknek (Horváth, Kiss, Varga stb.) javasoljuk, hogy válasszanak egy háromjegyű jelzőszámot, amit második vezetéknévként használnak (pl. Kiss 349 Anna, Szabó 344 Péter). Kérjük, hogy mind a regisztrációkor, mind pedig a tanév során beküldött dolgozataidon is minden esetben az így kibővített nevet használd.

A sikeres regisztráció után adhatod meg további adataidat (pl. felkészítőtanárok neve; levelezési cím: ide szoktuk küldeni az érettségizettek oklevelét), és nyilatkozhatsz a részletes pontszámok nyilvánosságáról vagy egyes konkrét versenyekben való részvételről.

Ha korábban már regisztráltál, akkor nincs szükség újabb regisztrációra; a tavalyi jelszavadat továbbra is használhatod; ugyanakkor szükséges lesz a személyes beállításaid áttekintése, felülvizsgálata.

Az egyes pontversenyekre az első dolgozat beküldésével nevezhetsz be.

A versenyekbe a tanév során később is be lehet kapcsolódni.

FONTOS! A versenyben csak a regisztráció után, a Munkafüzetbe beírt vagy feltöltött megoldásokat értékeljük! A regisztráció nélkül, postán vagy e-mailben beküldött megoldásokat utólag sem vesszük figyelembe!

Az osztályok számozása

A KöMaL versenyeiben az osztályokat 5-től 12-ig számozzuk. Lehet, hogy a számozás nem azonos az iskolában használt számmal. Azok számítanak 12. osztályosnak, akik most kezdik az érettségi vizsga előtti utolsó évet. 11. és 10. osztályosnak számítanak azok, akik várhatóan 2023-ban, illetve 2024-ben fejezik be a középiskolát.

Azok, akik $8+5$ éves képzésben vesznek részt, például a nyelvi előkészítő osztályok tanulói, két egymás utáni évben is 9. osztályosnak számítanak. Kérjük, ha az osztályod sorszáma nem 1-gyel nőtt tavalyhoz képest, ezt jelezd a szerkesztőségnek e-mailben.

A regisztráció módosítása

A regisztráció után az azonosításhoz szükséges adataidat (név, iskola, osztály, e-mail cím) önállóan nem módosíthatod. Ha ezek megváltoztak, kérjük, hogy fordulj e-mailben a szerkesztőséghez.

Mindenkit óvunk a regisztráció önkényes megismétlésétől, a többszörös regisztrációtól. Nincs olyan helyzet, amikor a többszörös regisztráció segítene; csak még nagyobb zavart okoz. (Ugye nem szeretnél kétszer szerepelni a pontversenyben, feleakkora pontszámmal?)

Arcképek

Ha szeretnéd, hogy fényképed megjelenjen honlapunkon a pontverseny eredményében, küldd el a szerkesztőségnek e-mailben. Ha lehet, válassz világos, egyszínű hátteret. A képeket többnyire átméretezzük és megfelelő méretűre vágjuk, ezért érdemes nagyobb felbontást használni.

Csapatversenyek

A 2021/22-es tanévben csapatok számára is meghirdetünk több pontversenyt a hagyományos egyéni pontversenyek mellett. Várjuk

2-3 fős csapatok jelentkezését a C és B matematika,
az I informatika, a G és P fizika,
továbbá 2 fős csapatok nevezését az M fizika mérési pontversenyekre.

A csapatversenyek általános szabályai megegyeznek az egyéni nevezésű hagyományos versenyek szabályaival (a versenyek leírását lásd lentebb), feladatai megegyeznek az egyéni verseny feladataival.

A csapattagoknak egyénileg is kell regisztrálniuk, ha korábban nem regisztráltak. Ezután lehet csapatot regisztrálni. A tagok lehetnek különböző iskolából és különböző évfolyamokról is. Egy csapat abban a kategóriában fog versenyezni, ami az évfolyam szerinti legidősebb tagjának a kategóriája.

Egy személy több csapatnak is tagja lehet, illetve indulhat egyéni versenyben is, de egy pontversenyben pontosan egyszer vehet részt. Nem lehet versenyezni egyszerre a C csapatversenyben és a K, B vagy A egyéni pontversenyben, illetve a G csapatversenyben és a P egyéni versenyben.

A C és B csapatversenyeket két kategóriában: a 9-10. évfolyamosok, illetve 11-12. évfolyamosok; az I, M és P csapatversenyeket egy-egy kategóriában: a 9-12. évfolyamosok; továbbá a G csapatversenyt egy kategóriában: a 9-10. évfolyamosok számára hirdetjük meg.

Matematika versenyek

Négyféle versenyt indítunk, növekvő nehézségi sorrendben **K**, **C**, **B** és **A** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de az egyéni K és B pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. Ha kilencedik osztályos vagy, akkor a személyes beállításaid között nyilatkozhatsz, hogy melyik versenyben szeretnél részt venni.

Mindegyik versenyünkre érvényes, hogy **egy feladatra csak egy megoldást értékelünk.**

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

K-*jelű matematika feladatok* – az ABACUS és a KöMaL Közös pontversenye Kilencedikes Kezdőknek

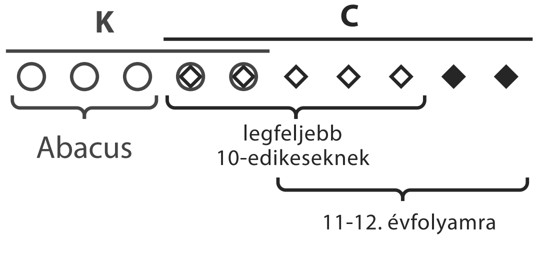
A K-pontversenyben csak kilencedik osztályosok indulhatnak. Azoknak ajánljuk, akik még csak most ismerkednek a KöMaL-lal. Szeptembertől márciusig hét fordulóban, havonta öt feladat jelenik meg; ezek közül három feladat az ABACUS pontversenyével közös. **Mindegyik feladat teljes megoldása 5 pontot ér.** A feladatokat az *ABACUS matematikai lapok* bocsátja a KöMaL rendelkezésére.

Az ABACUS pontversenyében továbbra is az általános iskolák 3–8. osztályos tanulói vehetnek részt.

Azok a 9-edikesek, akik K-ban indulnak, nem lehetnek tagjai C pontversenybe nevezett csapatnak.

C-*jelű matematika gyakorlatok*

A C-pontverseny gyakorlatait azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a B és az A kategória feladatait. Itt rendszeresen közlünk az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat, azok találhatnak itt kedvükre valót, akik valamivel – de nem sokkal – szeretnének túllépni az iskolai matematika keretein, vagy emelt szintű érettségit kívánnak tenni matematikából. **A 2021/22-es tanévtől a C pontverseny első két feladata megegyezik a K pontverseny utolsó két feladatával, jelölésük K/C lesz.** A megoldásra kapott pontszámok mindkét pontversenybe beszámítanak – hasonlóan az I/S informatika feladatok pontszámításához. A K pontversenyben továbbra is csak 9. évfolyamos, illetve nyelvi előkészítő évfolyamra járó tanulók vehetnek részt, ugyanakkor versenyezhetnek egyszerre mind a K, mind a C pontversenyekben – az utóbbiban a 10-edikesekkel egy kategóriában.



A gyakorlatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, más részük azonban a 11–12. évfolyam tanulmányaira támaszkodik. Minden hónapban hét gyakorlatot tűzünk ki, ebből az 1–5. gyakorlatokra a legfeljebb 10. évfolyamosok, a 3–7. gyakorlatokra pedig a 11–12. évfolyamosok küldhetnek be megoldást. Minden dolgozatra legfeljebb 5 pont kapható.

A C-pontversenyt egyéniben három korcsoportban: 5–8., 9–10., illetve 11–12. osztályosok, csapatban pedig két korcsoportban értékeljük: 5–10., illetve 11-12. osztályosok. Aki a C csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg sem a K, sem a C, sem a B versenyben (de indulhat a B csapatversenyben).

B-*jelű matematika feladatok*

A B-pontversenyben havonta összesen nyolc feladatot tűzünk ki, de havonta mindenkinek **legfeljebb hat** megoldását számítjuk be a pontversenybe (amelybe azonban először a nem versenyszerűeket számítjuk be, lásd lentebb). Az eredményes versenyzéshez tehát nincs szükség valamennyi feladat megoldására; ki-ki gondolja végig, mely példákkal foglalkozna szívesen, hogyan érhetné el a legtöbb pontot.

A B-feladatok sorrendje megfelel az iskolai tananyagnak: egy feladatsoron belül az alacsonyabb sorszámúakat ajánljuk a fiatalabbaknak. A feladatok – szándékaink szerinti – nehézségét a közölt pontszám jelzi (többnyire 3–6).

Az egyéni B-pontverseny eredményét öt korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9., 10., 11., illetve 12. évfolyamokban; a csapatversenyét pedig két korcsoportban értékeljük: 5–10., illetve 11-12. osztályosok. Aki a B csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg a B versenyben.

A-*jelű nehezebb matematika feladatok*

Az A-pontverseny a legfelkészültebb diákok számára jelent kihívást. Azoknak ajánljuk, akik tudományos kutató pályára vagy nemzetközi versenyekre készülnek.

Havonta két vagy három A-feladatot tűzünk ki, mindegyik feladatra legfeljebb 7 pont kapható. Az A-verseny résztvevőit nem különítjük el évfolyamonként, mindannyian együtt versenyeznek.

Fizika versenyek

Háromféle fizika versenyt indítunk: **M**, **G** és **P** kategóriában. Egy tanuló több pontversenyben is indulhat, de az egyéni G és P pontversenyek közül csak az egyiket választhatja. A legfeljebb 10. osztályosoknak honlapunkon, a személyes beállításaik között kell nyilatkozniuk, hogy a P- és G-versenyek közül melyikben kívánnak részt venni.

Természetesen örömmel várunk általánosításokat, megjegyzéseket, másfajta megoldási vagy kitűzésre tett javaslatokat, ezeket szívesen közöljük, sőt, a pontversenyen kívül különdíj formájában is elismerjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

M-*pontverseny* – fizika mérési feladatok

Havonta egy mérési feladatot tűzünk ki, valamennyi korosztály számára közösen. A feladatok megoldásával 6-6 pontot lehet szerezni.

A mérés elvégzéséhez egyéni versenyzőként is szabad egy személy (családtag, osztálytárs, barát) segítségét is igénybe venni. A segítő személy adatait a mérési jegyzőkönyv elején a versenyző adatai mellett tüntessétek fel. Lehet kétfős csapatban is indulni a versenyen, azaz az egyéni versenyzők és a csapatok egy közös versenyen indulnak. Aki egy csapat tagjaként indul az M versenyben, nem versenyezhet egyénileg is, csak másik versenyben.

G-*jelű fizika gyakorlatok*

A G-pontversenyben legfeljebb 10. osztályosok vehetnek részt. Azoknak az olvasóinknak ajánljuk, akik túl nehéznek vagy szokatlannak találják a P-feladatokat. Többnyire az iskolai tananyaghoz szorosabban kapcsolódó gyakorlatokat találnak a versenyzők, így azok is eséllyel indulhatnak, akik még nem rendelkeznek feladatmegoldó rutinnal, de a gyakorlatok megoldásával és beküldésével felkészülhetnek arra, hogy a következő években eredményesen szerepelhessenek a P-pontversenyben.

Minden hónapban négy G-gyakorlatot tűzünk ki, az elérhető pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött gyakorlatok közül, de **havonta legfeljebb három** feladat megoldását (először a nem versenyszerűeket) számítjuk be a pontversenybe.

Az egyéni G-pontverseny eredményét három korcsoportban tartjuk nyilván: a 8. évfolyamig, a 9. és 10. évfolyamokban; a csapatversenyét pedig egyetlen korcsoportban: 5–10. osztályosok. Aki a G csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg sem a G, sem a P versenyben (de indulhat a P csapatversenyben).

P-*jelű fizika feladatok*

Havonta nyolc (esetenként kilenc) elméleti feladatot tűzünk ki, nem nehézségi, hanem az életkornak megfelelő sorrendben. A pontszámokat a feladatok után feltüntetjük. Mindenki szabadon választhat a kitűzött elméleti feladatok közül. **Az 5–8. évfolyamosoknak havonta legfeljebb három, a 9–12. évfolyamosoknak legfeljebb négy megoldását** számítjuk be a pontversenybe (azonban először a nem versenyszerűeket).

Az elméleti versenyt egyénileg korosztályonként (8. évfolyamig, 9., 10., 11., 12. évfolyam) külön-külön összesítjük és értékeljük, a csapatversenyét pedig egyetlen korcsoportban: 5–12. osztályosok. Aki a P csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg a P versenyben.

Informatika versenyek

I-*pontverseny* – informatika alkalmazási és programozási feladatok

Havonta három **I** jelű és egy **I/S** jelű feladatot tűzünk ki valamennyi korosztály számára közösen. Mindegyik feladat 10 pontot ér. A feladatok egy része általános iskolásoknak is ajánlható, nagyobb része azonban a középiskolai tanulmányokra támaszkodik. Alapvető célunk, hogy e feladatok segítsék a felkészülést az informatika versenyekre és az emelt szintű érettségire. Minden hónapban a négy kitűzött feladatból a három legmagasabb pontszámot elért feladat pontszámát számítjuk be az I-pontversenybe.

Az I jelű feladatok programozási és informatika alkalmazói feladatok. A feladatok egyike jellegében és formájában is lényegében megegyezik az érettségin kitűzött feladatokkal, ezt az (É) betűvel jelezzük a feladat sorszáma mellett. Versenyzőink ezen feladatok megoldásával a vizsgára való felkészülést is gyakorolhatják.

Az I/S jelű feladatok az I jelű programozási feladatoknál nehezebb, de az S jelűeknél könnyebb programozási feladatok. A megoldáshoz szükséges ismeretek és algoritmusok megtalálhatók a `http://tehetseg.inf.elte.hu/nemes` és a `https://www.oktatas.hu/pub_bin/dload/kozoktatas/tanulmanyi_versenyek/oktv/oktv2021_2022_vk/116_informatika_2122.pdf` oldalakon.

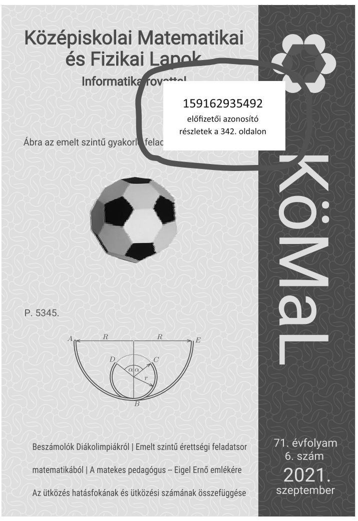
Aki az I csapatversenyben indul, nem indulhat egyénileg sem az I, sem az S versenyben.

S-*pontverseny* – nehezebb programozási feladatok

Az **S**-pontverseny egy **S** jelű nehezebb programozási feladatból és az I-pontversenyben is résztvevő **I/S** feladatból áll. A feladatokra legfeljebb 10 pont kapható. Mindkét feladat a programozási versenyekre való felkészülést szolgálja. A megoldáshoz szükséges ismeretek és ajánlott algoritmusok körét a Nemzetközi Informatikai Diákolimpiákon alkalmazott angol nyelvű leírás (IOI Syllabus) tartalmazza, lásd `https://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/`. Az S és I/S feladatok értékelésénél az eredmény helyességén kívül azt is figyelembe vesszük, hogy az algoritmusok mennyire hatékonyak, nagyméretű bemenő adatok esetén is lefutnak-e a megadott időkorláton belül. Az S pontversenyt egy kategóriában (5–12. évfolyam) értékeljük.

A feladatok megjelenése

Új feladatokat havonta, szeptembertől májusig tűzünk ki. A feladatokat megtalálod nyomtatott számunkban és honlapunkon.



Honlapunkon a feladatokat, szeptember kivételével, az adott hónap 28. napján hozzuk nyilvánosságra. Előfizetőink azonban az adott típusú feladat beküldési határidejét követő naptól elérhetik a következő havi feladatok szövegét, és elkezdhetik a munkát. Amennyiben előfizettél a KöMaL-ra, a személyes beállításaid között add meg előfizetői kódodat. Az előfizetői azonosítót megtalálod a szeptemberi szám címlapjára ráragasztott címkén.

Azok az előfizetőink, akik (például életkoruknál fogva) nem versenyzőink, regisztráció és az előfizetői kód megadása után, a versenyzőkkel együtt szintén elérhetik a feladatok szövegét.

Egy előfizetői kódot csak egy személy használhat.

A dolgozatok tartalma

Kérjük, tanulmányozd a korábbi számainkban és honlapunkon megjelent megoldásokat, ezek sokat segíthetnek annak megértésében, hogy milyen formát és részletességet várunk el a beküldött megoldásoktól.

Matematika és fizika elméleti megoldások

A megoldás leírása azt jelenti, hogy az olvasót végigvezeted a megoldásod lépésein. Törekedj a rövid, olvasható leírásra. Próbáld alaposan átgondolni a lépések sorrendjét, és lerövidíteni a megoldást. A gondos leírás sok időt igényel; ne hagyd az utolsó pillanatra.

