Ha Kati pontosan 5 *vagy* 6 *színt használ:* 5 vagy 6 színnel a megadott feltételek mellett nem színezhető ki az ábra, mert ekkor 5 mezőt kell színezni úgy, hogy ezekből kettő azonos színű legyen, így a maradék három helyre legfeljebb három szín használható.

Tehát összesen $(240+360=)600$ lehetőség van a színezésre.

c) Az alsó sorban 10 egymást érintő körlap helyezhető el. Ha a második sorba is 10 körlapot helyezünk el, akkor ezek fölé a harmadik sorba már csak szomszédos köröket érintő körlapok férnének el. Ekkor a három egymást érintő kör középpontja által alkotott szabályos háromszög oldalának hossza 20 cm, magassága $10\sqrt{3}(\approx 17{,}32)$ cm lesz. Így a három sorból álló sáv szélessége $10+10\sqrt{3}+30=$ $=40+10\sqrt{3}\approx 57{,}32>55$ cm lenne, tehát így nem fér el a 29 körlap.

Ha az alsó sor fölé úgy helyezünk el köröket, hogy bármely három egymást érintő kör középpontja 20 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget alkosson, akkor a második sorban 9 kör fér el. Ekkor a fölötte lévő harmadik sorba ismét 10 kör helyezhető el, ha a három sor magassága 55 cm-nél nem nagyobb.

Tekintsük azt a szabályos háromszöget, amelynek egyik oldalának végpontjai az alsó sorban az első és a harmadik körök középpontja. Ekkor ennek a háromszögnek az oldala 40 cm, magassága $20\sqrt{3}\approx 34{,}64$ cm hosszú lesz.

Így a három sorból álló sáv szélessége: $20\sqrt{3}+20\approx 54{,}64<55$ cm, tehát az elrendezés létezik, és eleget tesz a feltételeknek.

Megjegyzések. Ha a megoldó megad egy helyes elrendezést, de annak létezését nem bizonyítja, akkor legfeljebb 2 pontot kapjon.

Fridrik Richárd (Szeged), **Kovácsné Hadas Ildikó** (Budapest),
Németh László (Fonyód), **Sáfár Lajos** (Ráckeve),
Varga Péter (Budapest)

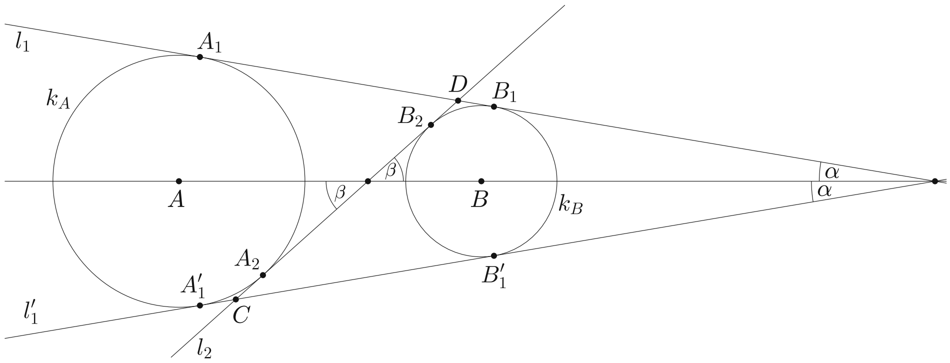
Matematika feladat megoldása

B. 5008. *Adottak az A középpontú k_A és a B középpontú k_B körök. Az l_1 egyenes A_1-ben érinti k_A-t és B_1-ben k_B-t; az l_2 egyenes pedig A_2-ben érinti k_A-t és B_2-ben k_B-t. Bizonyítsuk be, hogy az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok AB egyenesre vett merőleges vetülete egyenlő hosszúságú.*

(*3 pont*)

Megoldás. Amennyiben két külső vagy két belső érintőt húztunk be, a megfelelő pontok vetületei egybeesnek, nincs mit bizonyítanunk. A feladat valódi állítása arra az esetre vonatkozik, ha mindkét körhöz húzható külső és belső érintő is és az egyik egyenes külső, a másik belső érintő. Legyen l_1 a közös külső, l_2 pedig a közös belső érintő.

I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit.



