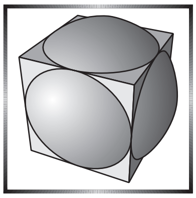

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (797–799.)

A. 797. Egy üres halmazt nem tartalmazó H halmazrendszer *szövevényes,* hogy ha minden A és B H-beli diszjunkt halmazpárra létezik $b \in B$, hogy $A \cup \{b\}$ is H-ban van vagy létezik $a \in A$, hogy $B \cup \{a\}$ is H-ban van.

Tegyük fel, hogy n egyelemű halmaz, $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}$, mind a szövevényes H halmazrendszerben van. Mutassuk meg, hogy ha $n > k(k+1)/2$, akkor van H-ban egy legalább $k+1$ elemű halmaz, és ez minden k-ra éles, azaz ha $n = k(k+1)/2$, akkor még lehet minden H-beli halmaz legfeljebb k elemű.

A. 798. Legyen $0 < p < 1$ adott. Kezdetben van n darab pénzérménk, melyeket feldobva mindegyik eredménye p eséllyel fej, $1 - p$ eséllyel írás (a dobások eredménye egymástól független). Egy körben feldobjuk a pénzérméket, és kivesszük azokat, melyeknél az eredmény fej. Ezt addig ismételjük, amíg az összes érme el nem fogy. Jelölje k_n az ehhez szükséges körök számának várható értékét. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $c > 0$ szám, mellyel minden n pozitív egész esetén teljesül, hogy

$$c\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) < k_n < 1 + c\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

A. 799. Egy adott $A_1A_2B_1B_2$ négyszögre a P pontot *fenomenálisnak* nevezzük, ha az A_1A_2 és B_1B_2 szakaszok ugyanakkora szögben látszanak a P pontból (azaz a PA_1A_2 és PB_1B_2 – akár degenerált – háromszögek P-nél lévő (irányítatlan) belső szögei megegyeznek).

A síkon meg van jelölve három nem egy egyenesen fekvő pont, A_1, A_2 és B_1. Bizonyítandó, hogy létezik egy körlap, melynek tetszőleges B_2 pontjára $A_1A_2B_1B_2$ egy konvex négyszög, melyhez egy derékszögű vonalzó segítségével szerkeszthető hét különböző fenomenális pont.

Egy derékszögű vonalzóval a következő két szerkesztési lépés megengedett:

i) ha adva van két pont, akkor megszerkeszthető a rajtuk átmenő egyenes;

ii) ha adva van egy pont és egy egyenes, akkor megszerkeszthető a pontból az egyenesre állított merőleges.

Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