Maximális pontszám csak teljes megoldásért jár; puszta eredményközlésért nem adunk pontot. A kimondott állításokat igazolni kell. Levezetés és hivatkozás nélkül csak a középiskolai tananyagban szereplő tételeket fogadjuk el. Közismert tételekre (pl. Menelaosz-tétel, Hölder-egyenlőtlenség stb.) elegendő a nevükkel hivatkozni, egyéb esetekben ki kell mondani a felhasznált tételt, és fel kell tüntetni az idézett forrást (cím, oldalszám vagy internet-cím). Tételekre való hivatkozáskor azt is meg kell mutatni, miért teljesülnek a tétel feltételei, és hogyan következik a tétel állításából a bizonyítás gondolatmenetének következő lépése.

Többször előfordult már, hogy egy-egy feladat szerepelt valamely példatárban, vagy megtalálták az interneten. Arra is láttunk példát, hogy egy folyóiratcikkben, vagy éppen a KöMaL egy korábbi feladatában a feladatban kitűzöttel lényegében ekvivalens, vagy annál általánosabb állítás bizonyítása szerepelt. Célunk továbbra is versenyzőink problémamegoldó képességének fejlesztése, nem pedig a keresőprogramok tesztelése, ezért **nem adunk pontot azokra a dolgozatokra, amelyek csak a megoldás helyét közlik, vagy azt mutatják meg, hogy a feladat egy nehezebb tétel speciális esete vagy triviális következménye; a végeredményhez vezető megoldást részletesen le kell írni.**

Ha a megoldáshoz könyvekben vagy az interneten talált írásokat használsz fel, és ezekből idézel, tüntesd fel a felhasznált forrásokat.

A **fizika feladatoknál** előfordulhat, hogy a feladat szövege nem tartalmaz a numerikus megoldáshoz szükséges minden konkrét információt, például bizonyos anyagi állandókat, földrajzi vagy csillagászati mennyiségek számszerű értékeit. Ilyenkor vagy a Négyjegyű függvénytáblázatokban, vagy az **interneten** kereshetjük meg a szükséges adatokat.

A hosszabb, összetettebb gondolatmeneteket érdemes tagolni, részekre bontani; használj, bekezdéseket, címeket és alcímeket. A különböző segédállításokra, képletekre és ábrákra könnyebb hivatkozni, ha megszámozod.

A geometria feladatok megoldásának fontos részei az ábrák, amelyeken követni és ellenőrizni lehet a megoldás lépéseit. Mindig rajzolj ábrát, **az ábra nélküli, vagy nem megfelelő ábrát tartalmazó megoldásokat nem tekintjük teljesnek. A gondolatmeneted azon lépéseire, amelyekhez nincs mellékelve a szükséges ábra, nem kapsz pontot**. Bonyolultabb ábrák esetén az egyes geometriai objektumokat szövegesen is definiáld (pl. „legyen P' a P pont tükörképe az e egyenesre"). Elektronikus beküldés esetén ügyelj a megfelelő felbontásra. A felbontás akkor megfelelő, ha a számítógép képernyőjén elfér, és a fontos részletek is jók kivehetőek. A jó ábra mérete többnyire 500–1000 pixel között lehet.

A matematika példák megoldásaként számítógépes programokkal – beleértve az olyan online szolgáltatásokat is, mint például a Wolfram Alpha – kiszámított eredményeket nem fogadunk el. Ha harmincnál több esetet vizsgálsz, pedig lényegesen le lehetett volna szűkíteni az esetek számát, azt is úgy tekintjük, mintha programot írtál volna.

Mérési feladatok

A mérés leírása (mérési jegyzőkönyv) feltétlenül tartalmazza a mérés elvének áttekinthető leírását (a mérési elrendezés vázlatos rajzával, esetleg fotókkal), megfelelő számú és pontosságú mérési adatot (áttekinthető táblázatban, a mértékegységeket is megadva), a mérési adatok kiértékelését (lehetőleg grafikusan ábrázolva), és a hiba nagyságrendjének becslését. A mért és számított mennyiségeket ne adjuk meg indokolatlanul sok tizedesjeggyel, hanem csak a becsült hibával összhangban álló pontossággal. A mérési jegyzőkönyv legyen viszonylag tömör, de annyira áttekinthető, hogy annak alapján bárki meg tudja ismételni a leírt mérést. Nagyon sok (50-nél több) mérési adat esetén elegendő azoknak csak egy „reprezentatív" részét beküldeni és a többinek csak az átlagát közölni. A 6 oldalnál hosszabb jegyzőkönyv tartalmazzon egy rövid (kb. 1/2 oldalas) összefoglalást.

Informatika megoldások

Az I-jelű programozási feladatok megoldását Basic, C++, C#, Java, Pascal vagy Python nyelvek egyikén kell elkészítened. A fejlesztéshez bármilyen fejlesztőkörnyezetet használhatsz, javasoljuk az Oktatási Hivatal honlapján elérhető emelt szintű érettségi szoftverlista fejlesztőeszközeit.

Az I-pontversenyben kitűzött alkalmazói feladatok megoldásához szintén az előbbi szoftverlista eszközeit javasoljuk. Az alkalmazói feladatokat a listán szereplő alkalmazásokkal fogjuk értékelni. Az egyéb használható alkalmazásokat egy-egy feladat leírása tartalmazza, ezek jórészt szabadon fölhasználható programok.

Az I/S és S-jelű feladatok megoldását C, C++, Pascal vagy Java nyelvek valamelyikén kell elkészítened. A megoldáshoz dokumentációt kell írnod és a forráskódot kommentekkel kell kiegészítened. A különálló dokumentációban a megoldás elvi menetének, algoritmusának ismertetését várjuk. A forráskód kommentezésének lényege, hogy segítségével – a dokumentáció ismeretében – könnyen megérthető legyen az egyes kódsorok, kódrészletek feladata, szerepe a megoldás menetében.

Az I/S és S-jelű programozási feladatok megoldását ellenőrizd a `http://ideone.com` vagy a `http://onlinegdb.com` tesztkörnyezetben a feladathoz elérhető bemenetekkel. Ezeknek a feladatoknak az értékelése részben automatikusan történik, ezért fontos, hogy a program az előírás szerinti formában adjon kimenetet.

A megoldások elkészítése és beküldése

Megoldásodat a Munkafüzetben küldd be.

A matematika és fizika dolgozatokat honlapunkon megszerkesztheted vagy kész fájl formájában feltöltheted. Az informatika feladatok megoldását csak feltölteni tudod.

Azokat a dolgozatokat, amelyek több feladat megoldását tartalmazzák egy fájlban, vagy külalakjuk miatt értékelhetetlenek, nem versenyszerűnek tekintjük. Nem versenyszerű továbbá az olyan megoldás, ahol rendes képletek helyett nehezen értelmezhető karaktersorozatok vannak, pl. `x2+((1+5+2sqrt(5)x2)/4` vagy `(1+gyök5)/2*x`.

A megoldások online szerkesztése az Elektronikus Munkafüzetben

Az Elektronikus Munkafüzet a honlapunk része. Webes felület, amely lehetőséget ad a megoldás közvetlen beírására, szerkesztésére. A megoldásaidat módosíthatod, átszerkesztheted a beküldési határidőig.

Képletek szerkesztéséhez a TEX rendszert használjuk. Javasoljuk, hogy honlapunkon járd végig a *TEX tanfolyamot* (`https://www.komal.hu/mf?a=tk`).

Kész fájlok feltöltése

Megoldásaidat az otthoni vagy iskolai számítógépeken is elkészítheted, és a kész fájlt honlapunkon feltöltheted. Matematika és fizika feladatok megoldása esetén a többféle operációs rendszerben olvasható **PDF formátumot** használd. A dokumentum elején legyen ott az ún. fejléc: a feladat száma pirossal, név, osztály, város, iskola.

Kézírással készült megoldásodat vonalazás és négyzetháló nélküli, fehér papírra írd, majd megfelelő minőségben, egy darab pdf fájlként töltsd fel a Munkafüzetbe.

Ügyelj arra, hogy a kép jól olvasható legyen, és a felbontás ne legyen se túl nagy, se túl alacsony. Ha fényképezel, érdemes több képet készíteni szórt (természetes) fénynél, és a legjobban sikerült képet használni. A képet fordítsd álló helyzetbe, a szélét vágd körbe, hogy csak a megoldás maradjon a képen, végül méretezd át.

Fényképek feldolgozására sokféle képmanipuláló programot és telefonos applikációt használhatsz. Mi a CamScannert ajánljuk leginkább, mert ezzel könnyen készíthetsz egy darab megfelelő pdf fájlt.

Az informatika megoldások beküldése

Az informatika feladatok megoldásait kizárólag kész fájlként tudod feltölteni a Munkafüzetbe. Amennyiben a megoldás több fájlból áll, úgy egy, a fájlok mindegyikét és a dokumentációt is tartalmazó, a feladat sorszámával egyező nevű mappát kell ZIP tömörítéssel becsomagolva egyetlen fájlként beküldened. Ügyelj arra, hogy a tömörített állományokba futtatható fájlok (pl. a fejlesztéskor létrejövő `.exe` állomány) ne kerüljenek.

A programozási feladatoknál a forráskód első soraiban megjegyzésként szerepeljen

- a feladat száma;
- a versenyző teljes neve (jelzőszámmal) és osztálya;
- az iskola neve városnévvel együtt;
- az alkalmazott fordítóprogram neve és verziószáma.

Kérjük, hogy a programozási feladatoknál a program be- és kimenete mindig a feladatban megadott módon valósuljon meg. Erre azért van szükség, mert a beküldött programokat sokféle tesztadatra lefuttatjuk, és ezt igyekszünk automatizálni.

Az informatika feladatokkal kapcsolatos bárminemű kérdéseket, esetleges reklamációkat az `inf-szerk@komal.hu` címre várjuk.

A beküldési határidő

A beküldési határidő matematikából a lap megjelenését követő hónap 10., fizikából és informatikából a 15. napja; szombat, illetve munkaszüneti nap esetén a következő munkanap. Vedd figyelembe az internet esetleges hibáit és a beküldési határidő idő előtti órákban a szerver gépünk esetleges túlterheltségét; ilyen okokra hivatkozva sem fogadunk el késedelmes dolgozatokat.

Értékelés

A pontversenyek állását és versenyzőink részletes eredményeit a honlapunkon folyamatosan közöljük. Versenyzőinket e-mailben is értesítjük a pontszámok változásairól. Javítóink a pontszámon kívül szöveges értékelést is küldhetnek, például felhívhatják a figyelmedet a dolgozatod hiányosságaira. Ez azonban nem kötelező, ugyanis a javítóknak nem ritkán százas nagyságrendű dolgozatot kell kijavítani, amit ráadásul az egyetemi tanulmányaik mellett tesznek.

Reklamációk

A dolgozatok értékelése után az Elektronikus Munkafüzetben rövid kérdést vagy üzenetet küldhetsz a javítónak, ő pedig ugyanott válaszolhat. A különböző feladatokat különböző javítók javítják, ezért mindig csak az adott feladatról kérdezz.

Ügyelj az udvarias hangvételre. Olyan módon kérdezz, amit szemtől-szemben, akár a tanáraiddal vagy a szüleiddel szemben is helyesnek tartanál.

Eldöntetlen vita, reklamáció esetén a szerkesztőséghez fordulhatsz. Reklamációkat a feladat értékelése után két hétig fogadunk el a `szerk@komal.hu` címen.

Szabálytalan versenyzés

FONTOS! Akik egyénileg versenyeznek egy adott pontversenyben, azoknak önállóan kell elkészíteniük a példák megoldásait. Tilos a kitűzött feladatokat a beküldési határidő előtt másokkal megvitatni, másoktól segítséget kérni vagy elfogadni a feladatok megoldásához. A közösen készített vagy másolt dolgozatokat – beleértve az eredeti szerzőét is – *nem versenyszerűnek értékeljük.* Egy csapat tagjai egymással megbeszélhetik, megvitathatják az adott verseny feladatait, majd minden feladatra egy közös megoldást adnak be. A csoportosan másolt dolgozatokat visszaküldjük az osztályt tanító tanárnak. Súlyosabb, az egész pontversenyt veszélyeztető esetekben (pl. a feladatok megtárgyalása internetes fórumokon) az érintett versenyzőket és csapatokat kizárjuk a versenyből.

A végeredmény közzététele

A versenyek végeredménye az összes dolgozat kijavítása után, várhatóan augusztus elején a honlapunkon, majd a 2022. szeptemberi számunkban jelenik meg. A legeredményesebb versenyzők arcképét 2022. decemberi számunkban közöljük. A legjobbak a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány pályadíjait és tárgyjutalmakat kapnak a 2022. évi *KöMaL Ifjúsági Ankét* rendezvényén. Az okleveleket postán küldjük el.

Néhány megjegyzés

A versenyben résztvevő hozzájárul a dolgozatának név nélküli, valamint a szerkesztett változat névvel történő közléséhez.

Örömmel fogadunk feladatjavaslatokat, cikkeket, szakköri munkáról szóló beszámolókat, közlésre alkalmas iskolai pályamunkákat. Javaslataikat, közleményeiket postán vagy e-mailben juttathatják el szerkesztőségünkbe. Szép, érdekes és nem közismert feladatokat bárki javasolhat kitűzésre. A javasolt feladatokat (megoldásokkal együtt) a szerkesztőség címére küldjék el. A diákok elfogadott feladatjavaslatai közül a legszebbeket különdíjban részesítjük. Versenyzőink akkor kapnak pontot az általuk javasolt feladatra, ha annak megoldását – a többi feladat megoldásához hasonlóan – feltöltik a Munkafüzetbe.

Szeretnénk, ha a kitűzött kérdések nem zárulnának le véglegesen a beküldési határidővel, a közölt megoldással. Erre teremt lehetőséget az internetes KöMaL fórum. Bármely, a lapunkban megjelent feladathoz, cikkhez kapcsolódó megjegyzést, általánosítást szívesen látunk és alkalomadtán közöljük.

Végezetül mindenkinek eredményes tanévet és sikeres versenyzést kíván

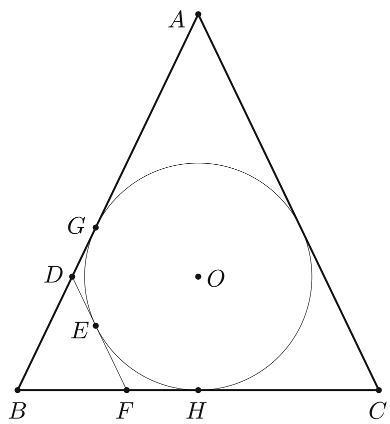
a Szerkesztőség

Matematika feladatok megoldása

B. 5110. *Egy egyenlő szárú háromszögbe írható körnek az oldalakkal párhuzamos érintői a háromszögből három kis háromszöget vágnak le. Bizonyítsuk be, hogy az alapra illeszkedő kis háromszögek alaphoz tartozó magassága megegyezik a háromszögbe írható kör sugarával.*

(*3 pont*)

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. A beírt kör az AB oldalt a G, a BC oldalt pedig a H pontban érinti. (Mivel a háromszög egyenlő szárú, ezért H az alap felezőpontja.) A beírt kör AC oldallal párhuzamos érintője a kört az E pontban érinti, továbbá az AB oldalt a D, a BC alapot pedig az F pontban metszi.



1. ábra

Az ABC háromszög hasonló a DBF háromszöghöz, mert megfelelő oldalaik párhuzamosak. A hasonlóság arányát a kerületek arányából fogjuk kiszámolni.

A DBF háromszög kerülete:

$$DB+BF+FE+ED=DB+BF+FH+DG=$$
$$=(DB+DG)+(BF+FH)=BG+BH=2\cdot BH=BC=a.$$

Az ABC háromszög kerülete $a+b+c$, ezért a hasonlóság aránya

$$\frac{a}{a+b+c}.$$

Legyen T az ABC háromszög területe, r a beírt körének sugara, s pedig a félkerülete. Az ABC háromszögben $m=AH$ az alaphoz tartozó magasság, így a DBF

háromszög D-hez tartozó magassága az ismert $T=rs$ összefüggés felhasználásával:

$$m\cdot\frac{a}{a+b+c}=\frac{ma}{a+b+c}=\frac{2T}{a+b+c}=\frac{2rs}{a+b+c}=\frac{2rs}{2s}=r.$$

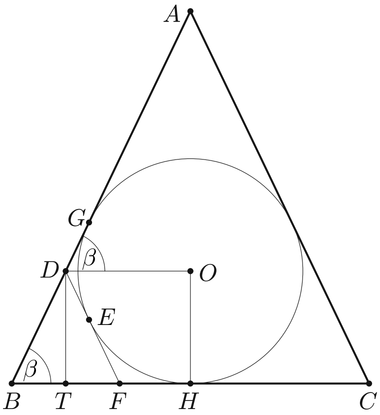
Ezt kellett bizonyítanunk.

