C. 1675. Az ABC háromszög AB oldalának egy D belső pontjára

$$\frac{AD}{DB}=\frac{m}{n}<\frac{1}{2},$$

ahol m, n pozitív számok. Az E pont a háromszög kerületének egy, a D-től különböző pontja úgy, hogy a DE egyenes a háromszög területét $1:2$ arányú részekre osztja. Adjuk meg, hogy az m és n számoktól függően az E pont mely oldalra esik és milyen arányban osztja azt.

C. 1676. Mutassuk meg, hogy $2019^{2021}+2021^{2019}$ osztható 4040-nel. Igaz-e a feladat következő általánosítása: ha a és b egymást követő pozitív páratlan számok, akkor a^b+b^a osztható $a+b$-vel?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1677. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left|2\cdot\log_2\sqrt{x^2-x}+3+\frac{1}{\log_4\sqrt{x^2-x}}\right|=2$$

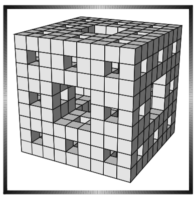
egyenletet.

C. 1678. Egy négyoldalú szabályos gúla minden éle a hosszúságú. Kössük össze a gúla lapjainak középpontjait minden lehetséges módon. Bizonyítsuk be, hogy az így keletkezett szakaszok közül bármelyik hármat kiválasztva a szakaszokból lehet háromszöget szerkeszteni.

❄

Beküldési határidő: 2021. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5174–5181.)

B. 5174. Mutassuk meg, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén

$$(2n)!\leqslant\left(n^2+n\right)^n.$$

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5175. Az ABC háromszögben $AC=BC$, az AC oldal egy belső pontja D, az ABD kör középpontja K. Mutassuk meg, hogy $BCDK$ húrnégyszög.

(*3 pont*)

B. 5176. Egy körre úgy szeretnénk ráírni az első n pozitív egész számot (mindegyiket pontosan egyszer), hogy bármely három szomszédos számot összeadva pontosan kétféle érték forduljon elő. Adjuk meg n lehetséges értékeit.

(*4 pont*) (*Skót versenyfeladat*)

B. 5177. Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogóhoz tartozó magasság a CD szakasz. A CD átmérőjű k kör az AC és BC befogókat másodszor rendre az E és F pontokban metszi. A k körhöz az E pontban rajzolt érintő a BC befogó egyenesét a P, az AB átfogót az M pontban metszi, a k körhöz az F pontban szerkesztett érintő az AC befogó egyenesét a Q, az AB átfogót az N pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy

$$4\cdot MN^2=PE^2+QF^2+2\cdot EF^2.$$

(*5 pont*)

B. 5178. Legyen x pozitív valós szám. Mutassuk meg, hogy

$$\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\leqslant\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right).$$

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5179. Van-e olyan egész számokból álló H halmaz, amelyre teljesül, hogy a 0 kivételével minden egész szám végtelen sokféleképpen felírható néhány, egymástól különböző H-beli elem összegeként, de a 0 nem írható fel ilyen módon?

(*6 pont*)

B. 5180. Az $ABCDEFG$ szabályos hétszög köré írt kör sugara r. Igazoljuk, hogy az A középpontú, $2r$ sugarú kör átmegy a BCE háromszög magasságpontján.

(*5 pont*)

B. 5181. Adott a síkon nyolc pont, melyek közül semelyik három nem esik egy egyenesre és semelyik öt nincs egy körön. Legfeljebb hány olyan kör lehet, mely az adott pontok közül négyre illeszkedik?

(*6 pont*) Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