Matematika feladatok megoldása

B. 4993. *Rajzoljunk az ABC derékszögű háromszög BC és CA befogói fölé négyzeteket. A négyzetek C-vel átellenes csúcsai legyenek D és E. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög köré írt kör átmegy a DE szakasz felezőpontján.*

(*4 pont*)

Megoldás. Ahol használjuk, ott jelölje G és H a két négyzet másik csúcsát, P pedig az ED szakasz felezőpontját. Mivel a négyzet átlója és oldala a közös csúcsban 45°-ot zárnak be, ezért $DCB\sphericalangle = ECH\sphericalangle (= 45^\circ)$, és így D, C és E egy egyenesen vannak. A P pont a nagyobb négyzet belsejében van. Ha a két négyzet egybevágó (vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú), akkor P és C megegyezik, az állítás nyilvánvaló.

I. megoldás. Legyen

$$AC = CH = HE = EA = a \quad \text{és} \quad BC = CG = GD = DB = b.$$

Hosszabbítsuk meg a DB, DG, EA és EH szakaszokat, metszéspontjukat jelölje I és F az *1. ábra* szerint. Az $IEFD$ négyszög négyzet, mivel mind a négy oldalának hossza $a+b$, és két szemben lévő szöge (az E, illetve D csúcsnál lévő) 90°.

Ekkor az átlók metszéspontja (és egyben felezőpontja) P. Ekkor $PF = IF/2 = ED/2 = PE$ és $EA = BF = a$, tehát a BPF és az APE háromszögek két-két oldalának hossza megegyezik. Az ezek által közbezárt szögek nagysága $AEP\sphericalangle = BFP\sphericalangle = 45^\circ$, hiszen a négyzet átlói az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be. Tehát a két háromszög egybevágó, és így $BPF\sphericalangle = APE\sphericalangle$ is teljesül.

Mivel $BPF\sphericalangle = APE\sphericalangle$ és $EPF\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $APB\sphericalangle = EPF\sphericalangle - APE\sphericalangle + BPF\sphericalangle = 90^\circ$ is teljesül. Tehát a P pont a Thálesz-tétel megfordítása miatt rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

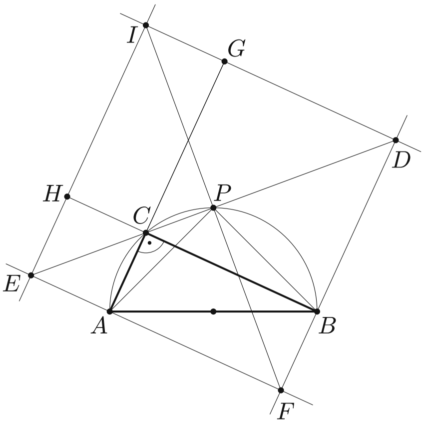
Tóth Bálint (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A P pont egyenlő távol van az egymással párhuzamos EA és DG egyenestől, tehát rajta van a rájuk merőleges AG szakasz felező merőlegesén. Tehát $PG = PA$, az APG háromszög egyenlő szárú. Emiatt $PAG\sphericalangle = PGA\sphericalangle$ (*2. ábra*).

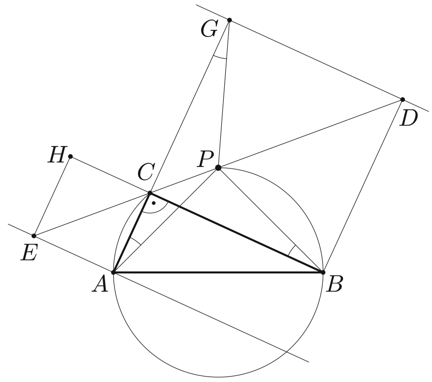
Másrészt az ED átlóra való szimmetria miatt $PGC\sphericalangle = PBC\sphericalangle$.

A fentiekből következik, hogy $PBC\sphericalangle = PGC\sphericalangle = PGA\sphericalangle = PAC\sphericalangle$, vagyis az A és a B pont a CP szakasznak ugyanazon a látószögkörívén van, tehát az A, B, P és C pontok egy körön vannak, és ezt kellett bizonyítani.