Mácsai Dániel (Keszthelyi Vajda J. Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

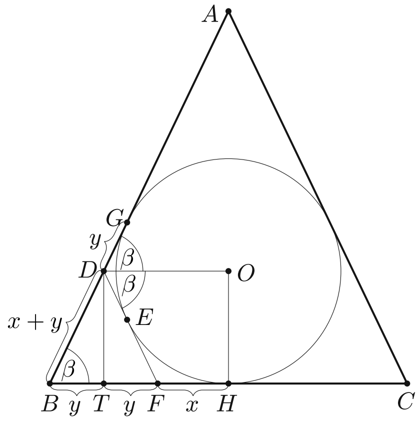
II. megoldás. Az első megoldás jelöléseit megtartjuk (*2. ábra*).

A DBF háromszög szempontjából az eredeti ABC háromszög beírt köre már a DF oldalhoz hozzáírt kör. A hozzáírt kör középpontja egy belső és két külső szögfelező metszéspontja. A DBF egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei $DBF\sphericalangle=BFD\sphericalangle=\beta$, így a D csúcsnál fekvő külső szög $ADF\sphericalangle=2\beta$. E szög felezője, a DO félegyenes tehát β nagyságú szögekre osztja ezt a szöget. Látjuk, hogy a DBF és az ADO szögek egyállásúak, vagyis $DO\parallel BC$. Tudjuk még, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, vagyis $OH\perp BC$. Innen már azonnal adódik, hogy a D, illetve O pontból a BC-re állított merőleges szakaszok egyenlő hosszúak: $DT=OH=r$.

Bognár András Károly (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)



2. ábra



3. ábra

III. megoldás. Egészítsük ki az előző megoldások jelöléseit: legyen a D pontból a BC alapra bocsátott merőleges talppontja T.

A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőségét fogjuk többször felhasználni. A *3. ábra* jelöléseivel:

$$EF=FH=x,\qquad DE=DG=y,\qquad BD=FD=x+y.$$

A T pont felezi a BF szakaszt, továbbá a B pontból a körhöz húzott érintőszakaszok is egyenlő hosszúságúak, tehát

$$BH=BF+FH=2BT+x,$$

illetve

$$BH = BG = BD + DG = DF + DG = x + y + y = x + 2y.$$

A BH kétféle felírása alapján $BT = y = DG$. Mivel az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, így $OG \perp AB$. A BTD és DGO derékszögű háromszögek egyik befogója és a második megoldás alapján hegyesszögei is megegyeznek, tehát a két háromszög egybevágó, amiből $DT = OG = r$.

Deák Gergely (Szolnok, Verseghy F. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 146 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 100 versenyző, 2 pontos 23, 1 pontos 16 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 6 tanuló. Nem versenyszerű 1 tanuló dolgozata.

B. 5115. *Ali erszényében n darab érme lapul, Babának pedig van $n-1$ darab, kezdetben üres erszénye. Baba a következő játékot játssza: a kezdetben egy erszényben lévő érméket szétosztja két erszénybe, egyikbe a_1, másikba b_1 érmét téve $(a_1, b_1 > 0)$, és a táblára felírja az a_1b_1 szorzatot. Majd innentől (az előzőhöz hasonlóan) a k-adik lépésben $(k = 2, 3, \ldots)$ kiválaszt egy legalább két érmét tartalmazó erszényt, a benne lévő érméket szétosztja két üres erszénybe, egyikbe a_k, másikba b_k érmét téve $(a_k, b_k > 0)$, és a táblára felírja az a_kb_k szorzatot.*

A játék akkor ér véget, ha minden erszénybe 1-1 érme került. Ekkor Ali kiszámolja a táblán lévő a_kb_k szorzatok összegét és ennyi aranyat ad Babának.

Legfeljebb mennyi aranyat kaphat Baba?

(*5 pont*)

I. megoldás. Az n szerinti teljes indukcióval megmutatjuk, hogy Babának mindig $n(n-1)/2$ a nyeresége.

(I) $n = 1; 2$ esetén triviális az állítás.

(II) Tegyük fel, hogy egy $n = k$-ig minden nála kisebb, vagy egyenlő pozitív egészre igaz az állítás.

(III) Igaz-e $n = k+1$-re?

Osszuk a $k+1$ aranyat tetszőlegesen két, $a_1 = m > 0$ és $b_1 = k+1-m > 0$ részre. A táblára kerülő első szorzat ilymódon: $a_1b_1 = m(k+1-m)$. Innentől az indukciós feltevés alapján az m érmés erszény miatt $m(m-1)/2$, a másik, $k+1-m$ érmés erszény miatt pedig $(k+1-m)(k-m)/2$ érme lesz Baba nyereménye. Így Baba teljes nyereménye:

$$m(k+1-m) + m(m-1)/2 + (k+1-m)(k-m)/2 =$$
$$= m(m-1)/2 + m(k+1-m)/2 + m(k+1-m)/2 + (k+1-m)(k-m)/2 =$$
$$= m(m-1+k+1-m)/2 + (k+1-m)(m+k-m)/2 =$$
$$= mk/2 + (k+1-m)k/2 = k(m+k+1-m)/2 = k(k+1)/2 = n(n-1)/2.$$

II. megoldás. Rajzoljunk egy n csúcsú (kezdetben) teljes gráfot. A gráf csúcsai az n darab érmét jelentik, míg a gráf élei azt ábrázolják, hogy az adott két érme egy erszényben van-e. Abban a lépésben, amikor két érme külön erszénybe kerül, töröljük le a megfelelő élt! Gondoljuk végig, mi történik, ha egy $a_k + b_k$ érméből álló erszényt két, egyenként a_k és b_k érmés erszényre osztunk. Az $a_k + b_k$ érmés erszénynek a gráfban megfelelő $a_k \cdot b_k$ darab élt le kell törölnünk. Tehát a táblára írt $a_k b_k$ számok pontosan az adott lépés során a gráfban letörölt élek számával egyeznek meg. Mivel a gráfban végül nincs egyetlen él sem (és minden élt pontosan egyszer töröltünk le),

$$\sum_i a_i b_i = n(n-1)/2,$$

azaz Baba nyereménye valóban bármely esetben $n(n-1)/2$.

III. megoldás. Jelölje a k-adik lépés után egy n-dimenziós v_k vektor az érmék elhelyezkedését. A v_k i-edik koordinátája $x_{k,i}$ annyi, ahány érme a k-adik lépés után az i-edik erszényben van. Vizsgáljuk

$$|v_k|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{k,i}^2$$

értékének változását. Tegyük föl, hogy a k-adik lépésben a c-edik erszényből vettük ki a benne levő pénzt, és szétraktuk a d-edik és az e-edik erszénybe. Ekkor

$$x_{k-1,c} = a_k + b_k, \quad x_{k-1,d} = x_{k-1,e} = 0$$

és $x_{k,c} = 0$, $x_{k,d} = a_k$, $x_{k,e} = b_k$. Ezeken kívül c, d és e kivételével minden i-re teljesül, hogy $x_{k-1,i} = x_{k,i}$.

Nézzük $|v_k|^2 - |v_{k-1}|^2$ értékét.

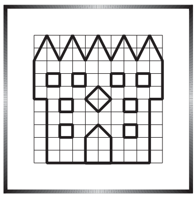
$$\begin{aligned}|v_k|^2 - |v_{k-1}|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x_{k,i})^2 - x_{k-1,i})^2 = \\ &= x_{k,c}^2 + x_{k,d}^2 + x_{k,e}^2 - x_{k-1,c}^2 - x_{k-1,d}^2 - x_{k-1,e}^2 = \\ &= a_k^2 + b_k^2 - (a_k + b_k)^2 = -2a_k b_k.\end{aligned}$$

Tehát a k-adik lépésben a v vektor hosszának négyzete $2a_k b_k$-val csökken, ezért az összes lépés alatt pont kétszer annyival csökken, mint amennyi a táblán lévő szorzatok összege. Kezdetben $v_0 = (n, 0, 0, \ldots, 0)$, így $|v_0|^2 = n^2$. Az utolsó lépést követően pedig $v_u = (1, 1, 1, \ldots, 1)$, tehát $|v_u|^2 = n$. Mivel összesen $(n^2 - n)$-nel csökken a vektor hosszának a négyzete, a felírt szorzatok összege minden esetben $(n^2 - n)/2$. Tehát Baba ennyi érmét kap.

Terjék András (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

101 dolgozat érkezett. 5 pontos 85, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 2 pontos 1, 1 pontos 2, 0 pontos 6 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe: 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (694–698.)



K. 694. Hány olyan hétjegyű pozitív egész szám van, melyben a számjegyek balról jobbra rendre 1-gyel, vagy 2-vel növekednek? (Pl. a 1 234 678 ilyen szám.)

K. 695. Egy $ABCD$ négyzet alakú papírlap BC oldalán kiválasztunk egy P pontot. A négyzetlapot behajtjuk az AP vonal mentén úgy, hogy a B pont egyenlő távolságra kerüljön a C és D csúcsoktól. A B pont új helyét a papíron B'-vel jelöljük. Határozzuk meg a $CB'D$ szög nagyságát.

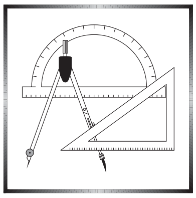
K. 696. A bal első zsebemben kétszer annyi pénz van, mint a jobb első zsebemben és harmadannyi, mint a jobb hátsó zsebemben. Ha a bal első zsebembe átteszek a jobb első zsebemből 30 Ft-ot, illetve a jobb hátsó zsebemből 180 Ft-ot, akkor a bal első zsebemben háromszor annyi pénz lesz, mint amennyi a jobb első zsebemben marad. Mennyi pénzem volt eredetileg ebben a három zsebemben külön-külön?

K/C. 697. Egy kocka néhány lapját befestettük, és a kockát felvágtuk egyforma méretű kisebb kockákra. Így 45 olyan kisebb kockát kaptunk, amelyiknek nincs befestve egyik lapja sem. Hány lapját festettük be a kockának?

K/C. 698. Dorka gondolt egy egész számra, amely legalább 3 és legfeljebb 25. Anna megadott egy x egyjegyű páros számot, majd megkérdezte Dorkát, hogy a gondolt szám négyzetszám-e, prím-e, illetve x többszöröse-e. Dorka azt válaszolta, hogy ha megmondaná a választ az egyes kérdésekre, akkor Anna már egyértelműen tudná, hogy melyik számra gondolt. Melyik számra gondolt Dorka?

Beküldési határidő: 2021. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (697–698., 1679–1683.)



Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 697. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 698. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1679. Igazoljuk, hogy az

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}$$

kifejezés értéke 0 és 1 közé esik.

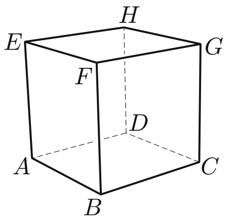
C. 1680. Egy négyszög egyik oldalának hossza 5 cm, a rajta fekvő két szög 90° és 60°. Tudjuk továbbá, hogy a négyszög húr- és érintőnégyszög is. Hogyan lehet ezek alapján megszerkeszteni a négyszöget? Írjuk le és indokoljuk a szerkesztés lépéseit (az elemi szerkesztési lépéseket, mint pl. szög felezése, tengelyes tükrözés, nem kell részletezni).

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

C. 1681. Legyenek a, b, c olyan, 0-tól különböző valós számok, amelyek összege 0. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{a^3-a^2+b^3-b^2+c^3+c^2}{ab}=3c+2.$$

Feladatok 11. évfolyamtól



C. 1682. Egy egységnyi élhosszúságú kocka csúcsai A, B, C, D, E, F, G, H az *ábra* szerint. Az $ABDE$ és $GCFH$ tetraédereket levágjuk a kockából. Mekkora az így kapott test felszíne és térfogata?

Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

C. 1683. Anna és Boglárka a következő játékot játsszák egy-egy négyzetrácsos lapon. Mindketten kijelölnek a saját négyzetrácsos lapjukon egy 10×10-es négyzetet és ezen beszíneznek 7 darab 1×1-es rácsnégyzetet kékre, 14-et pedig pirosra.

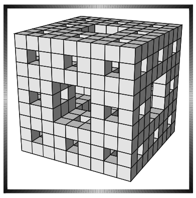
Egyikük sem láthatja, hogy a másik a 10×10-es négyzeten belül hogyan színezett.

Ezután egy forduló a következőképpen zajlik: először Anna mond egy (i,j) számpárt, ahol az i, j pozitív egész számokra $1\leqslant i,j\leqslant 10$ teljesül (például az $(5,2)$ számpár a 10×10-es négyzet 5. sorának és 2. oszlopának találkozásánál levő rácsnégyzetet jelenti). Ha az (i,j) számpár Boglárka ábráján egy színezett négyzetet határoz meg, akkor Boglárkának azt kell mondania, hogy „talált”, ellenkező esetben azt, hogy „nem talált”. Ezután ugyanilyen feltételek mellett Boglárka mond egy számpárt, amire Anna válaszol.

Az első két fordulóban sem Anna, sem Boglárka nem talált. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a harmadik fordulóban Anna egy kék, Boglárka pedig egy piros négyzetet talál el?

Beküldési határidő: 2021. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5182–5189.)



B. 5182. A $612^2 = 374\,544$ szám 10-es számrendszerben két darab 4-es számjegyre végződik. Legfeljebb hány 4-esre végződhet egy négyzetszám?

(*3 pont*) *Blahota István* javaslata alapján

B. 5183. Az ABC háromszög AB oldala egységnyi, $BAC\sphericalangle = 60°$, $ACB\sphericalangle = 100°$ és a BC oldal felezőpontja F. Az AB oldalon vegyük fel a D pontot úgy, hogy $DB = FB$ teljesüljön. Határozzuk meg a $T_{ABC\triangle} + 2T_{FBD\triangle}$ pontos értékét.

(*4 pont*) Javasolta: *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5184. Kornélia felvett a síkon négy pontot úgy, hogy ne essenek egy körre. Ezután megrajzolta az összes körvonalat, amely ettől a négy ponttól egyenlő távolságra halad el. Legfeljebb hány kört rajzolhatott? (Az O középpontú k körvonal és a P pont távolsága így mérendő: az O-ból induló P-t tartalmazó félegyenes és a k körvonal metszéspontja legyen M. Ekkor a PM szakasz hossza lesz a keresett távolság.)

(*5 pont*)

B. 5185. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sqrt[3]{4 - x^2} + \sqrt{x^2 - 3} = 1.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5186. Aladár és Béla következő játékot játssza. Rögzítenek egy $n \geqslant 3$ számot, majd Aladár gondol egy számra az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazból. Béla ezután tippelhet a gondolt számra. Válaszul csak azt kapja, hogy eltalálta vagy sem. Ha eltalálta, vége a játéknak.

Ha nem találta el, akkor Aladár megváltoztatja a gondolt számát úgy, hogy vagy növeli vagy csökkenti 1-gyel, de továbbra is pozitívnak kell maradnia a gondolt számnak (de n-nél nagyobb lehet). Béla ezután ismét tippelhet. Ezeket a lépéseket ismétlik addig, amíg Béla el nem találja az aktuálisan gondolt számot.

Bizonyítsuk be, hogy ha Béla elég ügyes, akkor a játék legkésőbb a $(3n - 5)$-ödik tippjével véget ér.

(*6 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5187. Az $S=\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz egy részhalmaza *primitív,* ha nincs benne két olyan elem, melyek közül az egyik osztója a másiknak. Mutassuk meg, hogy ha egy $A\subseteq S$ primitív halmazhoz nem lehet úgy hozzávenni újabb S-beli elemet, hogy primitív maradjon, akkor vagy $A=\{1\}$, vagy A mérete legalább annyi, mint n-ig a prímek száma.

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5188. Igazoljuk, hogy az érintőtrapéz magassága nem lehet nagyobb alapjai mértani közepénél.

(*5 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5189. Adott egy szabályos háromszög alapú egyenes gúla, az alapéle a. Legyen a beírt gömb sugara r, az alapot érintő hozzáírt gömb sugara R. Bizonyítsuk be, hogy $a^2=12rR$.

(*6 pont*) Javasolta: *László Lajos* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Figyelem! Az idei Kürschák József Matematikai Tanulóverseny 2021. október 8-án, pénteken 14 órakor kerül megrendezésre. A verseny helyszíneiről és lebonyolításáról szóló információkat később tesszük közzé a `https://www.bolyai.hu/versenyek-kurschak-jozsef-matematikai-tanuloverseny/` oldalon.

❄

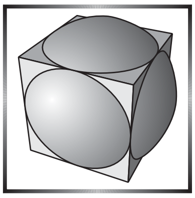
Tehetséggondozó foglalkozások a budapesti Fazekasban

A Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium ebben a tanévben is meghirdeti ingyenes, tehetséggondozó matematikai szakköreit 3.–12. évfolyamon. Hatodik osztályosok számára folyamatos felkészítést biztosítunk a speciális matematika tagozatos felvételi vizsgára. A szakkörökkel kapcsolatos részletes információk az iskola honlapján olvashatók: `matek.fazekas.hu`.

Minden érdeklődőt szeretettel várunk!

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (803–805.)