1. ábra

Felhasználva a külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok egyenlőségét:

$$A_1'B_1' = A_1'C + CB_1' = CA_2 + CB_1' = CA_2 + CA_2 + A_2B_2 = 2CA_2 + A_2B_2,$$

$$A_1'B_1' = A_1B_1 = A_1D + DB_1 = A_2D + DB_1 = A_2B_2 + B_2D + DB_1 =$$
$$= A_2B_2 + 2DB_2.$$

Tehát

$$A_1'B_1' = 2CA_2 + A_2B_2 = A_2B_2 + 2DB_2,$$

amiből $CA_2 = DB_2$. Legyen

$$CA_2 = CA_1' = DB_2 = DB_1 = x.$$

A_1 merőleges vetülete az AB egyenesre megegyezik A_1' merőleges vetületével, ugyanígy B_1' és B_1 vetülete is megegyezik. Tehát

$$A_1A_2 \text{ vetülete} = A_1'A_2 \text{ vetülete} = A_1'C \text{ vetülete} + CA_2 \text{ vetülete} =$$
$$= x\cdot\cos\alpha + x\cdot\cos\beta,$$

$$B_1B_2 \text{ vetülete} = B_1D \text{ vetülete} + DB_2 \text{ vetülete} = x\cdot\cos\alpha + x\cdot\cos\beta,$$

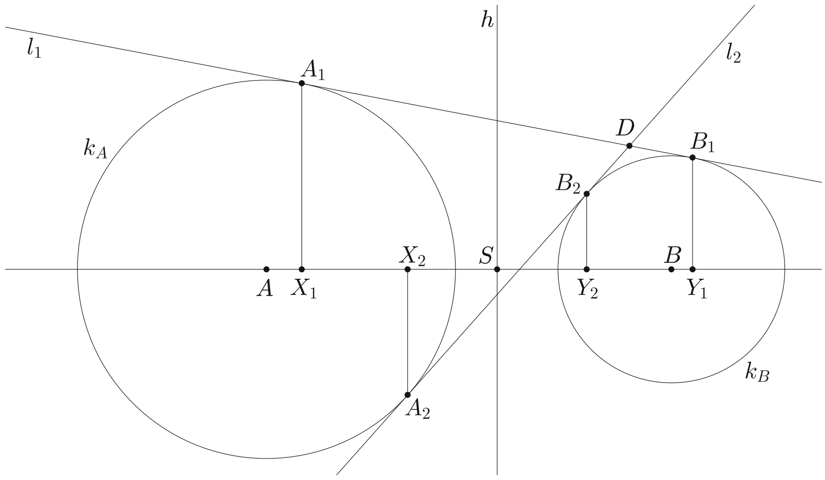
tehát az A_1A_2 és a B_1B_2 szakaszok vetületének hossza valóban megegyezik.

Geretovszky Anna (Szegedi Radnóti Miklós. Kís. Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Vegyük a két kör hatványvonalát. Ez felezi az érintési szakaszokat és merőleges AB-re, tehát az érintési szakaszok AB-re merőlegesen vetített képét is felezi. Jelölje A_1, A_2, B_1, B_2 vetületét rendre X_1, X_2, Y_1, Y_2, a hatványvonal és az AB egyenes metszéspontját pedig S a *2. ábra* szerint.

A hatványvonal felezi az X_1Y_1 és az X_2Y_2 szakaszt, azaz

$$X_1S = SY_1 \quad \text{és} \quad X_2S = SY_2.$$



2. ábra

Ekkor a két-két szakasz különbsége is egyenlő, vagyis

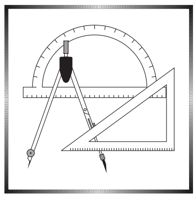
$$X_1X_2 = X_1S - X_2S = SY_1 - SY_2 = Y_1Y_2,$$

ezzel az állítást beláttuk.

Győrffy Johanna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

45 dolgozat érkezett. 3 pontos 25, 2 pontos 6, 1 pontos 1, 0 pontos 13 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1672–1678.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1672. Határozzuk meg az összes olyan p, r számpárt, amelyre p, r és $\frac{p+r}{p-r}$ is pozitív prímszám.

C. 1673. Egy trapézt átlói négy háromszögre bontanak. A trapéz alapjain fekvő háromszögek területének összege a trapéz területének $\frac{13}{18}$ része. Mekkora lehet a trapéz másik alapja, ha az egyik 5 cm hosszú?

Feladatok mindenkinek

C. 1674. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan derékszögű háromszög van, melyben az oldalak mérőszámai pozitív egészek és az átfogó egy egységgel hosszabb az egyik befogónál.

Javasolta: *Németh László* (Fonyód)