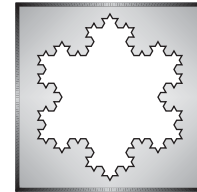


## Önhasonló fraktálok ábrázolása $\text{\LaTeX}$ -ben



A kedves olvasó már olvashatott ebben a számban a fraktálokról és dimenziószámokról a 258. oldalon. Most abba szeretnénk beavatni, hogyan lehet ezeket az alakzatokat ábrázolni a  $\text{\LaTeX}$  nyelv segítségével.

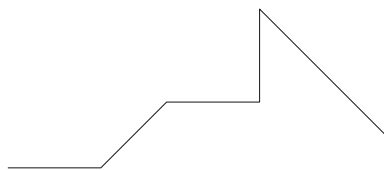
A cikkben található összes ábrához a TikZ csomagot használtuk, a „mindenre is jó” `\draw` paranccsal együtt. A csomagot a `\usepackage{tikz}` paranccsal tudjuk elérhetővé tenni, rajzolni pedig az alábbi formában tudunk:

```
\begin{tikzpicture}
  \draw [];
\end{tikzpicture}
```

No de mit szeretnénk rajzol(tat)ni? Az önhasonló fraktálok megjelenítéséhez a Lindenmayer Arisztid, magyar biológus által formalizált L-rendszereket fogjuk használni, a TikZ erre kifejlesztett csomagjának segítségével. Az L-rendszerek használatához be kell szúrunk a `\usetikzlibrary{lindenmeyersystems}` parancsot is.

Először azonban meg kell értenünk, hogy hogyan is működnek ezek az L-rendszerek. Ebben a jelölésrendszerben vonalak és szögelfordulások váltják egymást, megadva egy utat, amit ceruzánkkal követve megrajzolhatjuk a kívánt alakzatot. Ez a koncepció ismerős lehet azoknak az olvasóknak, akik találkoztak már a teknőcgrafikával, amelyet először csak a Logo nyelven, de ma már több programozási nyelven is elérhetünk.

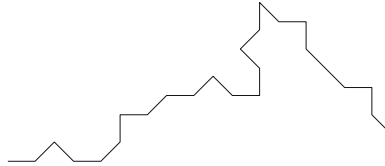
A vonalakat szokás szerint tetszőleges nagybetűkkel (nálunk a „forward” szóból indulva  $F$ , és ha több különböző vonal kell, az ábécében innen elindulva  $G, H, \dots$ ), a szögeket pedig a  $+$  és  $-$  jelekkel jelöljük, attól függően, hogy pozitív vagy negatív irányba fordulunk (az alapértelmezett kezdőirány  $0^\circ$ , tehát az  $x$  tengely pozitív iránya). A szögeknek nem itt szabhatjuk meg a nagyságát, minden  $+$  és  $-$  ugyanakkora szöveget jelent. A szögek nagyságát az ábra parancsának meghívásánál tudjuk majd megadni. Ekkor tehát a  $45^\circ$ -kal vett „ $F + F - F + +F - - - FF$ ” képe például:



(Az ábra forrásában egyébként már itt is L-rendszereket használtunk, ez egy nulladrendű alakzat. Nemsokára ezt bővebben is kifejtjük.)

Igen, de itt nem hogy fraktálokról nem beszélünk, még az önhasonlóságról sem esett szó. Itt jönnek képbe az L-rendszerek: ezeknek a segítségével megadhatunk

egy szabályt, ami alapján egy alakzat továbbfejlődik, minden szakaszát kicserélve *valami másra*. Az érthetőség érdekében nézzünk meg egy példát: az előbb látott alakzatnak minden szakaszán a menetirány szerinti bal oldalra rakjunk egy „kidudorodást” (ennek gyakorlati megvalósítását a következőkben bemutatjuk). Szeretnénk hangsúlyozni, hogy egyelőre még nem beszélünk önhasonló alakzatról, az önhasonlóság akkor fog elkezdődni, amikor a „kidudorodásokra” is kisebb „kidudorodásokat” teszünk majd.



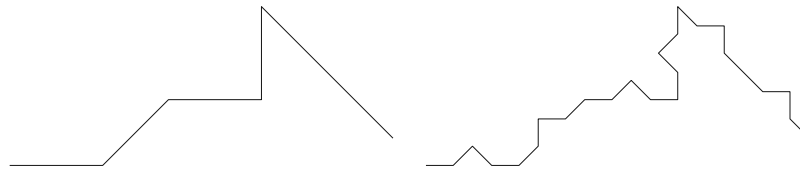
A trükk az, hogy a szabályunk szerint minden „ $F$ ”-et „ $F + F - -F + F$ ”-re cserélünk, ezzel elérve a „kidudorodás” hatását. Természetesen az új ábránk több vonalból áll, mint az előző. Annak érdekében, hogy elférjen a papíron, a vonalak hosszúságát csökkentjük. Kis elemi geometriával gyorsan kiszámolható, hogy az eredeti hosszt  $(2 + \sqrt{2})$ -vel kell elosztani. Az olvasónak javasoljuk ennek belátását.