A. 803. Jelölje $\pi(n)$ az n-nél nem nagyobb prímszámok számát. Az $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy részhalmaza *primitív,* ha nincs benne két olyan elem, melyek közül az egyik osztója a másiknak. Bizonyítsuk be, hogy ha $n \geqslant 5$ és $1 \leqslant k < \frac{\pi(n)}{2}$, akkor az $1, 2, \ldots, n$ számok közül kiválasztható $k+1$ elemű primitív halmazok száma legalább annyi, mint a k-eleműeké.

Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

A. 804. Egy mesebeli városban n ember él. A városban *jogarvírus* teszteket szeretnének vásárolni, melyekkel egyszerre több embertől vett mintát is meg lehet vizsgálni. A következő eredménye lehet egy tesztnek:

- Vírus pozitív: a tesztelt emberek között van beteg, és nincs olyan, aki már korábban átesett a jogarvírus betegségen.
- Antitest pozitív: a tesztelt emberek között van, aki átesett a betegségen, és nincs beteg.
- Semleges: vagy mindenki egészséges, vagy van közöttük beteg és olyan is, aki már átesett a betegségen (az antitestek és a vírusok semlegesítik egymást).

Legalább hány tesztet kell vásárolniuk, ha meg szeretnék tudni, hogy a jogarvírus jelen van-e a városban, azaz van-e olyan ember, aki átesett rajta vagy éppen beteg? (Az emberektől a mintát egyszerre veszik, és mindenki vagy egészséges, vagy beteg, vagy már átesett a betegségen.)

Javasolta: *Beke Csongor* (Cambridge)

A. 805. Az ABC hegyesszögű háromszögben a magasságvonalak talppontjai a szokásos jelölésekkel A_1, B_1, illetve C_1 (a BC, a CA, illetve az AB oldalon). Az AB_1C_1 és a BC_1A_1 háromszögek körülírt köre az ABC háromszög körülírt körét másodszor a $P \neq A$, illetve a $Q \neq B$ pontban metszi. Igazoljuk, hogy az AQ és a BP egyenes, valamint az ABC háromszög Euler-egyenese egy ponton megy át vagy párhuzamos egymással.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. október 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 541. Andi és Bandi egy N ($1 \leqslant N \leqslant 100$) mezőből álló szalagon játszanak. A szalag mezői 1-től $2N$-ig sorszámozottak, a Start pozíció az 1-es mező előtt van. Kezdetben mindkettőjük bábuja a Start helyen áll. Andi és Bandi felváltva dobnak egy szabályos dobókockával és lépnek. A játék elején megállapodnak egy k ($1 \leqslant k \leqslant 100$) egész számban, ami a játék során mindkettőjük lépéseit befolyásolja.

Andi és Bandi felváltva lépnek egyet-egyet. Andi dob, előre megy a dobás számának megfelelő lépést, és ha most k-val osztható sorszámú mezőn áll, akkor automatikusan a következő k-val osztható mezőre ugrik. Ezzel befejezte a lépését, átadja a kockát Bandinak. Bandi egészen addig dob, amíg a dobott szám osztója k-nak vagy osztható k-val. Minden dobása után a dobott számnak megfelelő számot megy előre. Ha olyan számot dob, ami nem osztható k-val és nem is osztója k-nak, akkor a dobott számnak megfelelő mezőt előre megy és ezzel lépése befejeződött. Átadja a kockát Andinak, ő jön. A játék addig tart, amíg az egyik játékos túl nem lép az N-edik mezőn.

Andi és Bandi sokat játsszák a játékot, de így sem tudják megmondani, hogy milyen N és k mellett melyik játékosnak van nagyobb esélye nyerni. Készítsünk programot, ami segít ebben, és megadja, hogy ismert N és k esetén melyik játékosnak átlagosan hány lépésből áll túlmenni az N-edik mezőn. A program 10 000 játékmenet alapján számítsa ki az átlagos lépésszámot.

A program a standard bemenet első sorából olvassa ki N és k értékét, majd a kimenet egyetlen sorába adja meg egészre kerekítve Andi és Bandi átlagos lépéseinek számát.

Minta bemenet	**Minta kimenet**
`100 5`	`23 24`

Beküldendő egy tömörített `i541.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

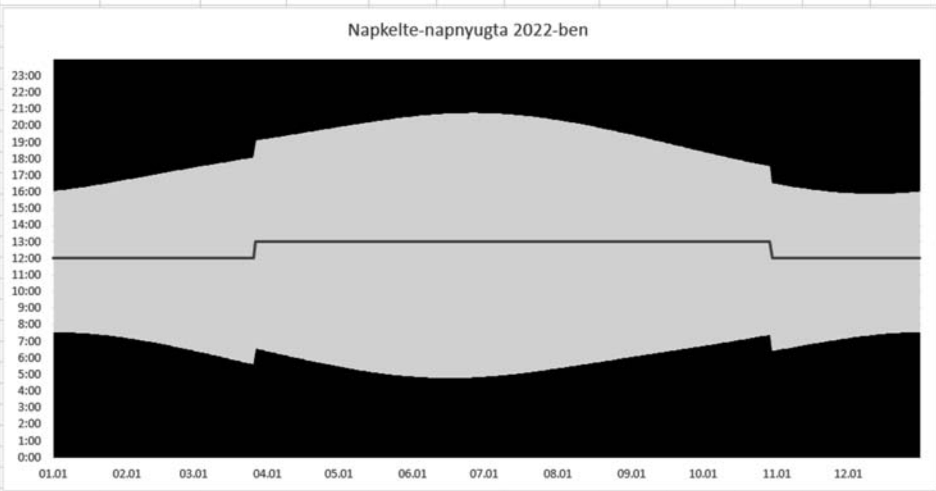
I. 542. Magyarország valamikor a közeljövőben befejezi a téli-nyári óraigazítást. Több javaslat van, például az, hogy a jelenlegi GMT + 1 időzónáról a GMT + 2 időzónába térjünk át, azaz óráinkat egy órával állítsuk előbbre. Egyelőre nincs eldöntve a kérdés.

Rendelkezésünkre áll 2022 minden napjára a napfelkelte és a napnyugta időpontja az óraátállítás figyelembevételével a `nap_forras.txt` tabulátorral tagolt, UTF-8 kódolású állományban.

Készítsük el az adatok elemzését és ábrázolását táblázatkezelővel. A megadott forrásadatokon kívül mást nem használhatunk fel, legfeljebb az eredményeinket ellenőrizhetjük. Megoldásunkat úgy készítsük el, hogy ha más év adatait helyezzük el a táblázatba, a számítások frissüljenek, helyes eredményt adjanak. Segédszámításokat tetszőleges oszlopokban, cellákban végezhetünk, melyek értelmezését feliratokkal segítsük. Megoldási módszerünket mutassuk meg, tehát ezeket a cellákat ne rejtsük el. Eredményeinket tetszőleges cellákban, jól láthatóan jelenítsük meg.

1. Töltsük be a `nap_forras.txt` szövegfájlt a táblázatkezelőbe az A1-es cellától kezdődően. Munkánkat `i542` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Adjuk meg a tervezett nyári és a téli időszámítás kezdetét 2022-ben.
3. Határozzuk meg a rendelkezésre álló adatokból a nyári és a téli napforduló dátumát.
4. Készítsük el a minta és a leírás szerinti diagramot:
   a) Az ábrázolást készítsük elő a szükséges adatok kiszámításával.
   b) A diagram típusát válasszuk ki célszerűen.
   c) A sárga terület a nappali, a fekete az éjszakát jelenti.
   d) A piros vonal a GMT + 1 idő szerinti delet jeleníti meg naponta.
   e) A tengelyek skálája és felirata legyen a *minta* szerinti, formázása is annak megfelelő.

Nyári időszámítás	Téli időszámítás	Nyári napforduló	Téli napforduló
2022.03.27	2022.10.30	2022.06.21	2022.12.22



Beküldendő az `i542.zip` tömörített állományban a munkafüzet, valamint egy rövid leírás, amelyben szerepel az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 543 (É). Az Abel-díj a Nobel-díjjal egyenértékű tudományos elismerés a kiemelkedő eredményt elérő matematikusok számára. A díjat 2003 óta ítélik oda minden évben, és a Nobel-díjhoz hasonló ünnepélyes keretek között adja át a norvég királyi család. A névadó *Niels Henrik Abel* norvég matematikus, aki az algebra, azon belül a csoportelmélet területén alkotott maradandót. Ezidáig három magyar matematikust is kitüntettek, az idei díjat megosztva *Lovász László* kapta.

Az Abel-díj magyar nyelvű Wikipédia-oldalán (`https://hu.wikipedia.org/wiki/Abel-díj`) többek között megtalálható egy táblázat, amely összefoglalja az eddigi díjazottak legfontosabb adatait. A táblázatban a származás, és ha attól eltérő, akkor a jelenlegi munkahely országa, egy vagy több munkahely, illetve a díj odaítélésében szereplő indoklás legfontosabb néhány mondata szerepel.

A feladatunk a táblázat adatainak feldolgozása lesz először táblázatkezelő alkalmazás, majd számítógépes program segítségével. Oldjuk meg az alábbi feladatokat és válaszoljunk a feltett kérdésekre. A feladatok megoldásakor mindig írjuk ki a feladat sorszámát, folytassunk párbeszédet a felhasználóval, például írjuk ki, hogy milyen adatot kérünk be és milyen eredményt írunk ki.

1. Másoljuk a Wikipédia-oldalon található táblázatot egy táblázatkezelő munkafüzet munkalapjára. Mentsük a munkafüzetet `abeldij` néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Mentsük a munkalap tartalmát CSV állományba `abeldij.csv` néven, a cellák közötti határokat a pontosvessző jelölje (nem fordul elő pontosvessző a táblázatban).
3. Tanulmányozzuk a CSV állományt. Töröljük az első sorból az esetlegesen ott található fejlécet. Egyszerű szövegszerkesztővel állítsuk be az állomány karakterkódolását úgy, hogy azt ékezethelyesen be tudjuk olvasni a későbbi feladatokban alkalmazott programozási nyelven. Amennyiben a programmal nem sikerül ékezethelyesen beolvasni az állományt, akkor cseréljük az ékezetes karaktereket ékezetmentes magyar megfelelőjükre.
4. Készítsünk programot `abeldij` néven, amely megfelelő adatszerkezetbe beolvassa a CSV állományt és eltárolja a programban további feldolgozás céljából. Az adatok feldolgozásánál figyeljünk arra, hogy az eredeti táblázatban összevont cellák is vannak, illetve van olyan cella, ahol több érték is szerepel.
5. Kérjünk be egy évszámot a felhasználótól, és adjuk meg, hogy ki, vagy kik voltak díjazottak az adott évben, és mely országokból származtak.
6. Kérjük be egy ország nevét, és adjuk meg azon díjazottak nevét és munkahelyeit, akik az adott országból származnak vagy az adott országban dolgoznak. Minden díjazottnak egy vagy két munkahelye szerepel a táblázatban.
7. Adjuk meg, kik azok a matematikusok, akik az algebra területén értek el kiemelkedő tevékenységet, tehát a díj indoklásában szerepel az algebra szó (esetleg ragozott alakban).

Minta:

```
5. feladat
Kérem adjon meg egy évszámot:2015
```

```
Név: John Forbes Nash született:  Amerikai Egyesült Államok
Név: Louis Nirenberg született:  Kanada
6. feladat
Kérem adja meg egy ország nevét:Magyarország
Díjazott: Lax Péter
Munkahely: Courant Matematikatudományi Intézet
Díjazott: Szemerédi Endre
Munkahely: Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Rutgers Egyetem
Díjazott: Lovász László
Munkahely: Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Eötvös Loránd
    Tudományegyetem
7. feladat
A következő matematikusok indoklásában szerepel az algebra szó:
Jean-Pierre Serre, Jacques Tits, John Milnor, Pierre Deligne.
```

Beküldendő egy tömörített `i543.zip` állományban a táblázatkezelő munkafüzet, a CSV állomány és program forráskódja, valamint egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I/S. 55. Vége a nyári szünetnek, a diákok már az iskola falain belül mesélik egymásnak, hogy hol voltak üdülni. Mindegyikük elmondta, mikor milyen várost látogatott meg.

Adjuk meg, hogy hány olyan páros van a diákok közt, akik a nyár során egyszer sem üdültek egyidőben egyazon városban.

Bemenet: az első sor egy N számot tartalmaz, az üdülések számát. A következő N sor mindegyike egy üdülést ír le: a sorban az üdülő utóneve és vezetékneve szerepel, aztán a meglátogatott város, végül, hogy az év hányadik napjától hányadik napjáig tartózkodott az adott városban. Például: `Kis Ferenc Budapest 210 220` jelentése, hogy Kis Ferenc Budapesten üdült az év 210-edik napjától a 220-adikig. Egy emberhez több üdülés is tartozhat, de minden diákhoz tartozik legalább egy üdülés. Mindenkinek pontosan egy utóneve van.

A kimenet egyetlen sorában adjuk meg, hogy hány olyan diákpáros van, akik nem üdültek egyik napig sem ugyanazon a helyen.

Minta:

Bemenet	Kimenet

`4`
`Kis Ferenc Budapest 210 220`
`Nagy Fruzsina Budapest 209 209`
`Kis Ferenc Miskolc 222 223`
`Tamas Tamas Miskolc 223 225`
	`2`

Magyarázat: Nagy Fruzsina nem találkozott Kis Ferenccel és Tamas Tamassal sem.

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 100$, a bemenet szavai csak az angol ABC betűit tartalmazzák, legföljebb 10 karakter hosszúak lehetnek és mindenki egy utónévvel szerepel.

Ha egy üdülés az x-ediktől az y-adik napig tart, akkor $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 365$. Egy diák egy napon legfeljebb egy helyen üdülhetett. Időkorlát: 0,2 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha minden diák csak egy helyen volt üdülni.

Beküldendő egy `is55.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 154. A diákoknak a tanév első matematikaóráján bemelegítésként egy számkereső rejtvényt kell megoldaniuk. Kapnak egy $N \times M$-es táblázatot, melyben pozitív egész számok szerepelnek. Egyik sem nagyobb, mint K. A feladat az, hogy segítségeket felhasználva kitalálják, hogy a táblázat melyik mezőjére gondolt a rejtvény készítője. Az első három segítség így hangzik:

1. A keresett szám két különböző prím szorzata.
2. A keresett szám pontosan egy oldalszomszédjánál nagyobb.
3. A keresett szám oszlopában nem szerepel kettőhatvány $(1, 2, 4, 8\ldots)$.

Adjuk meg, hány olyan mező van a táblázatban, melyre az állítások mindegyike igaz, vagyis az első három segítség alapján a feladvány megfejtése is lehetne.

Bemenet: az első sor az N, M és K számokat tartalmazza. A következő N sor mindegyike M számot tartalmaz, rendre a táblázat egy-egy mezőjében szereplő számot.

A kimenet egyetlen sorában adjuk meg, hány olyan mező van a táblázatban, melyre a három állítás mindegyike igaz.

Minta:

Bemenet (a `/` jel sortörést jelent)	**Kimenet**
`3 3 20 / 6 5 8 / 9 15 5 / 3 11 10`	`1`

Magyarázat: A 6, 10 és a 15 is megfelel az első feltételnek. A 15 minden oldalszomszédjánál nagyobb, a 10-es oszlopában pedig szerepel egy 8-as, így csak a 6-os lehet a megfejtés.

Korlátok: $2 \leqslant N, M \leqslant 100$, $10 \leqslant K \leqslant 10^6$. Időkorlát: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $K \leqslant 100$.

Beküldendő egy `s154.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. október 15.

❄

Kiemelkedő siker az 51. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

2021. július 17–24. között zajlott le az idei, 51. Nemzetközi Fizikai Diákolimpia (IPhO), melynek házigazdája Litvánia volt. A magyar csapat tagjai egy arany-, két ezüst- és két bronzérmet szereztek, amely az elmúlt évek legjobb eredményének számít. A szerzett érmek alapján Magyarország a nemhivatalos éremtáblázatban a 79 résztvevő ország között a tizenkettedik helyen végzett. A legjobb eredményt elért tizenöt ország érmeit és pontszámait az alábbi táblázat foglalja össze:

Érem- és ponttáblázat a 2021. évi 51. Nemzetközi Fizikai Diákolimpián

	ország	**arany-érem**	**ezüst-érem**	**bronz-érem**	**dicséret**	**pontszám**
1.	Kína	5	0	0	0	220,80
2.	Dél-Korea	5	0	0	0	207,85
3.	USA	5	0	0	0	189,02
4.	Oroszország	5	0	0	0	185,75
5.	Tajvan	4	1	0	0	177,60
6.	Románia	3	2	0	0	164,18
7.	Vietnám	3	2	0	0	161,99
8.	Hong Kong	3	2	0	0	158,50
9.	Szingapúr	2	3	0	0	150,95
10.	Franciaország	2	1	0	2	118,90
11.	Japán	1	3	1	0	138,10
12.	**Magyarország**	**1**	**2**	**2**	**0**	**131,11**
13.	Brazília	1	1	3	0	123,20
14.	Ukrajna	1	1	3	0	121,09
15.	Fehéroroszország	1	1	2	1	108,47

A csapattagok kiválasztása és felkészülése a világjárvány miatt a korábbi évektől eltérő módon történt. Az érdeklődő diákok már az elmúlt tanév elejétől csatlakozhattak a fizikai diákolimpiai szakkörökhöz, amelyek az ország öt pontján (Budapesten, Miskolcon, Szegeden, Székesfehérváron és Pécsen) továbbra is zavartalanul működtek. A járvány okozta nehézségeket a valódi fizikai jelenlétet igénylő foglalkozások helyett online szakköri alkalmakkal hidalták át a szakkörvezetők. A budapesti olimpiai szakkör videóra rögzített előadásai például heti rendszerességgel kerültek fel a legnagyobb videómegosztó oldalra, amelyek az IPhO Hungary című YouTube-csatornán[1] elérhetők. A tervek szerint a feltöltött videók száma folyamatosan növekedni fog, érdemes ezért a csatornára feliratkozni.