Tiszay Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

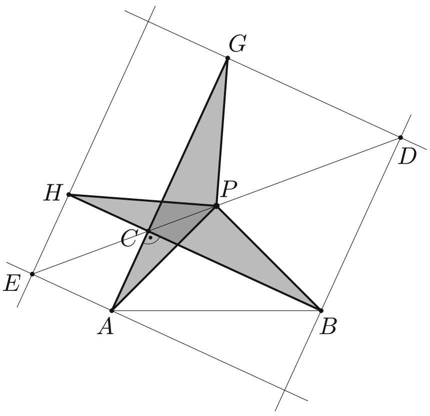


1. ábra

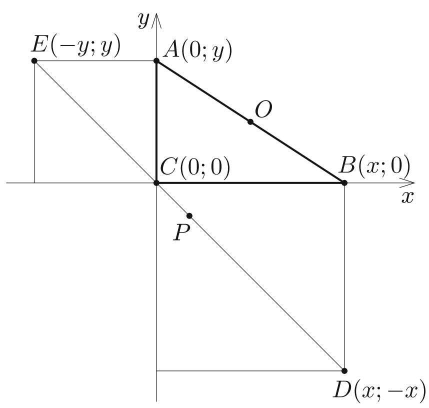


2. ábra

III. megoldás. Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy az APG háromszög egyenlő szárú és hogy $PBC\sphericalangle = PGA\sphericalangle = PAC\sphericalangle$, illetve $PB = PG$. Hasonló módon mutatható meg, hogy a BPH háromszög is egyenlő szárú. A fentiekből következik, hogy a PAG és a PBH háromszög szárai és alapon fekvő szögeik, vagyis így mindhárom szögük megegyezik, tehát a két háromszög egybevágó. Sőt, a P pont körüli forgatással megkapható egyik a másikból. Mivel $AG \perp HB$, ezért a forgatás szöge 90°, ami azt jelenti, hogy a PB szakasz és a PA szakasz is 90°-ot zárnak be egymással, tehát a Thálesz-tétel megfordítása miatt a P pont rajta van az AB szakasz Thalész körén, ami – szintén a Thálesz-tétel megfordítása miatt – az ABC háromszög köré írt köre (*3. ábra*).



3. ábra



4. ábra

IV. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a *4. ábra* szerint.

Legyen az ABC háromszög köré írható körének középpontja O. A Thalész-tétel miatt az O pont az AB oldal felezőpontja, így koordinátái $O\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right)$. A P pont az ED szakasz felezőpontja, így koordinátái $P\left(\frac{x-y}{2};\frac{y-x}{2}\right)$.

Az ABC háromszög köré írt körének sugara $r=|OC|=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}$.

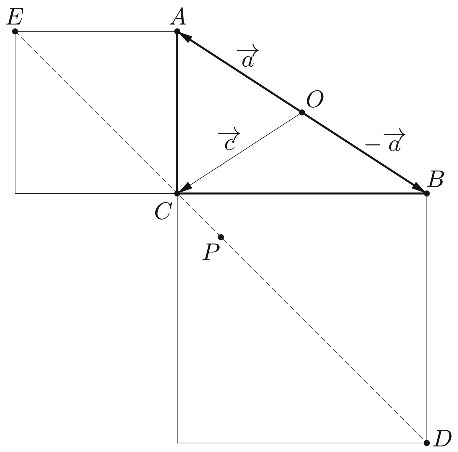
Számítsuk ki az OP távolságot:

$$|OP|=\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{y}{2}\right)^2+\left(-\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}=r.$$

Mivel $|OP|=|OC|$, ezért P rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

Laki Anna (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn. és Koll., 11. évf.)

V. megoldás. Legyen az ABC háromszög köréírt körének közzéppontja, és egyben az origó O. Mivel a Thálesz-tétel megfordítása miatt C rajta van az AB szakasz Thalész körén, ezért az O pont az AB szakasz felezőpontja.



5. ábra

Legyen $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, és vesszővel jelöljük a vektor $-90°$-os elforgatottját. Eszerint $\vec{p}$ $+90°$-os elforgatottja $-\vec{p}\,'$ (*5. ábra*).

