ról, optikáról, kvantumelméletről, szinte mindenről. Ha valaki egy fizikai problémával fordult hozzá, gyakran azt mondta: „Könnyű az okosoknak, azok fejből tudják a megoldást. Én buta vagyok, nekem mindent ki kell számítanom matematikával.”

(*Gnädig Péter*)

Valamikor ötven évvel ezelőtt Géza befejezett a táblánál egy levezetést, felénk lépett, égnek emelte mindkét kezét, és lelkesen, átszellemült arccal felkiáltott: Ugye látjátok, hogy ez milyen szép!

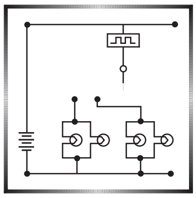
És mi láttuk, hogy szép. Ahogy ő mondta, ahogy átérezte, ahogy mindenkinek át akarta adni azt az élményt, azt a szinte gyermeki örömöt, ami eltöltötte egy-egy jól sikerült ötlet, levezetés, magyarázat után, azt a lelkesedést, ami a fizika, a világ megértése iránt áthatotta. Akkor egy pillanatra az ő szemével láttunk mi is.

Néha, jobb pillanatainkban ma is így látunk. Mától már Géza nélkül, de az ő szemével, az ő örömével, az ő lelkesedésével.

(*Dávid Gyula*)

Sokunknak hiányozni fog színes egyénisége, nagy tudása, embersége.

A KöMaL Szerkesztősége
és a MATFUND Alapítvány kuratóriuma

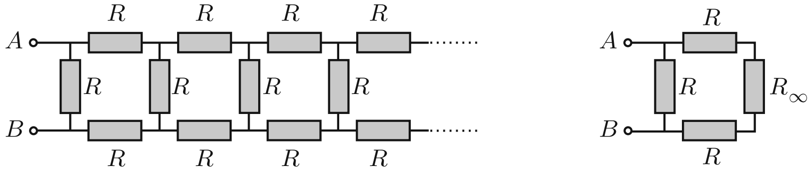


Ellenállásszalagok

Bevezetés

1967-ben a Varsóban megrendezett első Nemzetközi Fizika Diákolimpián (IPhO) a második elméleti feladatban egy végtelen ellenálláslánc eredő ellenállását kellett meghatározni. A probléma az akkori középiskolai versenyfeladatok között újszerűnek számított. Azóta a hazai versenyeken és a KöMaL hasábjain is rengeteg változata tűnt fel a feladatnak, a problémakör standarddá vált a versenyzők körében.

Bevezetésként tekintsük az *1. ábra* bal oldalán látható, csupa R ellenállásból álló, végtelen ellenálláslláncot és határozzuk meg az A és B kivezetések között mérhető R_∞ eredő ellenállást!



1. ábra

Az ilyen típusú feladatoknál a szokásos megoldási módszer a következő. Vegyük észre, hogy az ellenálláslánc A és B-hez legközelebbi fokozatához egy ugyanolyan végtelen, R_∞ eredő ellenállású lánc csatlakozik, mint amilyen az eredeti lánc, ezért az *1. ábra* jobb oldalán látható helyettesítő képnek megfelelően a lánc eredő ellenállására a következő egyenletet tudjuk felírni:

$$R_\infty = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_\infty}\right)^{-1},$$

ebből az

$$R_\infty^2 + 2R_\infty R - 2R^2 = 0$$

másodfokú egyenletre jutunk, amelynek egyetlen pozitív megoldása

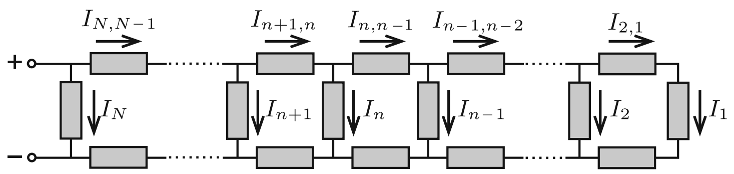
$$R_\infty = \left(\sqrt{3} - 1\right)R \approx 0{,}7321R.$$

Végtelen ellenállásláncot a valóságban nem tudunk készíteni. A fizikában a „végtelen” lánc valójában „nagyon hosszút” jelent, azaz olyan hosszú, de véges ellenállásláncot, amelynek eredő ellenállása lényegében nem függ attól, hogy pontosan hány fokozatból áll a lánc. Felmerül a kérdés, hogy az eredő ellenállás szempontjából milyen hosszú ellenálláslánc tekinthető végtelennek, azaz az ellenálláslánc fokozatainak növelésével milyen gyorsan konvergál az eredő ellenállás az R_∞ értékhez?

A véges ellenálláslánc áramerősség-viszonyai

A véges ellenállásláncokról általában kevés szó esik, érdekességük azonban nem marad el a végtelen láncok esetétől. Most is a végtelen ellenállásláncnál bemutatott konkrét példához nyúlunk, az ettől eltérő konfigurációjú, véges láncok eredő ellenállásának meghatározásánál is a következőkben bemutatott gondolatmenettel lehet célt érni.