[1] `https://www.youtube.com/c/IPhOHungary`

A csapat kiválasztása három válogatókörben történt. Az elsőre március közepén került sor, amit online szerveztünk meg. A KöMaL-ban és a fizikai diákolimpiai szakkörök honlapján[2] hirdetett elméleti fordulón bárki részt vehetett, elég volt a szakköri honlapon közzétett feladatsor megoldásait szkennelve a megadott határidőig beküldeni. A három és fél órás versenyen négy rövid feladatot kellett megoldani, erre összesen 32 diák vállalkozott.

A 32 beérkezett dolgozat pontszáma alapján a legjobb 16 diák kapott lehetőséget a válogatás második körében való részvételre, amelynek időtartama egy hónap volt. Ez a program keretében került lebonyolításra. Ez a program a heti 3 alkalommal megtartott online felkészítő foglalkozásokból, illetve az azokat követő, szintén heti rendszerességű villámversenyekből állt. A 2,5 órás időtartamú villámversenyeken a diákok a felkészítő foglalkozásokon feldolgozott témakörökhöz (mágnesség, váltóáramú áramkörök, elektromágneses hullámok, optika és modern fizika) kapcsolódó feladatokat kaptak.

A válogatás harmadik – és egyben utolsó – körébe az a nyolc tanuló jutott, akik az első két válogatókörben (összesen 11 és fél órányi versenyzés során) a legtöbb pontszámot gyűjtötték. A harmadik válogatókört az elmúlt években megszokott, kétnapos Kunfalvi-verseny jelentette. Az április végén megrendezett verseny döntőjében egy 5 órás elméleti és egy 5 órás távolléti kísérleti feladatsort kellett a versenyzőknek megoldani. Az elméleti feladatok olimpiai stílusúak (hosszúak és sok alkérdésből állók) voltak, a kísérleti feladatsor pedig egy valódi optikai mérésből és egy számítógépes szimulációból állt, amelynek eredményeit egy valódi méréshez hasonlóan kellett kiértékelni. A mérési eszközöket a nyolc versenyző előzetesen postán, lepecsételt borítékban kapta meg.

A válogatás három körében szerzett összpontszám alapján (összesen 24 órányi felkészítő foglalkozás és 21,5 órányi versenyzés után) kialakult az ötfős csapat, akik a Nemzetközi Fizikai Diákolimpián képviselhették hazánkat:

Bokor Endre (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12. oszt.), tanára: *Schramek Anikó;*

Bonifert Balázs (Budapest, Baár-Madas Református Gimnázium, 12. oszt.), tanára: *Horváth Norbert;*

Kovács Balázs Csaba (Hatvan, Bajza József Gimnázium, 11. oszt.), tanárai: *Maruzsiné Sevella Judit, Kovács László;*

Tóth Ábel Levente (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12. oszt.), tanárai: *Schramek Anikó, Homa Gábor;*

Varga Vázsony (Budapest, Fazekas Mihály Gimnázium, 12. oszt.), tanára: *Schramek Anikó.*

A csapattagok felkészülése a válogatóversenyek után is folytatódott: május közepétől június közepéig heti rendszerességgel vettek részt a diákok elméleti felkészítő alkalmakon, a BME Fizikai Intézetében tartott mérési foglalkozásokon, illetve olimpiai stílusú feladatokból összeállított „próbaversenyeken”. A csapat számára az első nemzetközi erőpróba az *Európai Fizikai Diákolimpia*[3] (EuPhO) volt, amely

[2] `https://ipho.elte.hu`
[3] `https://eupho.ee/eupho-2021`

mára – mindössze négy év alatt – a világ második legnagyobb nemzetközi fizikaversenyévé nőtte ki magát. Az EuPhO-t június 19. és 26. között az előző évhez hasonlóan idén is online rendezték meg 46 ország részvételével, amelyen Kovács Balázs Csaba aranyérmet és abszolút 7. helyezést ért el, a többi csapattag pedig egy-egy ezüstérmet szerzett. Ezzel a kiváló eredménnyel az országok közötti rangsorban a magyar csapat összpontszáma a harmadik legmagasabb lett, Oroszország és Románia után. Az Európai Fizikai Diákolimpiáról szóló beszámoló egy későbbi számunkban olvasható majd.

Az idei Nemzetközi Fizikai Diákolimpiának Litvánia adott volna otthont, de május végére bizonyossá vált, hogy a pandémia miatt a verseny jelenléti formában való megtartására nincs lehetőség. Ezért az olimpiát a házigazdák által szabott szigorú szabályok és videókamerás felügyelet mellett országonként rendezték meg, amely nagy kihívást jelentett a helyi szervezőknek. Az öt diák és egy helyi felügyelő, *Tasnádi Tamás* (BME Matematikai Intézet) a rendezvény megnyitójától a második versenynap végéig egy hotelbe költözött, amit közben nem hagyhattak el. A feladatok véglegesítését, fordítását és a pontszámok végső egyeztetését (moderációt) a két csapatvezető, *Szász Krisztián* és *Vigh Máté* (BME Fizikai Intézet), illetve *Széchenyi Gábor* (ELTE Fizikai Intézet) megfigyelő végezte egy másik, az előírásnak megfelelően legalább 5 km távol lévő hotelben.

Az IPhO első versenynapján az ötórás kísérleti fordulóra került sor. A litván szervezők minden országnak postázták a kísérleti eszközöket tartalmazó csomagokat, amiket csak közvetlenül a verseny előtt, videókamerás kapcsolat mellett nyithatott fel a helyi felügyelő. A feladatsor két, egymáshoz lazán kapcsolódó, elektromos áramkörökkel foglalkozó feladatból állt. Mindkét kísérleti feladatban ugyanazon a nyomtatott áramköri panelen egy tablet és az azon futtatott alkalmazás segítségével végeztek méréseket a versenyzők. Az első feladat nemideális kondenzátorok kapacitásának hőmérséklet- és feszültségfüggéséről szólt, míg a második feladatban egy világító dióda (LED) áramerősség-feszültség karakterisztikáját kellett részletesen megvizsgálni. A rendelkezésre álló idő mindenkinek szűknek bizonyult, néhány versenyzőnek pedig a mérőprogrammal akadt problémája.

Az elméleti versenynapon a szokásos módon a diákok három feladatot oldottak meg öt óra alatt. Az első feladat az óceáni hátságok fizikájával, illetve a földrengéshullámok terjedésével foglalkozott. A második, elektrosztatikus lencsékről szóló feladatban egy vékony, töltött fémgyűrűnek a mozgó elektronokra gyakorolt fókuszáló hatása játszotta a főszerepet. A sok alkérdésből álló feladat több része is előkerült a felkészítések során, ezek a magyar csapat tagjainak jól sikerültek. A legnehezebb részben egy vékony gyűrű elektromos kapacitásának meghatározása volt a feladat, ami az egész mezőnyt tekintve is csak kevés versenyzőnek sikerült. A harmadik elméleti feladat a kvantumfizika különböző területeiről szemezgetett: előkerült a dobozba zárt részecske, a de Broglie-hullám, egy hosszú láncmolekula színképe, a Bohr-modell, de szó volt Bose–Einstein-kondenzátumról és hideg atomok lézeres csapdázásáról is. Sok feladatrész ismerős volt a magyar csapat tagjainak, de sajnos a feladatsor hosszú terjedelme miatt az utolsó részkérdésekre több csapattagnak már nem maradt ideje. A feladatokat és a megoldásokat terjedelmük miatt nem közöljük, azok megtekinthetők az idei verseny hivatalos honlapján (`https://www.ipho2021.lt/`).

A kísérleti fordulóban összesen 20 pontot, az elméletiben 30 pontot lehetett elérni. Az idei diákolimpián az éremhatárok (melyek mindig a teljes mezőny teljesítményéhez igazodnak) a következő módon alakultak: 9,15 ponttól dicséretet, 14,50 ponttól bronzérmet, 23,45 pont fölött ezüstérmet, 33,32 ponttól pedig aranyérmet kaptak az eredményesen szereplő diákok. A magyar versenyzők eredménye a következő:

Kovács Balázs Csaba: *aranyérem* (33,40 pont);

Bokor Endre: *ezüstérem* (30,80 pont);

Bonifert Balázs: *ezüstérem* (25,50 pont);

Varga Vázsony: *bronzérem* (21,30 pont);

Tóth Ábel Levente: *bronzérem* (20,20 pont).

Gratulálunk a csapatnak a szép eredményekhez. Szeretnénk köszönetet mondani a diákok középiskolai tanárainak, valamint sok sikert és hasonlóan tehetséges tanítványokat kívánunk nekik a továbbiakban. Köszönet az öt magyarországi olimpiai előkészítő szakkör vezetőinek a sok éven átívelő, kitartó munkájukért. Külön köszönet illeti továbbá *Sarkadi Tamást, Széchenyi Gábort, Tasnádi Tamást* és *Vankó Pétert* a csapat felkészítésében nyújtott segítségért. Végül köszönettel tartozunk az anyagi támogatásért az Emberi Erőforrások Minisztériumának.

Vankó Péter 1995 óta szakkörvezetője és csapatvezetője a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiára utazó magyar csapatnak. Sajnálatunkra idén úgy döntött, hogy a diákolimpiával kapcsolatos szervezési és oktatási feladatokat a fiatalabb kollégáinak átadva a háttérbe vonul. Bízunk benne, hogy több évtizedes tapasztalatára, segítségére még időről-időre számíthatunk, és köszönjük az együtt töltött években kifejtett áldozatos munkáját.

A következő, 2022. évi diákolimpiát Fehéroroszország rendezi meg. A versenyre való felkészülést a négy vidéki és a budapesti szakkör segíti:

Budapest: *Vigh Máté* (BME Fizikai Intézet, Budapest, 1111 Budafoki út 8.),

Miskolc: *Zámborszky Ferenc* (Földes Ferenc Gimnázium, 3525 Miskolc, Hősök tere 7.),

Pécs: *Pálfalvi László* (Pécsi Tudományegyetem, Fizikai Intézet, Ifjúság útja 6.),

Szeged: *Sarlós Ferenc és Csányi Sándor* (Szegedi Tudományegyetem, Dóm tér 9.),

Székesfehérvár: *Orosz Tamás* (Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Székesfehérvár, Budai út 45.).

A szakkörökkel kapcsolatos további tudnivalók, elérhetőségek, aktualitások és a felkészülést segítő anyagok a fizika diákolimpiai szakkörök hivatalos honlapján olvashatóak: `http://ipho.elte.hu`. A fenti szakkörökön kívül elsősorban önálló munkával, a KöMaL elméleti és mérési feladatainak rendszeres megoldásával és a hazai fizikaversenyeken való rendszeres részvétellel lehet készülni a jövő évi fizikai diákolimpiára.

Eredményes felkészülést kívánunk!

Szász Krisztián és **Vigh Máté,** csapatvezetők

Tehetséggondozás
Mérési szakkör a BME Fizikai Intézetében

A fizika iránt érdeklődő, tehetséges középiskolás diákok számára a BME Fizikai Intézet gyakorlati foglalkozásokat tart. A foglalkozásokon lehetőséget biztosítunk arra, hogy a tanulók mérőpárokban fizikai kísérleteket és méréseket végezhessenek. A foglalkozásokra októbertől kezdődően kéthetente, kedden 15.00-tól 18.00-ig kerül sor, összesen nyolc alkalommal. Információ, jelentkezési cím és határidő: `http://ipho.elte.hu/` (Szakkörök/mérési szakkör menüpont).

Elsősorban a középiskola utolsó két évfolyamára járók jelentkezését várjuk, de kellő felkészültséggel 10.-esek is részt vehetnek a foglalkozásokon. A jelentkezők írjanak pár sort magukról, ismertessék a fizika tanulmányaik során elért eredményeiket és továbbtanulási elképzeléseiket.

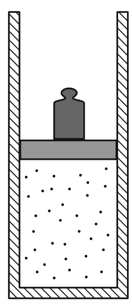
A foglalkozások ingyenesek! Minden jelentkezőt e-mail-ben értesítünk (aki nem kap választ, küldje el még egyszer a jelentkezését).

A Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny 1. elméleti fordulójának feladatai*

2021. március 22. 15:00–18:30

1. feladat. Egy m_0 össztömegű űrhajó a Föld felszínéhez közeli, kör alakú parkolópályán mozog az első kozmikus sebességgel megegyező v sebességgel. Egyszer csak bekapcsolja hajtóművét, amelyből állandó u nagyságú (relatív) sebességgel áramlik ki a hajtóanyag. A hajtóanyag tömeghozamát és a kilövellés irányát úgy változtatja, hogy mindvégig a kezdeti (parkolópályához tartozó) sebességével haladva egyenes vonalban, egyenletesen mozogjon. Mekkorára csökken az űrhajó tömege, amíg igen messzire kerül a Földtől?

2. feladat. Hőszigetelt, függőleges tengelyű, henger alakú tartályban termikus egyensúlyban lévő kétatomos ideális gázt egy nehéz, hőszigetelt dugattyú zár el úgy, hogy a gáz a tartály térfogatának felét foglalja el. A dugattyúra egy súlyt helyezünk úgy, hogy éppen csak érintkezzen vele, majd a súlyt elengedjük. Miután a rendszer eléri az új sztatikus egyensúlyi állapotát, a gáz nyomása 25%-kal megnövekszik. Ezután a súlyt hirtelen eltávolítjuk, melynek hatására egy idő után új sztatikus egyensúlyi helyzet alakul ki.



Hány ilyen ciklus után hagyja el a dugattyú a tartályt a súly eltávolítását követően? A súrlódás a dugattyú és a tartály fala között elhanyagolható, a rendszer vákuumban van.

*A második probléma orosz versenyfeladat, a többi feladatot Vigh Máté állította össze. A feladatok megoldását a KöMaL jövő havi számában közöljük.

3. feladat.[†] Egy R sugarú, vékony, $+Q$ töltéssel egyenletesen töltött szigetelő gyűrű vízszintes síkban helyezkedik el.

a) Határozzuk meg és ábrázoljuk a gyűrű függőleges szimmetriatengelyén az elektromos térerősséget a gyűrű középpontjától mért z távolság függvényében!

b) Mekkora és milyen irányú a térerősség a gyűrű síkjában, a középpontjától r távolságra, ahol $r \ll R$?

c) A rögzített gyűrű átmérője mentén (pl. egy kifeszített horgászzsinóron) egy $+q$ töltésű, m tömegű pontszerű test mozoghat súrlódásmentesen. A pontszerű testet egyensúlyi helyzetéből kicsit kitérítjük. Mekkora a bekövetkező kis rezgések periódusideje?

4. feladat. Két, ℓ hosszúságú, R_1 és R_2 sugarú, vékony falú szupravezető csőből ágyút készítünk úgy, hogy a csöveket koaxiálisan egymásba helyezzük ($R_2 < R_1$, $R_1 \ll \ell$). A rendszer a súlytalanság állapotában található. A külső cső rögzített, a belső, m tömegű cső pedig szabadon mozoghat a közös szimmetriatengely mentén. Kezdetben mindkét csőben I erősségű áram folyik a palást mentén körbe, a csövek középpontja pedig egybeesik. Ebből a helyzetből a belső csövet a tengely mentén kicsit kitérítjük. Mekkora sebességre gyorsul fel ez a belső cső („lövedék”), mialatt elég messzire távolodik a külső csőtől („ágyútól”)?

Az ütközés hatásfokának és ütközési számának összefüggése

Mint az a középiskolai tananyagból ismert, ha egy m_1 tömegű, v_1 sebességű és egy m_2 tömegű, v_2 sebességű (pontszerű) test tökéletesen rugalmatlanul ütközik, akkor (az impulzusmegmaradásból következően) együtt mozognak tovább

$$v_0 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{1}$$

sebességgel. (v_0 a két test tömegközéppontjának sebessége, ami az ütközés során nem változik meg.) Mondhatjuk, hogy a testek ütközés utáni u_1 és u_2 sebessége egyforma nagyságú:

$$u_1 = u_2 = v_0, \tag{2}$$

vagy úgy is fogalmazhatunk, hogy

$$u_1 - u_2 = 0. \tag{2*}$$

(Feltételezzük, hogy a testek ütközés előtti és ütközés utáni sebessége egy egyenesbe esik.)

[†]Ez a feladat utólag szerencsés választásnak bizonyult, mert az idei Nemzetközi Fizikai Diákolimpia 2. elméleti feladatának egyik része lényegében megegyezett vele.

