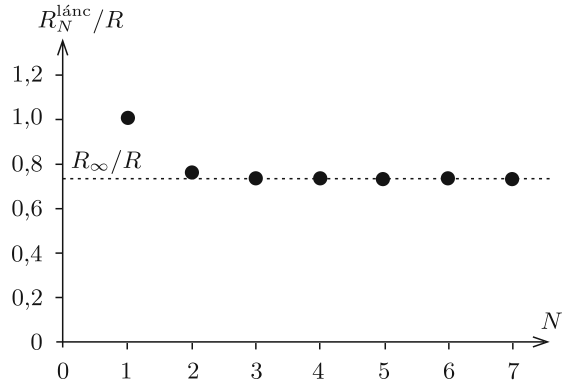
Behelyettesítve az áramerősségeket megadó (∗) explicit képletet, majd egyszerűsítve:

$$R_N^{\text{lánc}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2+\sqrt{3}\,\right)^N+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2-\sqrt{3}\,\right)^N}{\left(2+\sqrt{3}\,\right)^N-\left(2-\sqrt{3}\,\right)^N}R.$$

Ez tehát a *2. ábrán* látható, $3N-2$ egyforma ellenállásból álló véges lánc eredő ellenállása. A kapott eredmény tovább alakítható:

$$R_N^{\text{lánc}}=\underbrace{\left(\sqrt{3}-1\right)R}_{R_\infty}+\frac{2\sqrt{3}}{\left(7+4\sqrt{3}\,\right)^N-1}R,$$

itt az első tag a végtelen ellenállásláncnál kapott kifejezés, a második pedig a véges korrekciót írja le. Könnyen ellenőrizhető, hogy $N=1$-re visszakapjuk az R ellenállást, $N=2$-re pedig a $3R/4$ értéket. Nagy N-ekre a korrekciós tag N-nel exponenciálisan tűnik el, a konvergencia pedig meglepően gyors, ahogy az a *3. ábrán* is látható. $N=3$ esetén az eredő ellenállás R_∞-től való eltérése kevesebb, mint 2%,



3. ábra

$N=4$-re pedig 2 ezreléknél is kevesebb. Az eredő ellenállás szempontjából tehát már néhány, 4-5 fokozatból álló véges lánc is „nagyon hosszú”-nak számít.

Vigh Máté

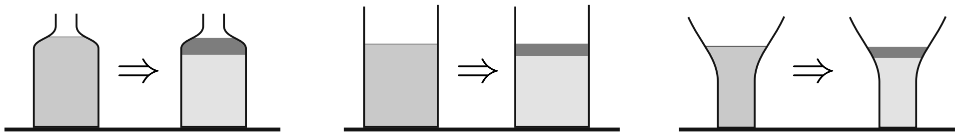
Fizika gyakorlat megoldása

G. 728. *Vannak olyan folyadékok, például a nyers tej vagy az olívaolajos-balzsamecetes salátaöntet, melyeket ha állni hagyunk, akkor a folyadék két alkotóelemére válik szét. Az olaj kerül az öntet tetejére, illetve zsíros tejszín lesz a tej tetején, miközben a teljes térfogat nem változik. Ha az ilyen folyadékokat* *a) felfelé keskenyedő üvegben tartjuk;*

b) hengeres mérőpohárba töltjük;

c) felfelé szélesedő pohárba öntjük,

majd megvárjuk az alkotóelemek szétválását, akkor a folyadék aljánál a hidrosztatikai nyomás megnő, lecsökken vagy változatlan marad?



a) *b)* *c)*

(4 pont)

Megoldás. Jelöljük a homogén keverék adatait 0-s indexekkel, az alsó folyadékrétegét 1-es, a felső réteg adatait pedig 2-es indexekkel. Mivel a folyadék teljes térfogata nem változik, igaz hogy

$$V_0 = V_1 + V_2, \tag{1}$$

a magasságokra pedig

$$h_0 = h_1 + h_2. \tag{2}$$

Tekintve, hogy a folyadék tömege sem változik a szétválási folyamat során, fennáll, hogy

$$\varrho_0 V_0 = \varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2. \tag{3}$$

A sűrűségekre

$$\varrho_2 < \varrho_0 < \varrho_1$$

teljesül, mert (1) és (2) alapján a homogén folyadék ϱ_0 sűrűsége a szétvált folyadékok sűrűségének súlyozott átlaga:

$$\varrho_0 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\varrho_1 + \frac{V_2}{V_1 + V_2}\varrho_2.$$