Tekintsük a *2. ábrán* látható N fokozatú láncot, amely összesen $3N-2$ darab egyforma R ellenállásból áll!



2. ábra

Ha a kivezetésekre az ábra szerinti polaritású feszültséget kapcsolunk, a körben a nyilak által jelzett irányban áram indul meg. Az egyes ágakban folyó áramok ismeretében meg tudnánk mondani a lánc eredő ellenállását, hiszen a kivezetésekre kapcsolt feszültség RI_N alakba írható, az áramforráson átfolyó áram erőssége pedig $I_N + I_{N,N-1}$, így az Ohm-törvény szerint

$$R_N^{\text{lánc}} = \frac{I_N}{I_N + I_{N,N-1}}R. \tag{1}$$

A következőkben ennek meghatározását tűzzük ki célul.

A csomópontokra $n \geqslant 2$ esetén teljesülnie kell az

$$I_{n+1,n} = I_n + I_{n,n-1} \tag{2}$$

Kirchhoff-féle első törvénynek, az áramhurkokra pedig fenn kell állnia az

$$RI_{n+1} - 2RI_{n+1,n} - RI_n = 0 \tag{3}$$

Kirchhoff-féle második törvénynek. A (3) egyenletből R-rel való egyszerűsítés után az

$$I_{n+1,n} = (I_{n+1} - I_n)/2$$

összefüggést kapjuk, ebből $n \to n-1$ változócserével az

$$I_{n,n-1} = (I_n - I_{n-1})/2$$

kifejezést kapjuk. Az utóbbi két egyenletet (2)-be helyettesítve, rendezés után az ellenállásláncfokozataiban folyó áramok között az

$$I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1} \tag{4}$$

összefüggésre jutunk ($n \geqslant 2$). Az $n = 1$ sorszámú ágban folyó áram I_1 erősségét adottnak tekintve, majd a huroktörvényt alkalmazva az $I_2 = 3I_1$ eredményt kapjuk. Az I_1 és I_2 értékekből kiindulva (4) segítségével az n-edik ág áramerőssége is meghatározható, ehhez azonban egy $n-2$ egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani. Ehelyett szeretnénk az I_n-et n függvényében explicit módon kifejezni.

A lineáris rekurzió megoldása

A matematikai sorozatok olyan képzési szabályát, melyben a sorozat n-edik elemét az azt megelőző néhány elem lineáris függvényeként állítjuk elő, lineáris rekurziónak nevezzük. Az ilyen szabályok szerint képzett sorozatok esetén mindig megtalálható a sorozat n-edik elemét előállító explicit képlet. A leghíresebb, rekurzív módon megadott sorozat a Fibonacci-sorozat, melynek első két eleme a 0 és 1, a sorozat következő elemei pedig mindig az előző két elem összegeként állnak elő: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Tekintsük most a (4) rekurzióval megadott sorozatot, melynek első két eleme I_1 és $I_2 = 3I_1$! Tűzzük ki célul az $I_n = f(n)$ explicit összefüggés megtalálását!

A (4) rekurzió az első két elem megválasztásától függően sokféle sorozatot definiálhat. Vajon választható-e úgy az első két elem, hogy a sorozat elemei mértani sorozatot alkossanak? Másképpen mondva: létezik-e olyan q valós szám, melyre az $n = 1$ és $n = 2$ sorszámú elemeket 1 és q értékűnek választva a (4) rekurzióval előállított sorozat $n = k$ sorszámú eleme q^{k-1} alakba írható? Ennek eldöntéséhez helyettesítsük be a q^{n-1} explicit képletet a (4) rekurziós összefüggésbe!

$$q^n = 4q^{n-1} - q^{n-2},$$

majd a nemtriviális megoldást keresve, q^{n-2}-vel való egyszerűsítés és rendezés után a

$$q^2 - 4q + 1 = 0$$

másodfokú egyenletre jutunk. Ennek két megoldása:

$$q_1 = 2 - \sqrt{3}\,, \qquad q_2 = 2 + \sqrt{3}\,.$$

Tehát két olyan mértani sorozat is létezik, amely kielégíti a (4) rekurziós összefüggést: az $1, q_1, q_1^2, q_1^3, \ldots$; valamint az $1, q_2, q_2^2, q_2^3, \ldots$ sorozat. Vegyük észre, hogy ekkor e két mértani sorozat elemeiből a tetszőleges c_1 és c_2 valós számokkal képzett

$$a_{n+1} = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

sorozat is kielégíti a (4) rekurziót, hiszen:

$$\underbrace{c_1 q_1^n + c_2 q_2^n}_{a_{n+1}} = c_1\big(4q_1^{n-1} - q_1^{n-2}\big) + c_2\big(4q_2^{n-1} - q_2^{n-2}\big) =$$

$$= 4\underbrace{\big(c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}\big)}_{a_n} - c_2\underbrace{\big(c_1 q_1^{n-2} + c_2 q_2^{n-2}\big)}_{a_{n-1}}.$$