Ha ugyanezen testek tökéletesen rugalmasan ütköznek, akkor az impulzus mellett a mozgási energia is megmarad, így ütközés után

$$u_1 = 2v_0 - v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

és

$$u_2 = 2v_0 - v_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \tag{4}$$

sebességgel mozognak tovább. (Itt v_0 ismét a tömegközéppont sebességét jelöli, amit (1) alapján számítunk ki.) Láthatjuk, hogy fennáll:

$$u_1 - u_2 = v_2 - v_1. \tag{5}$$

E kétféle speciális, „szélsőséges” eset között léteznek „átmeneti” ütközésfajták is, amelyekben a két test ütközés utáni sebességkülönbsége épp a fenti két eset (0 és az ütközés előtti sebességkülönbség) közé esik. Ezeket jellemezzük az ütközési számmal:

$$k = \frac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1}. \tag{6}$$

Látható, hogy a tökéletesen rugalmatlan ütközésre k értéke 0, a tökéletesen rugalmasra pedig $k = 1$. A köztes értékeket szokás százalékban is kifejezni, pl. a „30%-ban rugalmas” ütközés 0,3-es ütközési számot jelent.

Azonban vigyázzunk, mert a százalékban kifejezett ütközési szám azt a téves képet sugallhatja, hogy a kezdeti összes mozgási energia 30%-a maradt meg az ütközés során. Valóban, a tökéletesen („100%-ban”) rugalmas ütközés során ($k = 1$ érték mellett) a kezdeti összes mozgási energia 100%-a megmarad, azonban a tökéletesen rugalmatlan ütközés során ($k = 0$ érték mellett, vagyis „0%-ban rugalmas” ütközésnél) a megmaradó mozgási energia nem feltétlenül 0%. A köztes esetnek megfelelő ütközési számok és az energia megmaradó hányada között sem ilyen egyszerű az összefüggés.

Tekintsük először a tökéletesen rugalmatlan ütközés során fellépő energiaváltozást (-veszteséget):

$$\Delta E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2.$$

Felhasználva (1)-et, algebrai átalakítások után ez adódik:

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\,\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2. \tag{7}$$

Tanulságos képlet: mint afféle mozgási energia, „egykettedszer tömegszer sebességnégyzet” alakú. A „tömeg” az ütköző testek tömegei harmonikus közepének fele, a „sebesség” pedig a testek relatív, egymáshoz képesti sebessége (vagy a külső viszonyítási rendszerből nézve a testek sebességkülönbsége). Az ütközés után megmaradt energia aránya a kezdetihez képest

$$\frac{E_{\text{után}}}{E_{\text{előtt}}}=\frac{\frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2},$$

ami (1) behelyettesítése és algebrai átalakítások után így is felírható:

$$\frac{E_{\text{után}}}{E_{\text{előtt}}}=\frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)\big(m_1v_1^2+m_2v_2^2\big)}. \tag{8}$$

Jól látható, ha a két test szemből ütközik azonos impulzussal ($m_1v_1=-m_2v_2$), akkor ez az arány 0, de más esetben *nem az,* jóllehet az ütközés tökéletesen rugalmatlan.

Értelmezzük általánosan az ütközés hatásfokát mint az ütközés utáni (megmaradt, „hasznos”) és az ütközés előtti (meglévő összes, „befektetett”) mozgási energia hányadosát:

$$\eta=\frac{\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2}. \tag{9}$$

Minden ütközésre érvényes az impulzusmegmaradás törvénye:

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2. \tag{10}$$

Ez (6)-tal egyenletrendszert alkot, amelyet (pl. behelyettesítős módszerrel) végigszámolva tanulságos eredmények adódnak az ütközés utáni sebességekre:

$$u_1=\frac{m_1v_1+m_2v_2+km_2(v_2-v_1)}{m_1+m_2} \tag{11}$$

és

$$u_2=\frac{m_1v_1+m_2v_2+km_1(v_1-v_2)}{m_1+m_2}. \tag{12}$$

($k=0$-ra visszakapjuk (2)-t, $k=1$-re pedig a (3) és (4) összefüggéseket.)

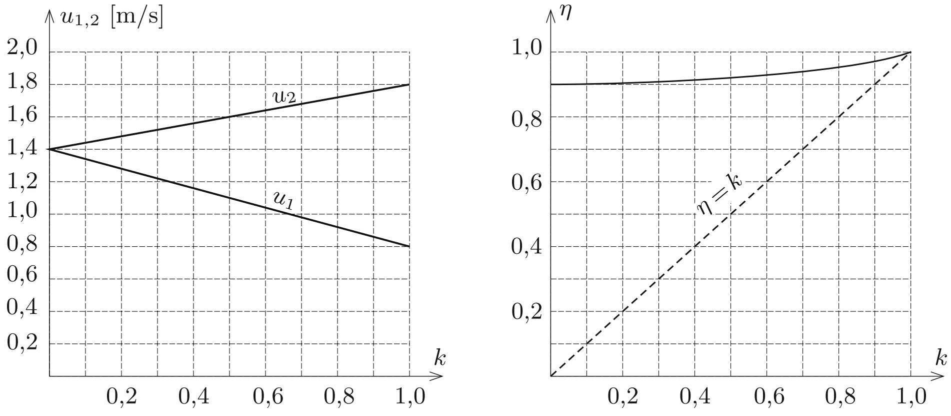
A (11) és (12) kifejezéseket beírva (9)-be, egy komoly odafigyelést és tagok ügyes csoportosítását igénylő számolás után kapjuk:

$$\eta=\frac{k^2m_1m_2(v_1-v_2)^2+(m_1v_1+m_2v_2)^2}{(m_1+m_2)\big(m_1v_1^2+m_2v_2^2\big)}. \tag{13}$$

Látható, hogy $k=0$ esetén visszakapjuk a (8) összefüggést, és $k=1$ esetén pedig $\eta=1$.

Érdekességképpen kiszámítottuk és grafikusan is ábrázoltuk az $m_1=2$ kg, $v_1=2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $m_2=3$ kg, $v_2=1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ esetben az u_1, u_2 és η függését k-tól (*1. ábra*). Az egyes függvények (a sebességek mértékegységét elhagyva):

$$u_1=\frac{7-3k}{5},\qquad u_2=\frac{7+2k}{5}\qquad \text{és}\qquad \eta=\frac{6k^2+49}{55}.$$



1. ábra

Vizsgáljuk meg, hogyan lehet kísérletileg egyszerűen meghatározni egy ütközés hatásfokát és ütközési számát egy speciális esetben. Ha h_1 magasságból leejtünk egy kicsiny labdát, az (ha a közegellenállás hatása elhanyagolható) $v_1 = \sqrt{2gh_1}$ sebességgel ér talajt (ütközik a Földdel), és onnan visszapattanva az indulási (ütközés utáni) u_1 sebessége és a legnagyobb emelkedésének h_2 magassága között szintén fennáll: $u_1 = \sqrt{2gh_2}$. Mivel az ütközésben a Föld m_2 tömege „végtelen nagynak" tekinthető, és a sebessége $v_2 = u_2 = 0$, ezért (11)-ből (m_2-vel való egyszerűsítés után) $u_1 = -kv_1$ következik. (A negatív előjel az ellentétes irányú mozgásra utal, ezt a továbbiakban elhagyjuk.) Így

$$k = \frac{u_1}{v_1} = \sqrt{\frac{2gh_2}{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \tag{14}$$

vagyis a visszapattanási és az elejtési magasság hányadosának négyzetgyöke az ütközési szám. A hatásfokot (9)-ből kaphatjuk meg (a Föld mozgási energiája az ütközés előtt és után is nulla):

$$\eta = \frac{u_1^2}{v_1^2} = \frac{h_2}{h_1} \ (= k^2), \tag{15}$$

vagyis a hatásfok a visszapattanási és az elejtési magasság hányadosa. (Ebben a speciális esetben, a Földről visszapattanásnál a hatásfok éppen az ütközési szám négyzete, de ez általában nem igaz.)

Kérdés, milyen m_1, v_1, m_2 és v_2 paraméterek esetén teljesülhet, hogy $\eta = k$. (Természetesen a triviális eseteket, amikor mindkettő 0 vagy 1, nem vesszük számításba.)

Keressük tehát az $\eta = k$ egyenlet gyökeit. A (13) képletben vezessük be a következő jelöléseket (mindegyikük nemnegatív):

$$a \equiv m_1m_2(v_1 - v_2)^2; \quad b \equiv (m_1 + m_2)\big(m_1v_1^2 + m_2v_2^2\big); \quad c \equiv (m_1v_1 + m_2v_2)^2,$$

és jegyezzük meg, hogy $a + c = b$ (hiszen épp emiatt lesz $k = 1$-re $\eta = 1$). Így az egyenlet a következő alakot ölti:

$$\frac{ak^2 + c}{b} = k,$$

átrendezve:

$$ak^2 - bk + c = 0, \quad \text{vagyis} \quad ak^2 - (a + c)k + c = 0.$$

Ennek gyökei a megoldóképlet szerint:

$$k_{1,2} = \frac{a + c \pm \sqrt{(a + c)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a + c \pm (a - c)}{2a}.$$

Az egyik gyök: $k_1 = 1$, ezt a triviális megoldást már eddig is ismertük. A másik gyök: $k_2 = \frac{c}{a}$. Ez utóbbi csak akkor lehet hatásfok, ha kisebb 1-nél (és csak akkor 0, ha $c = 0$, ezt a (8) utáni megjegyzésben már tisztáztuk).

A $\frac{c}{a} < 1$, vagyis $c < a$ feltétel akkor teljesül, ha

$$(m_1v_1 + m_2v_2)^2 < m_1m_2(v_1 - v_2)^2.$$

Zárójelfelbontás, rendezés, szorzattá alakítás után kapjuk: $\eta = k$ teljesülésének (szükséges és elégséges) feltétele (a triviális $k = 0$ és $k = 1$ eseteken kívül) az, hogy:

$$4m_1m_2v_1v_2 < \left(m_1v_1^2 - m_2v_2^2\right)(m_2 - m_1), \tag{16}$$

és ekkor

$$\eta = k = \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{m_1m_2(v_1 - v_2)^2}. \tag{17}$$

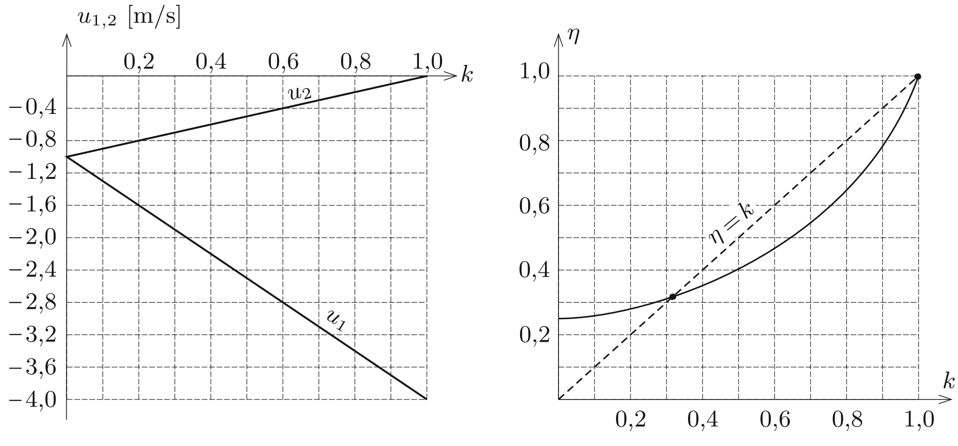
Egy konkrét példával: $m_1 = 1$ kg, $v_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $m_2 = 3$ kg, $v_2 = -2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ adatok mellett (a sebességek mértékegységét most is elhagyva) az egyes függvények:

$$u_1 = -3k - 1, \qquad u_2 = k - 1 \qquad \text{és} \qquad \eta = \frac{3k^2 + 1}{4}.$$

A függvények grafikonját a *2. ábra* mutatja.

Mindkét ábrán berajzoltuk az $\eta = k$ egyenest is. A 2. ábrának megfelelő paraméterek mellett (16) teljesül, az 1. ábrához tartozó adatoknál pedig nem, így az első esetben nincs, a másodikban pedig van triviálistól különböző megoldása az $\eta = k$ egyenletnek.

Megjegyzés. A (16) feltételt úgy is megkaphatjuk, hogy megvizsgáljuk a (13)-ban kapott $\eta(k)$ függvény meredekségét az $\eta = 1$ helyen. Ha ez nagyobb, mint 1, akkor a parabolaív a végig 1 meredekségű $\eta = k$ egyenest a $[0; 1[$ intervallumban metszi másodszor, tehát van másik, nem triviális $\eta = k$ eset. Ha ez a meredekség kisebb 1-nél, akkor a görbék másik metszéspontja valahol az $]1; \infty[$ intervallumban van, de ennek nincs fizikai tartalma. Lehet a keresett meredekség éppen 1, ekkor az egyenes itt érinti a parabolát, ekkor sem adódik másik $\eta = k$ eset.



2. ábra

A vizsgálandó meredekség a (13) függvény $k=1$ helyen vett deriváltértéke:

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}k}(1)=\frac{2m_1m_2(v_1-v_2)^2}{(m_1+m_2)\big(m_1v_1^2+m_2v_2^2\big)}.$$

A fizikailag értelmezhető második megoldás létezésének feltétele:

$$\frac{2m_1m_2(v_1-v_2)^2}{(m_1+m_2)\big(m_1v_1^2+m_2v_2^2\big)}>1,$$

és ez egyenértékű (16)-tal.

Siposs András
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium (Budapest)

Fizika feladatok megoldása

P. 5303. *Egy puska* 500 m/s *sebességű lövedéke fába csapódik, és ott* 5 cm-*es úton lefékeződik. A lövedék tömör,* 4 cm *hosszú,* 7800 kg/m^3 *sűrűségű fémhengernek tekinthető, amelynek fékeződése időben egyenletes.*

a) Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora mechanikai feszültség alakul ki a lövedék lefékeződése során!

b) Becsüljük meg, hogy mekkora elektromos feszültség jön létre a lövedék eleje és vége között az elektronok tehetetlensége miatt!

(*5 pont*) *Holics László* feladata nyomán

Megoldás. *a*) A lövedék haladási irányára merőleges keresztmetszetének nagysága legyen A. A mechanikai feszültség a lövedékre kifejtett erő és a rá merőleges keresztmetszet hányadosaként kapható meg.

Az időben egyenletes fékeződés során a lassulást okozó erő állandó. (Feltételezzük, hogy a lövedékre csak a homlokfelületénél hat fékezőerő.) Az erő nagyságát az $F=ma$ mozgásegyenlet adja meg, ahol az ℓ hosszúságú henger tömege

$$m=\ell A\varrho,$$

a lassulást pedig a v kezdősebesség és a megállásig megtett s út határozza meg:

$$s=\frac{a}{2}t^2,\qquad t=\frac{v}{a},\qquad \text{ahonnan}\qquad a=\frac{v^2}{2s}=2{,}5\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

A *mechanikai feszültség* ezek szerint

$$\frac{F}{A}=\frac{\varrho\ell v^2}{2s}=780\ \mathrm{MPa}.$$

b) A fémben szabadon mozgó elektronok ugyanakkora lassulással mozognak, mint a lövedék egésze. Az elektronokat nem a fa lassítja (hiszen azzal nem is érintkeznek), hanem a fémhengerben kialakuló elektromos erőtér okozza a sebességük megváltozását. Az ütközés kezdetekor a lövedék elejénél bizonyos mennyiségű (negatív) elektron halmozódik fel, a lövedék hátulja pedig pozitív töltésűvé válik. Ezek a töltések olyan erősségű homogén elektromos mezőt hoznak létre, melyre $eE=m_0a$ teljesül, ahol e az elemi töltés, m_0 pedig az elektron tömege. A térerősség tehát

$$E=\frac{m_0a}{e},$$

ami az ℓ hosszú lövedék eleje és vége között

$$U=\ell Ed=\frac{m_0a\ell}{e}=\frac{(9{,}1\cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg})\cdot\left(2{,}5\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)\cdot 0{,}04\ \mathrm{m}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}}=5{,}7\cdot 10^{-7}\ \mathrm{V}$$

nagyságú *elektromos feszültséget* jelent.

Bognár András Károly (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A lövedék mentén a feszültség értéke változik, mert a fékezett tömeg változik. Legnagyobb az elejéhez közel, ott az egész lövedéket fékező erővel kell számolni, de a vége felé haladva ez folyamatosan nullára csökken.

2. A megoldás során feltételeztük, hogy a lövedék minden része ugyanolyan ütemben fékeződik le, vagyis a lövedék merev testnek tekinthető. A valóságban ez nem áll fenn: pl. a folyamat kezdetekor csak a lövedék elejének sebessége csökken, a hátsó része egy ideig még változatlan sebességgel mozog tovább. A két tartományt egy (a fémbeli hangsebességgel terjedő) lökéshullám választja el egymástól.

