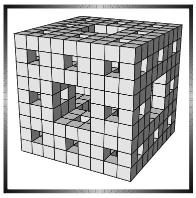
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5158–5165.)



B. 5158. Az A, B, C és D pontokra a síkon $AB < CB$ és $CD < AD$ teljesül. Mutassuk meg, hogy az AB és CD szakaszok nem metszik egymást.

(*3 pont*)

B. 5159. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a

$$\left[\frac{2020-x}{x-1}\right]+\left[\frac{2021+x}{x+1}\right]=82$$

egyenletet, ahol $[c]$ a c szám egészrészét jelöli.

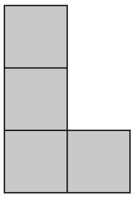
(*4 pont*) Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Esztergom)

B. 5160. Mennyi lehet $x+y+z$ értéke, ha

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{x+y+z}{2}?$$

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5161. A 100×100-as sakktáblára letettünk 800 L-tetrominót. Mutassuk meg, hogy letehetünk még egy L-tetrominót a táblára. A tetrominók nem fednek át, és mindegyik pontosan a sakktábla 4 mezőjét fedi. L-tetrominó alatt az *ábrán* látható alakzatot, elforgatottjait és tükrözöttjeit értjük.



(*6 pont*)

B. 5162. Az ABC háromszög oldalai 9, 10 és 17 egység hosszúak. Mekkora az ABC háromszög külső szögfelezői által meghatározott háromszög területe?

(*5 pont*) Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Esztergom)

B. 5163. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsából induló, a legrövidebb oldalhoz közelebbi szögharmadoló az AB átfogót T-ben, a háromszög körülírt körét D-ben metszi. Mekkorák a háromszög hegyesszögei, ha a D-ből a befogók egyeneseire bocsátott merőlegesek talppontjai és T egy egyenesen vannak?

(*4 pont*)

B. 5164. Két játékos 3 győzelemig tartó kő-papír-olló párbajt játszik. Tegyük fel, hogy mindketten minden menetben véletlenszerűen (egymástól és a korábbi mutatásoktól függetlenül), $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$ eséllyel választják ki, hogy mit mutatnak. Adjuk meg a menetek számának várható értékét.

(*5 pont*)

B. 5165. Legyen k egy adott pozitív egész. Van-e olyan $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre

$$f(x)+f\big(f(x)\big)=x+k$$

minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

Beküldési határidő: 2021. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (795–796.)

A. 795. A következő játékot játsszák n emberrel: adott $n+1$ kalap, melyek meg vannak számozva 1-től $n+1$-ig. Az emberek szemét bekötik, és mindegyikük fejére feltesznek egyet az $n+1$ kalap közül (a megmaradó kalapot elrejtik). Ezután az embereket sorba állítják, és leveszik a szemükről a kötést (mindegyik ember az előtte állókon lévő kalapok számait látja). Ezután hátulról előrefelé haladva mindegyik játékos sorban megtippeli a fején lévő kalap számát, de a tippek között nem lehet két egyforma (a játékosok hallják egymás tippjét).

Legfeljebb hány biztos találata lehet az n embernek, ha a játék ismertetése után megegyezhetnek egy közös taktikában?

Javasolta: *Kiss Viktor* (Budapest)

A. 796. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, melynek AB és CD oldalegyenesei a P, BC és DA oldalegyenesei pedig a Q pontban metszik egymást. A P pontból az BC és DA oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai K és L, a Q pontból a AB és CD oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai M és N. Az AC átló felezőpontja legyen F.

Bizonyítandó, hogy az FKN és FLM háromszögek körülírt körei és a PQ egyenes egy ponton megy át.

Balogh Ádám Péter (Szeged) ötlete alapján

Beküldési határidő: 2021. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`