Megválaszthatjuk-e úgy a c_1 és c_2 együtthatókat, hogy az a_n sorozat éppen az áramerősségeket megadó I_n sorozat legyen? Ennek semmi akadálya, csupán az $a_1 = I_1$ és $a_2 = 3I_1$ egyenlőségeket kell megkövetelnünk:

$$c_1 + c_2 = I_1,$$

$$c_1 q_1 + c_2 q_2 = 3I_1.$$

Az egyenletrendszert megoldva a

$$c_1 = \frac{3 - q_2}{q_1 - q_2} I_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} I_1, \qquad c_2 = \frac{q_1 - 3}{q_1 - q_2} I_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} I_1$$

eredményeket kapjuk. Ezeket az $I_n = c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}$ kifejezésbe helyettesítve már elő tudjuk állítani az egyes ágakban folyó áramok erősségét megadó explicit összefüggést:

$$(*) \qquad I_n = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} \big(2 - \sqrt{3}\,\big)^{n-1} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} \big(2 + \sqrt{3}\,\big)^{n-1} \right) I_1.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a $(*)$ formula valóban visszaadja $n = 1, 2$ esetén az I_1, $3I_1$ értékeket.

A véges ellenállásánc eredő ellenállása

Miután sikerült meghatároznunk a 2. ábrán látható láncban folyó áramokat, az eredő ellenállást (1) alapján már könnyen kiszámíthatjuk. Felhasználva a korábban kapott $I_{N,N-1} = (I_N - I_{N-1})/2$ összefüggést az (1) kifejezés a következő alakot ölti:

$$R_N^{\text{lánc}} = \frac{2I_N}{3I_N - I_{N-1}} R.$$

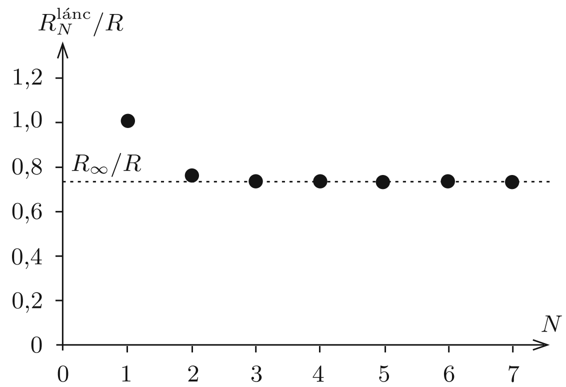
Behelyettesítve az áramerősségeket megadó (∗) explicit képletet, majd egyszerűsítve:

$$R_N^{\text{lánc}}=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2+\sqrt{3}\,\right)^N+\left(\sqrt{3}+1\right)\left(2-\sqrt{3}\,\right)^N}{\left(2+\sqrt{3}\,\right)^N-\left(2-\sqrt{3}\,\right)^N}R.$$

Ez tehát a *2. ábrán* látható, $3N-2$ egyforma ellenállásból álló véges lánc eredő ellenállása. A kapott eredmény tovább alakítható:

$$R_N^{\text{lánc}}=\underbrace{\left(\sqrt{3}-1\right)R}_{R_\infty}+\frac{2\sqrt{3}}{\left(7+4\sqrt{3}\,\right)^N-1}R,$$

itt az első tag a végtelen ellenállásláncnál kapott kifejezés, a második pedig a véges korrekciót írja le. Könnyen ellenőrizhető, hogy $N=1$-re visszakapjuk az R ellenállást, $N=2$-re pedig a $3R/4$ értéket. Nagy N-ekre a korrekciós tag N-nel exponenciálisan tűnik el, a konvergencia pedig meglepően gyors, ahogy az a *3. ábrán* is látható. $N=3$ esetén az eredő ellenállás R_∞-től való eltérése kevesebb, mint 2%,

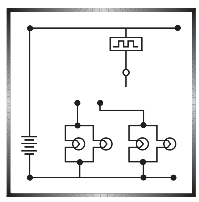


3. ábra

$N=4$-re pedig 2 ezreléknél is kevesebb. Az eredő ellenállás szempontjából tehát már néhány, 4-5 fokozatból álló véges lánc is „nagyon hosszú”-nak számít.

Vigh Máté

Fizika gyakorlat megoldása



G. 728. *Vannak olyan folyadékok, például a nyers tej vagy az olívaolajos-balzsamecetes salátaöntet, melyeket ha állni hagyunk, akkor a folyadék két alkotóelemére válik szét. Az olaj kerül az öntet tetejére, illetve zsíros tejszín lesz a tej tetején, miközben a teljes térfogat nem változik. Ha az ilyen folyadékokat*