3. A kiszámított mechanikai feszültség nagysága csak durva becslésnek tekinthető. A becsült érték az acél folyáshatárával azonos nagyságrendű, tehát a tényleges folyamatnál a lövedék maradandó alakváltozást szenvedhet.

43 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 13, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5319. *Vízszintes síkon elcsúsztatunk egy m tömegű, ℓ hosszúságú, vékony, homogén pálcát. Egy pillanatban a pálca egyik végének sebességvektora $\boldsymbol{v}_1$, a másiké $\boldsymbol{v}_2$. Mekkora ebben a pillanatban*

a) a pálca lendülete;

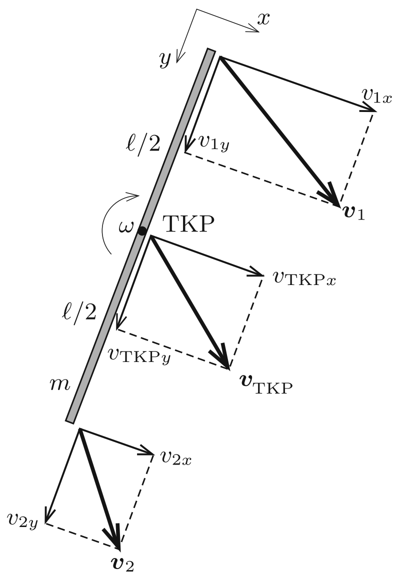
b) a tömegközéppontra vonatkozó perdülete;

c) a teljes mozgási energiája?

(*5 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. A pálca mozgása két részből „tehető össze": egyrészt a pálca minden pontja halad a tömegközéppont (TKP) $\boldsymbol{v}_{\text{TKP}}$ sebességével, miközben a pálca egésze forog a TKP körül valamekkora ω szögsebességgel.

Válasszunk egy olyan koordináta-rendszert, amelynek y tengelye (a kérdéses pillanatban) éppen párhuzamos a pálcával, az x tengely pedig merőleges a pálcára. A pálca egyik vége $\boldsymbol{v}_1$, a másik $\boldsymbol{v}_2$ sebességgel mozog (lásd az *ábrát*).



A pálca minden pontjának y irányú sebessége ugyanakkora, hiszen a pálcát merev (nyújthatatlan) testnek tekintjük. Így tehát

$$v_{1y} = v_{2y} = v_{\text{TKP}y}.$$

Írjuk fel a pálca végpontjainak x irányú sebességét! A haladási (más néven *transzlációs*) mozgásból adódóan mindkét végpont $v_{\text{TKP}x}$ sebességgel mozog x irányban, és emellett forognak is a tömegközéppont körül, attól $\ell/2$ távolságban ω szögsebességgel. A forgás az egyik végpont x irányú sebességét növeli, a másikét csökkenti a TKP sebességéhez képest:

$$v_{1x} = v_{\text{TKP}x} + \omega\frac{\ell}{2}, \qquad \text{illetve} \qquad v_{2x} = v_{\text{TKP}x} - \omega\frac{\ell}{2}.$$

a) Vizsgáljuk meg először, mekkorák a $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ vektor komponensei. Mivel

$$v_{1x} + v_{2x} = 2v_{\text{TKP}x}, \qquad \text{valamint} \qquad v_{1y} + v_{2y} = 2v_{\text{TKP}y},$$

ezért fennáll, hogy

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_{\text{TKP}},$$

tehát a pálca kérdezett lendülete (impulzusvektora):

$$\boldsymbol{I} = m\boldsymbol{v}_{\mathrm{TKP}} = \frac{m}{2}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2).$$

b) Ezután vizsgáljuk meg a $\boldsymbol{v}_1$ és $\boldsymbol{v}_2$ vektorok különbségét, annak komponenseit a választott koordináta-rendszerben:

$$v_{1x} - v_{2x} = \left(v_{\mathrm{TKP}x} + \omega\frac{\ell}{2}\right) - \left(v_{\mathrm{TKP}x} - \omega\frac{\ell}{2}\right) = \ell\omega,$$

valamint

$$v_{1y} - v_{2y} = 0.$$

Mivel a sebességkülönbség-vektornak nincs y irányú komponense, a nagysága:

$$|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2| = |v_{1x} - v_{2x}| = \ell|\omega|.$$

A pálca szögsebességének nagysága tehát

$$|\omega| = \frac{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}{\ell},$$

és így a perdületének nagysága:

$$N = \Theta|\omega| = \frac{1}{12}m\ell^2\frac{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|}{\ell} = \frac{1}{12}m\ell|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|.$$

(Felhasználtuk, hogy egy m tömegű, ℓ hosszúságú, vékony pálcának a tömegközéppontjára vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\frac{1}{12}m\ell^2$.)

c) A pálca mozgási energiája a haladási mozgáshoz és a forgómozgáshoz kapcsolódó energiák összege:

$$E = \frac{1}{2}m\,v_{\mathrm{TKP}}^2 + \frac{1}{2}\Theta|\omega|^2,$$

azaz

$$E = \frac{1}{2}m\frac{|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2|^2}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}m\ell^2\frac{|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|^2}{\ell^2} = \frac{m}{24}\big(3|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2|^2 + |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|^2\big).$$

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

27 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 2 dolgozat.

Eötvös-verseny

Az idei Eötvös-versenyt

2021. október 15-én

pénteken délután 15^{h}-tól 20^{h}-ig rendezi meg az Eötvös Loránd Fizikai Társulat.

A versenyen azok a diákok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Nemcsak magyar állampolgárságú versenyzők indulhatnak, hanem Magyarországon tanuló külföldi diákok, valamint külföldön tanuló, de magyarul értő diákok is.

A megoldásokat magyar nyelven kell elkészíteni, a rendelkezésre álló idő 300 perc. Minden írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de hagyományos (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos.

Előzetesen jelentkezni nem kell, elegendő egy személyazonosság igazolására szolgáló okmánnyal (személyi igazolvány, diákigazolvány vagy útlevél) megjelenni a verseny valamelyik helyszínén.

A helyszínek és a versennyel kapcsolatos minden további információ megtalálható a verseny honlapján:

`http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Versenybizottság

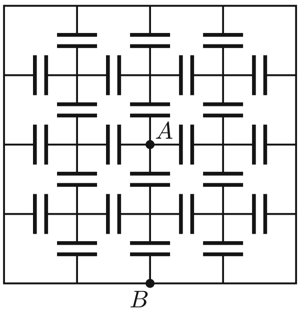
Dr. Radnai Gyula

(1939–2021)

Radnai tanár úr hatalmas életművet hagyott maga után. Tankönyvírói tevékenysége (a „Dér–Radnai–Soós" és egyéb feladatgyűjtemények, a Négyjegyű függvénytáblázat stb.) és a tanárképzésben betöltött szerepe mellett talán a fizikatörténet egyik legnagyobb magyar tudósaként emlékeznek rá sokan. Számunkra Radnai tanár úr tehetséggondozásban végzett tevékenysége a legemlékezetesebb. Évtizedeken át volt az Eötvös-verseny bizottságának elnöke, emellett kiváló feladatkitűző, valamint a KöMaL fizika szerkesztőbizottságának a vezetője. Mind közül talán a KöMaL volt a legnagyobb szívügye, amit a fizika szerkesztőbizottság elnökeként több, mint 30 éven keresztül rendíthetetlenül szolgált. A sors úgy adta, hogy sokáig dolgozhattunk együtt. Radnai tanár úrtól néhány korábbi, még harminc évnél is régebbi, szép feladatának felidézésével búcsúzunk. Lehetséges, hogy ezekkel a problémákkal a mostani versenyzők kömalozó szülei is találkoztak ...

A fizika szerkesztőbizottság tagjai

Válogatás Radnai Gyula egy emberöltővel ezelőtt kitűzött feladataiból*



1426. (1977. március) Az *ábrán* vázolt kondenzátorrendszerben mindegyik kondenzátor kapacitása 1 μF. Az A pontra 10^{-6} C töltést viszünk és a B pontot földeljük. Mennyi lesz a kondenzátorrendszer energiája?

1656. (1980. szeptember) Egy emelődaru játékmodellje legfeljebb 20 kis betongerendát képes felemelni anélkül, hogy kötele elszakadna. A valódi daru és a valódi betongerendák valamennyi lineáris mérete 25-ször nagyobb a modelléinél, de az anyagok fizikai állandói ugyanazok. Hány igazi gerendát képes felemelni egy ilyen modell alapján megépített daru?

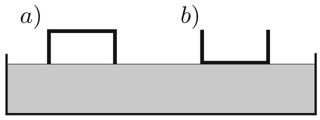
2291. (1988. február) Pingponglabda pattog lefelé egy lépcsőn úgy, hogy minden lépcsőfokra egyszer pattan rá. A lépcsőfokok magassága 12 cm. A visszapattanások során a labda sebességének vízszintes összetevője nem változik, a függőleges összetevő nagysága azonban kétharmadára csökken. A levegő ellenállásának fékező hatásától, valamint a labda forgásától eltekinthetünk.

Mennyi idő telik el két ütközés között?

2313. (1988. május) A felkelő Nap fényét a Duna budai oldalán a domboldalra épült ház négyzet alakú, síküveg ablaktáblái visszatükrözik. Az egyik ablaküvegről a szomszédos ház falára, a másik ablakról egy, a pesti parton álló épület falára verődik vissza a fény. Milyen alakúak lesznek a falakon a fényfoltok? (Az ablaktáblák élhossza 0,5 m, a szomszéd ház távolsága 10 m, a Duna szélessége 300 m.)

2424. (1989. október) N molekulából álló, egyensúlyi állapotban levő ideális gáz van egy V térfogatú tartályban. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tartálynak egy V^* térfogatú része üres? Mekkora ez a valószínűség, ha $V^* = \frac{V}{N}$, és $N \gg 1$?

*A feladatok megoldását a KöMaL archívumában (`http://db.komal.hu/KomalHU/`) találhatjuk meg.

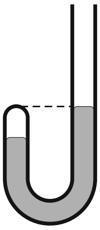


2456. (1990. február) Egy üres, nyitott konzervdobozt

a) szájával lefelé,

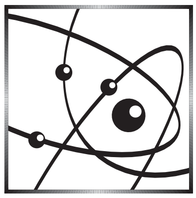
b) szájával felfelé

helyezünk a víz felszínére. Melyik esetben merül mélyebbre, és miért? Mi történik, ha a vízre helyezés után a hőmérséklet lassan emelkedik?



2553. (1991. március) Egyenletes keresztmetszetű, függőleges helyzetű, U alakú cső egyik vége zárt, a másik, hosszabb szára nyitott. A csőben higany van az *ábrán* látható helyzetben.

Mekkora a bezárt levegőoszlop hossza, ha melegítés közben azt tapasztaljuk, hogy a bezárt levegő nyomása egyenesen arányos a térfogatával. A külső légnyomás 76 cm magas higanyoszlop nyomásával egyenlő.



Fizikából kitűzött feladatok

M. 406. Készítsünk otthon egy enyhe emelkedésű, változtatható meredekségű lejtőt. Állítsuk be a lejtőt valamilyen α hajlásszögbe. Helyezzünk rá egy hengeres ceruzát, amelynek a lejtővel érintkező alkotója bizonyos β szöget zár be a lejtőn húzható vízszintessel. Vizsgáljuk meg, hogy rögzített α esetén mely β szögeknél indul el a lejtőn a ceruza

a) csak csúszva,

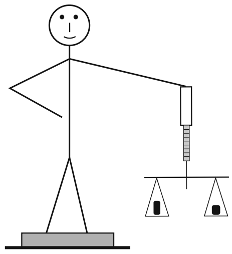
b) tisztán gördülve!

Derítsük fel és ábrázoljuk ezeket a csúszási és gördülési tartományokat egy (α, β) koordináta-rendszerben!

(*6 pont*) *Radnai Gyula* (1939–2021) feladata

G. 749. A United Airlines 425-ös járata éppen akkor haladt el a Nap előtt, amikor *Andrew McCarthy,* az ismert amerikai asztrofotós a mellékelt képet készítette. Becsüljük meg, hogy milyen messze volt a repülőgép a fotós fényképezőgépétől!

(*4 pont*)



G. 750. A 35 kg tömegű Jancsi rááll egy testsúlymérlegre, a kezébe fog egy 0,5 N súlyú rugós erőmérőt, majd arra ráakaszt egy üresen 15 N súlyú kétkarú mérleget. A mérlegen egy kő van kiegyensúlyozva együttesen 2 kg 40 dkg tömegű mérősúlyokkal.

Mit mutat a testsúlymérleg és a rugós erőmérő?

(*3 pont*)

G. 751. A síktükör által képződő kép ugyanakkora, mint a tárgy. Ha közelebb megyünk a tükörhöz, akkor mégis nagyobbnak látjuk magunkat, mert megnő a látószögünk. A hátunkat úgy tudjuk síktükörrel megnézni, ha két síktükröt használunk, melyek közelítőleg egymással szemben, párhuzamosan helyezkednek el.

A két tükör közé hova kell állnunk, hogy maximális látószögben lássuk a hátunkat?

(*4 pont*)

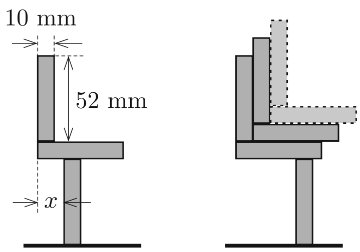
G. 752. Február közepén sikeresen landolt a Marson az egy tonnás Perseverance nevű marsjáró, ami egy minihelikoptert is vitt magával. Mennyi a marsjáró súlya a Marson? Vajon hogyan próbálhatták ki a minihelikoptert a Földön? Tegyünk javaslatot!

(*4 pont*)

P. 5337. Párhuzamos pályákon állandó sebességgel közlekedik két tehervonat. Ellentétes irányban haladva 20 s alatt, azonos irányban haladva pedig 60 s alatt haladnak el egymás mellett. Egy 600 m hosszú hídon az egyik szerelvény 40 s alatt, a másik 100 s alatt halad át.

Határozzuk meg a szerelvények hosszát és sebességét!

(*4 pont*) Közli: *Székely György,* Budapest

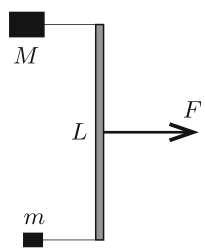


P. 5338. A *bal oldali ábrán* látható módon egy dominópárt helyezünk el egy harmadikon.

a) Határozzuk meg x lehetséges értékeit, hogy a dominók egyensúlyban legyenek.

b) Ezt követően további dominópárokat helyezünk el *a jobb oldali ábrának* megfelelően. Legfeljebb hány dominót helyezhetünk el a legalsóra, hogy az egyensúlyi állapot fennmaradjon?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs



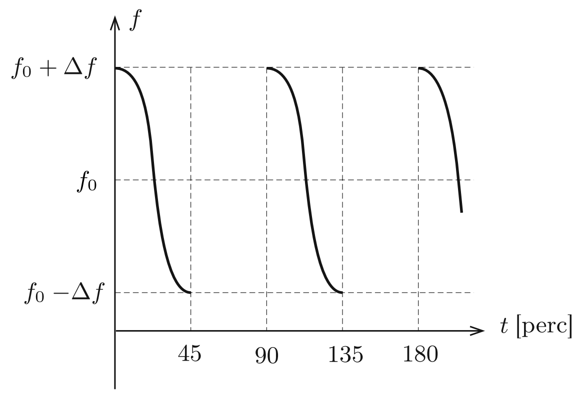
P. 5339. Vízszintes, súrlódásmentes felületen egy $L=0{,}6$ m hosszúságú, elhanyolható tömegű, vékony rúd fekszik. A rúd végpontjaihoz elhanyagolható tömegű, feszes fonalakkal $m=0{,}2$ kg és $M=0{,}8$ kg tömegű testeket rögzítettünk. A fonalak merőlegesek a rúdra. Egy adott pillanatban a rúd középpontjára a vízszintes felülettel párhuzamos, a rúdra merőleges, $F=8$ N nagyságú erőt fejtünk ki.

a) Határozzuk meg a kezdőpillanatban a rúd középpontjának gyorsulását!

b) A rúd melyik pontjára kellene kifejteni ezt az F erőt, hogy a testek gyorsulása azonos legyen? Mekkora erők ébrednek ekkor a fonalakban?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5340. A földönkívüli civilizációk után kutatók egyik nagy rádiótávcsöve egy távoli égitest irányából az *ábrán* látható furcsa, változó frekvenciájú jeleket észlelte. A jelek 45 percen keresztül folyamatosan érkeztek, utána 45 perc szünet következett, majd ismét 45 percnyi jel stb. Az észlelt jel frekvenciájának középértéke $f_0=1{,}5$ GHz, és a változó frekvencia f_0 körül $\Delta f=40$ kHz értékkel ingadozott.



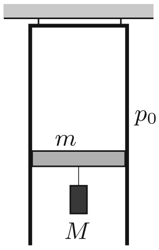
Az észlelt rádióhullámokat egy exobolygó körül keringő exoműhold állandó frekvenciájú jeleként értelmezték a kutatók. Feltételezték, hogy a Föld és az exobolygó közötti egyenes szakasz az exoműhold pályájának síkjában fekszik, és így meg tudták határozni a bolygó tömegét, sugarát és az átlagsűrűségét. Milyen értékeket kaptak?