Írjuk fel az edény aljára ható hidrosztatikai nyomást a szétválás előtt (p), és a szétválás után (p'):

$$p = \varrho_0 g h_0, \qquad \text{illetve} \qquad p' = \varrho_1 g h_1 + \varrho_2 g h_2.$$

Hasonlítsuk össze ezt a két nyomást:

$$p \mathrel{\substack{<\\=\\>}} p'.$$

Mivel most még nem ismerjük, hogy a nyomások közötti reláció a kisebb, az egyenlő vagy a nagyobb közül melyik, ezért a relációjelet kérdőjellel helyettesítjük:

$$\varrho_0 g h_0 \quad ? \quad \varrho_1 g h_1 + \varrho_2 g h_2.$$

Egyszerűsítve g-vel ($g > 0$) és (2)-t felhasználva kapjuk:

$$\varrho_0 h_0 = \varrho_0(h_1 + h_2) \quad ? \quad \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2. \tag{4}$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az egyenes falú edénybe (mérőpohárba) öntjük a folyadékot. Ilyenkor a folyadékoszlopok térfogata egyenesen arányos a rétegek magasságával, vagyis $V_i = Ah_i$ ($i = 0, 1, 2$). Az A keresztmetszettel osztva (3) mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$\varrho_0 h_0 = \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2,$$

vagyis a (4) kifejezésben a reláció *egyenlőség.* Ezek szerint $p' = p$, vagyis az egyenes falú edényben az alkotórészek szétválása során *nem változik* a nyomás.

Ha az edény fala nem egyenes, akkor a folyadékrétegek magassága és térfogata közötti összefüggést a folyadék helyzetétől és az edény alakjától függő *átlagos* keresztmetszet adja meg:

$$V_i = A_i h_i \quad (i = 0, 1, 2).$$

Felfelé szűkülő edényre $A_1 > A_2$, míg a felfelé szélesedő pohár esetében $A_1 < A_2$ teljesül. Ezek segítségével a (3) összefüggés:

$$\varrho_0(h_1 A_1 + h_2 A_2) = \varrho_1 h_1 A_1 + \varrho_2 h_2 A_2,$$

ahonnan A_1-gyel osztva

$$\varrho_0 \left(h_1 + h_2 \frac{A_2}{A_1} \right) = \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2 \frac{A_2}{A_1}. \tag{5}$$

A nyomások viszonyát meghatározó (4) kifejezésből kivonva az (5) egyenletet, majd $h_2 > 0$-val osztva kapjuk, hogy

$$\varrho_0 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \quad ? \quad \varrho_2 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right).$$

Mivel $\varrho_2 < \varrho_0$, az edény aljára ható nyomás megváltozásának jellege $1 - \frac{A_2}{A_1}$ előjelétől függ.

a) Ha $A_2 < A_1$, akkor $1 - \frac{A_2}{A_1} > 0$, tehát a ? reláció a „$>$”-bal egyezik meg, tehát $p > p'$, a szétválás során *lecsökken* a nyomás.

c) Amennyiben $A_2 > A_1$, akkor $1 - \frac{A_2}{A_1} < 0$, tehát a ? reláció a „$<$”-bel egyezik meg, vagyis $p < p'$, a szétválás során *növekszik* a nyomás.

b) Végül $A_1 = A_2$ esetén a nyomás – mint azt korábban már beláttuk – *nem változik.*

Czirók Tamás (Budapest, Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 6, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5259. *Egy gyorsítócsőben* 200 keV *energiájú deuteronokból álló nyaláb érkezik a céltárgyra, az áramerősség* 0,3 mA. *A deuteronok lefékeződnek a céltárgyban.*

a) Másodpercenként mennyi hőt kell elvezetni a céltárgyról, hogy az ne melegedjék?

b) Változik-e az eredmény, ha a deuteronok helyett ugyanekkora energiájú és ugyanekkora áramerősséget adó elektronok, illetve α-részecskék csapódnak be a céltárgyba?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Jelöljük egy-egy részecske energiáját $\mathcal{E}$-vel, a töltését pedig q-val. Δt idő alatt $\Delta Q = I\,\Delta t$ töltés, tehát $\Delta N = \Delta Q/q$ részecske érkezik a céltárgyhoz. Ezek mozgási energiája

$$\Delta E = \Delta N \cdot \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E} I \Delta t}{q},$$

tehát az elszállítandó hőteljesítmény

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E} I}{q}.$$

A megadott számadatok szerint $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^5$ eV és $I = 3 \cdot 10^{-4}$ A, tehát

$$P = \frac{e}{q} \cdot 60\ \mathrm{W},$$

(ahol e az elemi töltést, vagyis az elektron töltésének abszolút értékét jelöli).

a) Deuteronokra $q = +e$, tehát $P = 60$ W, vagyis másodpercenként 60 J hőt kell elvezetni ahhoz, hogy a céltárgy ne melegedjék.

b) Az elektronok töltése $q = -e$, tehát $|q| = e$, így a hűtőteljesítmény ugyanannyi kell legyen, mint a deuteronoknál.