Az általunk használt L-rendszer definíciója tehát:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{example}{
  \rule{F -> F+F--F+F}
}
```

ahol az „example” az adott L-rendszer neve, amivel később hivatkozni tudunk rá.

A bemutatott két görbe a hozzájuk tartozó programkóddal együtt:



```
\begin{center}
\begin{tabular}{cc}
\begin{tikzpicture}
\draw
[l-system={example, step=35pt, angle=45,
axiom=F+F-F++F---FF, order=0}]
lindenmayer system;
\end{tikzpicture}
&
\begin{tikzpicture}
\draw
[l-system={example, step=10.2513pt, angle=45,
axiom=F+F-F++F---FF, order=1}]
\end{tikzpicture}
\end{tabular}
\end{center}
```

```

lindenmayer system;
\end{tikzpicture}
\end{tabular}
\end{center}

```

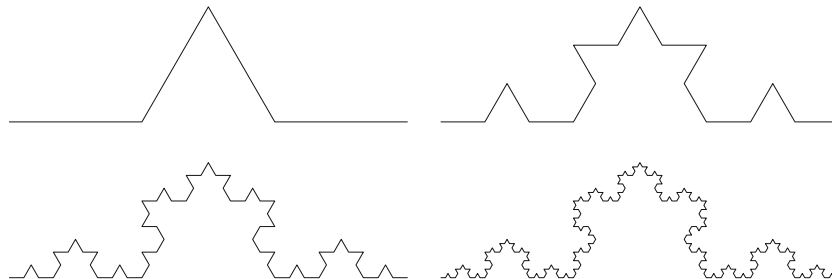
ahol a „center” és a „tabular” az ábrák oldal közepén való egymás mellé rendezéséért felelős, tehát egy egysoros, középre igazított táblázatot hozunk létre a segítségükkel. Az l-system paramétereit közül a „step” a vonalak hosszát, az „angle” pedig a + és – szögek nagyságát adja meg. Az „order” annyit mutat meg, hogy az „axiom”-ban definiált alakzatra hányszor alkalmazzuk a szabályt. Ezért a 0-adrendű alakzat kódja megegyezik az axiómában definiálttal, az elsőrendű kódja pedig

$$(F + F - -F + F) + (F + F - -F + F) - (F + F - -F + F) + + \\ (F + F - -F + F) - - - (F + F - -F + F)(F + F - -F + F),$$

ahol a zárójelek csupán a megértést igyekeznek segíteni. Értelemszerűen a másodrendű alakzatot úgy kapnánk meg, ha ez elsőrendű kódjába minden  $F$  helyére behelyettesítenénk az  $(F + F - -F + F)$ -et. (A szögletes zárójelekben lévő programkódot azért tördeltük, hogy kiférjen az oldalra, egyébként egy sorban is működik.)

Az irracionális számmal való osztás miatt a `step`-re csúnyácska értékeket kapunk. Ez megkerülhető a `\foreach` parancs használatával, ennek részleteit azonban itt nem közöljük, mert túlságosan elkanyarodnánk a cikk témájától. A kedves olvasót azonban bátorítjuk, hogy nézzzen utána.

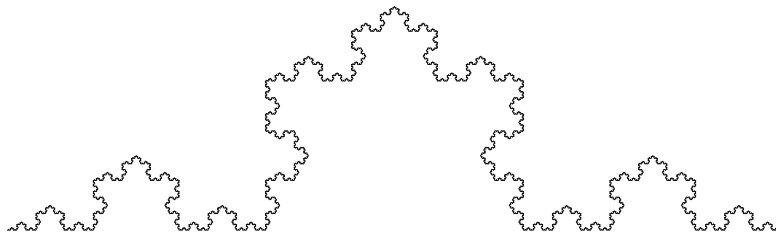
Az újság matematika rovatából már megismerhettük a Koch-görbét, melynek képzési szabálya kísértetiesen hasonlít arra, amit az előző példában láttunk:



A szabály tehát itt is pont ugyanaz, mint az első példában volt, a két fő különbség, hogy egyetlen egyenes szakaszból indulunk ki (az *ábrán* az elsőtől a negyedrendűig szerepelnek az alakzatok), illetve, hogy  $45^\circ$ -os szögek helyett  $60^\circ$ -os szögekkel dolgozunk. Emiatt a szögváltozás miatt az egymást követő iterációkban az oldalak hosszának aránya is változik,  $2 + \sqrt{2}$  helyett 3 az arány.

Mivel a kidudorodások egyre kisebbek, nem kell túl sok iteráción végigmennünk ahhoz, hogy eljussunk a szabad szemmel (akár képernyőn, akár nyomtatásban) nem kivehető különbségekhez.

A következőkben látható egy hatodrendű Koch-görbe, a hozzá tartozó kóddal együtt:



```
\pgfdeclarelindenmayersystem{koch}{
  \rule{F -> F+F--F+F}}

\begin{center}
  \begin{tikzpicture}
    \draw
      [l-system={koch, step=0.4pt, angle=60, axiom=F, order=6}]
      lindenmayer system;
  \end{tikzpicture}
\end{center}
```

A másik cikkünkben látható többi fraktál hozzárendelési szabályai az ott leírtaknak megfelelően:

- Sárkány-görbe:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{sarkany}{
  \symbol{G}{\pgflsystemdrawforward}
  \rule{F -> +F--G+}
  \rule{G -> -F++G-}}
```

- Sierpiński-háromszög:

```
\pgfdeclarelindenmayersystem{sierpinski}{
  \symbol{G}{\pgflsystemdrawforward}
  \rule{F -> +G-F-G+}
  \rule{G -> -F+G+F-}}
```

A két fraktál rajzolásának parancsát nem adjuk meg, ezt az előbbieket alapján az olvasóra bizzuk.

Ahogy a kedves olvasó ebben a cikkben látta, a  $\text{\LaTeX}$ -ben való szerkesztés megkönnyíti a matematikai ábrázolást és szép, letisztult formát ad. A  $\text{\LaTeX}$ -es programozáshoz mi az [overleaf.com](https://www.overleaf.com) felületét ajánlanánk, ahol a kedves olvasó ki tudja próbálni a fentebb leírt alakzatok szerkesztését és akár másokkal közösen is szerkesztheti a programkódot.

**Szép Emma, Varga Pál Patrik**

Budapest V. Kerületi Eötvös József Gimnázium végzős diákjai