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

P. 5341. Tehervonat szállít egy ℓ hosszú, d széles és h magas téglatest alakú konténert, amely félig van töltve ϱ sűrűségű folyadékkal. Mekkora erővel nyomná a folyadék a konténer alaplapját és oldallapjait, ha a vonat képes lenne vízszintes pályán hosszú ideig állandó a_0 gyorsulással haladni? (A konténer leghosszabb éle párhuzamos a sínekkel, és a folyadék még akkor sem folyna ki a tartályból, ha az felül nyitott lenne.)

Adatok: $\ell = 10$ m, $h = d = 3$ m, $\varrho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$, $a_0 = 1\ \mathrm{m/s^2}$.

(*5 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest



P. 5342. Függőleges helyzetben rögzített, felül zárt henger m tömegű dugattyúján egy M tömegű test függ. A hengerben lévő, kezdetben V térfogatú levegővel Q hőt közlünk. Kívül a légköri nyomás p_0.

a) Mennyivel változik meg a gáz belső energiája?

b) Mennyi munkát végez a gáz? Ez a munka milyen energiaváltozásokkal jár együtt?

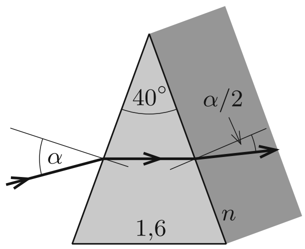
(A henger fala és a dugattyú hőszigetelő.)

(*4 pont*) *Tichy Géza* (1945–2021) feladata

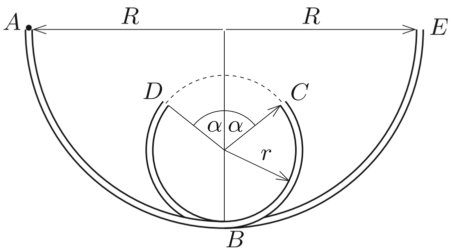
P. 5343. Van egy 100 ohmos, 2%-os (2% relatív pontosságú), egy 200 ohmos, 5%-os és egy 300 ohmos, 10%-os ellenállásunk. Ezeket először sorosan, majd párhuzamosan kapcsoljuk. Mekkorák és hány százalékosak lesznek az eredő ellenállások ebben a két esetben?

(*3 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5344. Egyenlő szárú háromszög keresztmetszetű prizma törőszöge 40°, anyagának törésmutatója 1,6. Mekkora α beesési szöggel érkezik a fénysugár az egyik oldallaphoz, ha ez a fénysugár a prizmában az alappal párhuzamosan halad tovább? Mekkora n törésmutatója van annak az üvegnek, amiből készült hasábot a prizma másik oldalához illesztve a törési szög az *ábra* szerint $\alpha/2$?



(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros



P. 5345. Vékony csőből két R sugarú negyedkört készítünk, majd egy-egy r sugarú, α szöggel „hiányos” félkörívet csatlakoztatunk hozzájuk, végül az egész elrendezést az *ábrán* látható módon egy függőleges síklaphoz erősítjük. Az A pontból kezdősebesség nélkül beejtünk egy kis golyót a csőbe. A golyó az AB és a BC köríven végigcsúszik, a C és a D pont között szabadon esik (ferde hajítás szerint mozog), majd a DB és BE köríven csúszik tovább.(A súrlódást és a légellenállást figyelmen kívül hagyhatjuk.)

a) Mekkora az α szög, ha $\frac{R}{r}=\frac{5}{2}$?

b) Vizsgáljuk meg, hogy különböző $\frac{R}{r}$ arányoknál mekkora α szög (vagy szögek) esetében valósulhat meg a leírt mozgás!

(*6 pont*) *Romániai versenyfeladat nyomán*

❄

Beküldési határidő: 2021. október 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 6. September 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 351): **K. 694.** How many seven-digit positive integers are there in which each digit is either 1 or 2 greater than the preceding digit? (Example: as in 1 234 678.) **K. 695.** A point P is selected on side BC of a square sheet of paper $ABCD$. The sheet is folded along the line AP so that point B should lie equidistant from vertices C and D. The new position of point B is denoted by B'. Determine the measure of angle $CB'D$. **K. 696.** In the left front pocket of my jeans I have twice as much money as in the right front pocket, and one third as much as in the right back pocket. I moved 30 forints (HUF, Hungarian currency) from the right front pocket to the left front pocket, and also moved 180 forints from the right back pocket to the left front pocket. Now I have 3 times as much money in the left front pocket as the amount remaining in the right front pocket. How much money did I have initially in each pocket? **K. 697.** Some of the faces of a cube are coloured red, and then the cube is cut into small cubes of equal size. 45 of the small cubes have no painted faces. How many faces of the original cube were coloured? **K. 698.** Dorothy thought of an integer that is at least 3 and at most 25. Ann named a one-digit even number x, and asked Dorothy whether her number is a perfect square, whether it is prime, and whether it is a multiple of x. Dorothy said if she gave the answer to each of these questions, Ann would be able to figure out what number she had in mind. What is Dorothy's number?

New exercises for practice – competition C (see page 351): **Exercises up to grade 10: K/C. 697.** See the text at Exercises **K. K/C. 698.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1679.** Prove that the value of the expression $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}$ is between 0 and 1. **C. 1680.** One side of a quadrilateral is 5 cm long, and the measures of the angles lying on it are 90° and 60°. Given that the quadrilateral has both an inscribed circle and a circumscribed circle, find a method to construct the quadrilateral. Write down the steps of the construction. (Elementary steps of construction, like bisecting an angle or reflecting about a line do not need to be described in detail.) (Proposed by *N. Zagyva,* Baja) **C. 1681.** Let a, b, c denote nonzero real numbers that add up to 0. Prove that $\frac{a^3-a^2+b^3-b^2+c^3+c^2}{ab}=3c+2$. **Exercises upwards of grade 11: C. 1682.** The vertices of a unit cube are A, B, C, D, E, F, G, H as shown in the *figure.* The tetrahedra $ABDE$ and $GCFH$ are cut off the cube. Find the volume and surface area of the remaining solid. (Proposed by *N. Zagyva,* Baja) **C. 1683.**

Ann and Bo are playing the following game on squared sheets of paper. Each player marks a 10×10 square on her own sheet of squared paper. In this large square, they colour seven 1×1 lattice squares blue, and another 14 lattice squares red. The players cannot see each other's coloured squares. The game starts by Ann naming a pair of numbers (i,j) where $1\leqslant i,j\leqslant 10$ are positive integers. (For example, $(5,2)$ means the lattice square at the intersection of row 5 and column 2 of the 10×10 square.) If the pair (i,j) determines a coloured field on Bo's sheet of paper then Bo will answer "hit", otherwise she will say "no hit". Then the game continues by switching roles: Bo names a pair of numbers and Ann answers. What is the probability that in the third round of the game Ann will hit a blue square and Bo will hit a red square provided that in the first two rounds neither Ann nor Bo had any hits?

New exercises – competition B (see page 353): **B. 5182.** The number $612^2=374\,544$ ends in two digits of 4 in base 10 notation. What is the maximum number of digits of 4 at the end of a perfect square? (*3 points*) (Based on the idea of *I. Blahota*) **B. 5183.** Side AB of a triangle ABC has unit length, $\angle BAC=60^\circ$, $\angle ACB=100^\circ$ and the midpoint of side BC is F. D is a point on side AB such that $DB=FB$. Find the exact value of $T_{ABC\triangle}+2T_{FBD\triangle}$, where $T_{ABC\triangle}$ denotes the area of triangle ABC. (T means the area of the triangle of the triangle named in the index.) (*4 points*) (Proposed by *S. Kiss,* Nyíregyháza) **B. 5184.** Cornelia marked four non-concyclic points in the plane. Then she drew all the circles that pass equidistant from the four points. What is the maximum possible number of circles she may have drawn? (The distance between point P and a circle k centred at O is defined as follows: let M denote the point where the ray starting at O and passing through P intersects the circle k. Then the distance is the length of line segment PM.) (*5 points*) **B. 5185.** Find the real solutions of the equation $\sqrt[3]{4-x^2}+\sqrt{x^2-3}=1$. (*4 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5186.** Al and Bill are playing the following game. They agree on a fixed number $n\geqslant 3$, and then Al thinks of a number from the set $\{1,2,\ldots,n\}$. Now Bill can guess the number. He will only get yes or no answers. If the answer is yes, the game terminates. If the answer is no, Al will change the number: either increases or reduces it by 1, but the number must remain positive (it is allowed to go beyond n though). Then Bill can guess again, trying to hit the new number. The procedure is repeated until finally Bill gets the number. Prove that Bill has a strategy to end the game with at most $(3n-5)$ guesses. (*6 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5187.** A subset of the set $S=\{1,2,\ldots,n\}$ is called *primitive,* if it does not contain two elements such that one is a divisor of the other. Show that if it is not possible to add a further element of S to a particular primitive set $A\subseteq S$ and keep it primitive, then either $A=\{1\}$ or the size of A is greater than or equal to the number of primes up to n. (*6 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5188.** Prove that the height of a circumscribed trapezium cannot be greater than the geometric mean of the bases. (*5 points*) (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **B. 5189.** The base edge of a right pyramid with a regular triangular base is a. Let r be the radius of the inscribed sphere, and let R be the radius of the escribed sphere touching the base. Prove that $a^2=12rR$. (*6 points*) (Proposed by *L. László,* Budapest)

New problems – competition A (see page 355): **A. 803.** Let $\pi(n)$ denote the number of primes less than or equal to n. A subset of $S=\{1,2,\ldots,n\}$ is called *primitive* if there are no two elements in it with one of them dividing the other. Prove that for $n\geqslant 5$ and $1\leqslant k<\frac{\pi(n)}{2}$ the number of primitive subsets of S with $k+1$ elements is greater or equal to the number of primitive subsets of S with k elements. (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **A. 804.** There is a city with n citizens. The city wants to buy *sceptervirus* tests with which it is possible to analyze the samples of several people at the same time.

The result of a test can be the following: • Virus positive: there is at least one currently infected person among the people whose samples were analyzed, and none of them were healed from an earlier infection. • Antibody positive: there is at least one person who was healed from an earlier infection among the people whose samples were analyzed, and non of them are infected now. • Neutral: either all of the people whose samples were analyzed are not infected, or there is at least one currently infected person and one person who was healed from an earlier infection. (Viruses and antibodies in samples completely neutralize each other.) What is the smallest number of tests to buy if we would like to know if the sceptervirus is present now or it has been present earlier? (The samples are taken from the people at the same time. The people are either infected now, have been infected earlier, or haven't contacted the virus yet.) (Submitted by *Csongor Beke,* Cambridge) **A. 805.** In acute triangle ABC the feet of the altitudes are A_1, B_1 and C_1 (with the usual notations on sides BC, CA and AB, respectively). The circumcircles of triangles AB_1C_1 and BC_1A_1 intersect the circumcircle of triangle ABC at points $P \neq A$ and $Q \neq B$, respectively. Prove that lines AQ, BP and the Euler line of triangle ABC are either concurrent or parallel to each other. (Submitted by *Géza Kós,* Budapest)

Problems in Physics

(see page 377)

M. 406. At home make an inclined plane of small and variable angle of inclination. Fix the slope at a certain angle of inclination of α. Place a cylinder-shaped pencil on the slope such that the symmetry axis of the pencil makes an angle of β with a horizontal line lying in the plane of the slope. Investigate, at a certain fixed angle of α, at which angle of β will the pencil begin to move along the plane such that it *a*) slides down, but does not roll at all; *b*) rolls down without slipping? Investigate the rolling and slipping regions, and plot them in a coordinate system of (α, β).

G. 749. A flight operated by the United Airlines, UA425 passed right in front of the Sun when *Andrew McCarthy,* a well-known American astrophotographer, took the attached picture. Estimate the distance between the plane and the photographer's camera! **G. 750.** Jack, whose mass is 35 kg, stands on a bathroom scale. He holds a spring balance, which weighs 0.5 N, in his hand, and he hangs a traditional balance to the spring balance. The weight of the empty traditional balance is 15 N. In one plate of the traditional balance there is a stone, which is balanced by weights whose total mass is 2 kg and 20 dag. What is the reading on the bathroom scale? **G. 751.** The image formed by a plane mirror has the same size as the object. However, if we go closer to the mirror we observe ourselves bigger, because the angle of view gets greater. We can see our back by means of two plane mirrors, which are placed approximately opposite and parallel to each other. Where should we stand in between the two mirrors in order to get the greatest angle of view of our back? **G. 752.** The one-ton Mars rover called Perseverance landed successfully on Mars in the middle of February this year. The rover also carried a helicopter drone. What is the weight of the rover on Mars? How could they put the helicopter drone to test on the Earth? Make a suggestion.

P. 5337. Two freight trains are travelling along two parallel railways at a uniform speed. They pass each other in 20 seconds if they move towards each other, while it takes 60 s to pass if they move into the same direction. It takes 40 s for one of the trains and 100 s for the other one to cross a 600-m long bridge. Determine the speeds and the lengths of the trains. **P. 5338.** A pair of dominoes are placed to a third domino as it is shown in the left *figure. a*) Determine the possible values of x such that the dominoes are in stable equilibrium. *b*) Then several more domino pairs are placed to the dominoes as shown in the *right figure.* At most how many dominoes can be placed on the domino at the bottom in order that the system remain in equilibrium? **P. 5339.** There is a thin rod of length $L = 0.6$ m and of negligible mass on a horizontal frictionless surface. Objects of masses $m = 0.2$ kg and $M = 0.8$ kg are attached to the ends of the rod by means of tight threads of negligible mass. The threads are perpendicular to the rod. At a certain moment a force of $F = 8$ N is exerted on the centre of the rod; the force is parallel to the surface and perpendicular to the rod. *a*) Determine the acceleration of the centre of the rod at the initial moment. *b*) At what point of the rod should the force be exerted in order that the two objects have the same acceleration? What are the tensions in the threads in this case? **P. 5340.** One of the great radio telescopes of researchers who search for extraterrestrial life, detected some strange variable-frequency signs, shown in the *figure,* coming from a distant celestial body. The signs were detected continuously for 45 minutes, and then there was a 45-minute break, then again there were signs for 45 minutes and so on. The middle value of the frequency of the detected signs was $f_0 = 1.5$ GHz, and the frequency was changing with an amplitude of $\Delta f = 40$ kHz, about the middle value f_0. The detected radio waves were interpreted by the researchers as signals from an exo-satellite orbiting an exoplanet. It was assumed that the ray joining the Earth and the exoplanet lies in the plane of the orbit of the exo-satellite, and thus the planet mass, radius, and average density could be determined. What values did they get? **P. 5341.** A freight train carries a cuboid-shaped container of length ℓ, width d and height h. The container is halfway filled with some liquid of density ϱ. What force would the liquid exert on the base and each of the side faces of the container, if the train was able to move at a constant acceleration of a_0 for a long time? (The longer edge of the container is parallel to the rails, and the liquid would not flow out of the container even if it was open at its top.) *Data:* $\ell = 10$ m, $h = d = 3$ m, $\varrho = 1000$ kg/m^3, $a_0 = 1$ m/s^2. **P. 5342.** An object of mass M is hanging of the piston of a vertical fixed cylinder. The cylinder is closed at its top and the mass of the piston is m. Q amount of heat is added to the air inside the cylinder, whose initial volume is V. The external atmospheric pressure is p_0. *a*) By what amount does the internal energy of the gas change? *b*) How much work is done by the gas? What other energy changes can be related to this work? (The wall of the cylinder and the piston are made of some thermally insulating material.) **P. 5343.** We have three resistors, with resistances 100 ohms, 200 ohms and 300 ohms. The relative uncertainty values of their resistances are 2%, 5% and 10%, respectively. The resistors are connected in series first and then in parallel. What is the equivalent resistance of each connection, and what is the relative uncertainty of each equivalent resistance? **P. 5344.** The cross section of a prism is an isosceles triangle with a 40° vertex angle, the refractive index of the material of the prism is 1.6. At what angle of incidence α does a light ray reach one of the (slant) faces of the prism, if this ray travels parallel to the base of the triangle inside the prism? To the other slant face of the prism a piece of glass of refractive index n is placed. What is the value of n if the angle of refraction of the previously described light ray emerging from the prism is $\alpha/2$? **P. 5345.** Two quarter circles of radius R are formed from two thin tubes and then two incomplete semi-circle shaped tubes are attached to them. The radius of the semicircles is r and the central angle of the missing part is α. Then the whole arrangement is attached to a vertical surface as shown in the *figure.* Then a small marble is dropped, at zero initial speed into the tube at point A. The marble slides along the circular arcs of AB and BC, then it falls freely between points C and D (oblique projectile motion). Then the marble slides along the circular arcs of DB and BE. (Friction and air drag can be neglected everywhere.) *a*) What is the measure of the angle α, if $\frac{R}{r} = \frac{5}{2}$? *b*) Investigate at different $\frac{R}{r}$ ratios at which value (or values) of α is it possible for the marble to execute the above described motion.