Feladatok mindenkinek

C. 1667. Legyen

$$A=(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2021},$$
$$B=(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+\ldots+(-2)^{2021}$$

és

$$C=(-3)^1+(-3)^2+(-3)^3+\ldots+(-3)^{2021}.$$

Határozzuk meg a $B+C-A$ szám utolsó számjegyét.

C. 1668. Az $ABCD$ paralelogramma AB, BC, CD, DA oldalainak felezőpontjai rendre E, F, G, H. Az AF és AG egyenesek a BD átlót a K, illetve L pontban metszik. Mutassuk meg, hogy az EFK és GHL háromszögek területének összege az EKL háromszög területével egyenlő.

C. 1669. Adott az $N=\overline{abc}$ tízes számrendszerbeli háromjegyű szám. Az $M=\overline{abc}$ nem tízes számrendszerbeli szám értéke $2N$. Határozzuk meg az N számot.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1670. Legyenek a és b tetszőleges egész számok, amelyekre $3a-2b$ osztható 13-mal. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $4a+19b$ és $38a+57b$ is osztható 13-mal.

C. 1671. Az $ABCD$ paralelogramma S síkjára merőlegesen az AE, BF, CG, DH szakaszokat állítottuk az S sík által meghatározott egyik féltérben. A $CGEA$ és $DHFB$ négyszögek területét T, illetve t jelöli. Igazoljuk, hogy ha

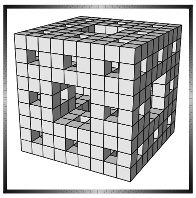
$$\frac{T}{t}=\frac{AC}{BD},$$

akkor az E, F, G, H pontok egy síkra illeszkednek.

❄

Beküldési határidő: 2021. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5166–5173.)

B. 5166. Vannak-e olyan 3-nál nagyobb p, r prímszámok, amelyekre $2p^2+7r^2+2021$ számjegyeinek összege négyzetszám?

(*3 pont*)

B. 5167. Adott a síkon két kör úgy, hogy vannak közös belső érintőik. Mutassuk meg, hogy e közös érintők érintési pontjain átmenő kör középpontja felezi a két kör középpontjait összekötő szakaszt.

(*3 pont*) Javasolta: *Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8.C. osztály*

B. 5168. Felírjuk 1-től 100-ig az egész számokat egy-egy cédulára. A száz darab cédula közül kiválasztunk 16 darabot. Található-e biztosan négy olyan cédula a kiválasztottak között, hogy közülük kettőn-kettőn álló számok összege megegyezik?

(*6 pont*)

B. 5169. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt[3]{2x+11}+\sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{x+9}+\sqrt[3]{4x+6}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5170. Az α és β hegyesszögekre $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\alpha+\beta=90°$.

(*4 pont*)

B. 5171. Az $OLMN$ és $OABC$ tetraéderek úgy helyezkednek el, hogy az A, B és C pontok rendre az OL, OM és ON félegyenesek pontjai. Az LMN háromszög beírt körének középpontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával. Mutassuk meg, hogy az $OLMN$ tetraéder térfogata legalább akkora, mint az $OABC$ tetraéderé. Mi a feltétele annak, hogy a két tetraéder térfogata egyenlő legyen?

(*5 pont*) (*Angol olimpiai válogatóverseny feladata, 1980*)

B. 5172. Hat szabályos dobókockát egy dobópohárral egyszerre elgurítunk. A nem 6-ost mutató kockákat visszatesszük a pohárba, és újra gurítunk. Ha még mindig van olyan kocka, ami nem 6-os, akkor ezeket ismét a pohárba tesszük, és harmadszor is gurítunk. Ezt addig ismételjük, amíg minden kocka hatost nem mutat. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan hatszor gurítunk?

(*6 pont*)

B. 5173. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H, körülírt körének középpontja O. Legyen D és E az AB, illetve AC szakasz belső pontja. Az ADE háromszög magasságpontja és körülírt körének középpontja H', illetve O'. Mutassuk meg, hogy a HH' és OO' egyenesek akkor és csak akkor párhuzamosak, ha $BD=CE$.

(*6 pont*) Javasolta: *Bán-Szabó Áron* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. május 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