Az α-részecskék töltése $q = +2e$, a másodpercenként elvezetendő hő 30 J.

Sas Mór (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Az elektron töltésének nagysága megegyezik a deuteronéval, csak ellentétes előjelű. Ez nyilván nem azt jelenti, hogy $P < 0$ lenne, vagyis hogy hőt kellene bevezetni a céltárgy melegedésének elkerülésére! A

$$P = \frac{\mathcal{E} I}{q} = \frac{\mathcal{E} I}{(-e)}$$

összefüggésben az áram iránya is megváltozik (ami definíció szerint a *pozitív* töltéshordozók mozgásának iránya). Tehát az elvezetendő hőteljesítmény elektronok esetén

$$P = \frac{200\ \text{keV} \cdot (-0{,}3\ \text{mA})}{(-e)} = +60\ \text{W} > 0.$$

A negatív elektronok gyorsításánál természetesen a gyorsítófeszültség előjele is ellentétes azzal, amit a pozitív töltésű deuteronok vagy α-részecskék gyorsításánál alkalmaznak.

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 6 dolgozat.

P. 5277. *Egy fényképezőgép lencséjének fókusztávolsága* 50 mm, *a lencse átmérője* 20 mm. *A lencsét úgy állítottuk be, hogy* 5 m *távoli tárgyat képez le élesen. Mekkora az a legnagyobb és legkisebb távolság, amelyen belül egy pontnak a képe még kisebb, mint egy* 0,05 mm *átmérőjű folt a filmen? Hogyan változik ez az intervallum, ha a lencse átmérőjét leszűkítjük* 10 mm-*re?*

(*5 pont*) **Tichy Géza** (1945–2021) feladata

Megoldás. Számítsuk ki az ernyő és a lencse k távolságát! A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k},$$

ahol $f = 50$ mm, $t = 5$ m. Innen adódik:

$$k = \frac{tf}{t - f} = 50{,}505\ \text{mm}.$$

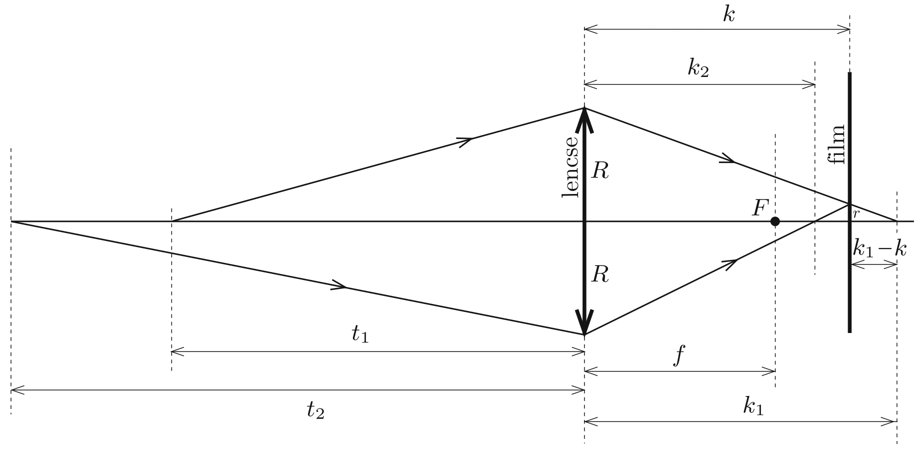
Legyen a legmesszebb lévő pont, aminek még 0,05 mm-nél kisebb átmérőjű folt a képe t_2 távolságra a lencsétől, a legközelebb lévő ilyen pont pedig t_1 távolságra a lencsétől. Ezeket a pontokat a lencse k_2 és k_1 távolságra képezi le. A lencse sugara $R = 10$ mm, a foltok sugara $r = 0{,}025$ mm. Vizsgáljuk azokat a fénysugarakat, amiket a lencse még éppen begyűjt, ezek okozzák a legnagyobb foltot.

A közelebbi pontból induló sugárra a (nem méretarányos) *ábrán* látható hasonló háromszögek miatt a következőt írhatjuk fel:

$$\frac{k_1 - k}{r} = \frac{k_1}{R}, \qquad \text{ahonnan} \qquad k_1 = \frac{R}{R - r}k.$$

A leképzési törvény szerint

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1}, \qquad \text{tehát} \qquad t_1 = \frac{k_1 f}{k_1 - f} = \frac{\frac{R}{R-r}kf}{\frac{R}{R-r}k - f}.$$



A távolabbi pontra hasonló háromszögekből következően ezt írhatjuk fel:

$$\frac{k-k_2}{r}=\frac{k_2}{R},\qquad \text{vagyis}\qquad k_2=\frac{R}{r+R}k.$$

A leképzési törvényt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t_2}+\frac{1}{k_2}\qquad \text{azaz}\qquad t_2=\frac{k_2f}{k_2-f}=\frac{\frac{R}{R+r}kf}{\frac{R}{R+r}k-f}.$$

Mindkét keresett távolságra kaptunk egy-egy általános képletet:

$$t_1=\frac{\frac{R}{R-r}kf}{\frac{R}{R-r}k-f},\qquad \text{illetve}\qquad t_2=\frac{\frac{R}{R+r}kf}{\frac{R}{R+r}k-f}.$$

Az adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy a filmen a lencsétől 4008 mm $\approx$ $\approx$ 4,0 m és 6645 mm $\approx$ 6,6 m közötti távolságban lévő pontok kisebb, mint 0,05 mm átmérőjű foltként jelennek meg, ekkora tehát a $2R=20$ mm átmérőjű lencsénél a fényképezőgép „mélységélessége”.

Ha a lencse átmérőjét leszűkítjük $2R=10$ mm-re, akkor a fenti képleteket alkalmazva azt kapjuk, hogy a lencsétől 3345 mm $\approx$ 3,3 m és 9903 mm $\approx$ 10 m közötti távolságban lévő pontok látszanak a filmen „élesen”, ekkor lesznek a pontszerű tárgyak képei 0,05 mm átmérőjű foltnál kisebbnek, vagyis az objektív „blendézése” a mélységélességet megnöveli.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes Gurzó József, Kertész Balázs, Koleszár Benedek, Sas Mór, Szabó Márton, Toronyi András, Téglás Panna, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 1 dolgozat.

kérdőív diákok részére

Kedves Olvasóink!

Szeretnénk felmérni a KöMaL és pontversenyeinek tartalmáról, ismertségéről alkotott véleményeket. Kérjük, hogy a honlapunk főoldaláról (`www.komal.hu`) elérhető kérdőívet töltsék ki, és biztassák erre a matematika vagy a természettudományok iránt érdeklődő ismerőseiket is.

kérdőív nem diákok részére

Felhívás a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre

A Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (IPhO) és az Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO) szereplő magyar csapat tagjait minden évben a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny keretében választjuk ki a budapesti és vidéki diákolimpiai szakkörökre járó diákok közül. A járványhelyzet miatt idén a diákolimpiai szakkörök nem tudtak a szokásos formában működni, ezért a Kunfalvi-verseny első (elméleti) fordulóját online szervezzük meg.

A verseny teljesen nyitott: részt vehet bárki, aki jelenleg középiskolai tanuló. A feladatsor **2021. március 22-én (hétfőn), 15:00 órától** lesz elérhető a `http://ipho.elte.hu` honlapon. A versenyre előzetesen jelentkezni nem kell, elég a feladatsoron található versenyszabályzatnak megfelelően elkészíteni a dolgozatot, és annak szkennelt változatát legkésőbb március 22. 18:30-ig elküldeni az `iphoteamhun@gmail.com` címre.

A feladatok tematikája azonos az IPhO hivatalos tematikájával*, tehát nem szorítkozik csupán a magyar gimnáziumi fizika tananyagra. A versenyen zsebszámológépen kívül semmilyen segédeszköz sem használható (tehát függvénytáblázat, könyvek, füzetek és internet se). Felkészüléshez javasoljuk a korábbi évek feladatsorait és a budapesti szakkör YouTube-csatornáján (IPhO Hungary) található videókat.

A versenybizottság

Fizikából kitűzött feladatok

M. 403. A kereskedelemben kapható néhány szemcsés anyag esetében (pl.: lencse, rizs, tarhonya stb.) méréssel határozzuk meg, hogy tárolási térfogatuk hány százaléka levegő!

(*6 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

*Lásd a `https://www.ipho-new.org/statutes-syllabus` weboldalt.