Ekkor igazak a következők:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a},$$

$$\vec{e}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\overrightarrow{AC}'=$$
$$=\vec{a}+\vec{c}\,'-\vec{a}\,',$$

$$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-(-\vec{a})=\vec{c}+\vec{a},$$

$$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}'=-\vec{c}\,'-\vec{a}\,',$$

$$\vec{d}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=-\vec{a}-\vec{c}\,'-\vec{a}\,'.$$

Egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a két végpontba mutató vektorból kapható meg:

$$\vec{p}=\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}=\frac{-\vec{a}-\vec{c}\,'-\vec{a}\,'+\vec{a}+\vec{c}\,'-\vec{a}\,'}{2}=-\vec{a}\,'.$$

Tehát P az O-tól $|-\vec{a}\,'|=|\vec{a}|$ távolságra van, ami épp a kör sugara, azaz a P pont ráéesik a körre.

Horváth Anikó (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)

103 dolgozat érkezett. 4 pontos 73, 3 pontos 18, 2 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 5070. *Egy szigeten kétféle ember él. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak. Tíz szigetlakó között kiosztottuk az* $1, 2, \ldots, 10$ *számokat. Mindenki egy-egy különböző számot kapott. Ezután mindenkinek feltették a következő három kérdést: „A te számod páros?", „A te számod osztható* 4*-gyel?", „A te számod osztható* 5*-tel?". Az első kérdésre hárman, a másodikra hatan, a harmadikra pedig ketten válaszoltak igennel. Mely számok vannak hazudósoknál?*

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Minden számhoz hozzárendeljük azt a személyt, akinél az adott szám van. Így most mindegyik szám vagy igazmondó, vagy hazudós.

Nézzük az első kérdést. „A te számod páros?". Tegyük fel, hogy a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ halmazból x fő igazmondó van. Ekkor ebből a halmazból pontosan x fő mondott igent a kérdésre. A páratlan számok $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazában, ha x' igazmondó van, akkor ez az x' fő nemmel válaszolt, de a többi $5 - x'$ hazudós igennel, így összesen $x + 5 - x'$ igen válasz érkezett. A feltétel alapján $3 = x + 5 - x'$, tehát $x' = 2 + x$.

Vegyük a második kérdést. „A te számod osztható 4-gyel?". Tegyük fel, hogy a 4-gyel oszthatóak $\{4, 8\}$ halmazából y fő igazmondó. Ekkor itt y darab igen válasz érkezett, míg a 4-gyel nem oszthatóak $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ halmazában y' igazmondó van, akkor a maradék $8 - y'$ hazudóstól ismét igen válasz érkezett, így az igenek száma $y + 8 - y'$. Erre a kérdésre összesen 6 igen válasz érkezett, vagyis $6 = y + 8 - y'$, azaz $y' = 2 + y$.

Tekintsük végül a harmadik kérdést. „A te számod osztható 5-tel?" Ha az 5-tel oszthatóak $\{5, 10\}$ halmazában z fő igazmondó van, akkor a maradék $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból a z' igazmondó nemmel válaszolt, a $8 - z'$ hazudós pedig ismét igennel. A feltétel szerint az igen válaszok száma $2 = z + 8 - z'$, tehát $z' = z + 6$.

Mivel az igazmondók száma állandó, és

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} =$$
$$= \{4, 8\} \cup \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\} = \{5, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\},$$

ezért $x + x' = y + y' = z + z'$. Beírva korábbi összefüggéseinket:

$$2 + 2x = 2 + 2y = 6 + 2z,$$

majd az egyszerűsítések után:

$$x = y = z + 2.$$

Az $\{5, 10\}$ halmazban z darab igazmondó van, így $0 \leqslant z \leqslant 2$, ugyanígy a $\{4, 8\}$ halmazban y igazmondó van, tehát $0 \leqslant y \leqslant 2$. E két feltétel alapján kapjuk, hogy $z = 0$ és $y = x = 2$.

Az $y = 2$ miatt a 4 és 8 igazmondók, viszont az $x = 2$ miatt a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ további elemei már hazudósak. Továbbá a $z = 0$ miatt 5 és 10 mindketten hazudósak, viszont az első kérdésnél az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazban $x' = x + 2 = 4$ igazmondó van. Ezek közül az 5 hazudós, tehát a többi négy biztosan igazmondó. Összefoglalva:

Igazmondók: $1, 3, 4, 7, 8, 9$

Hazudósak: $2, 5, 6, 10$.

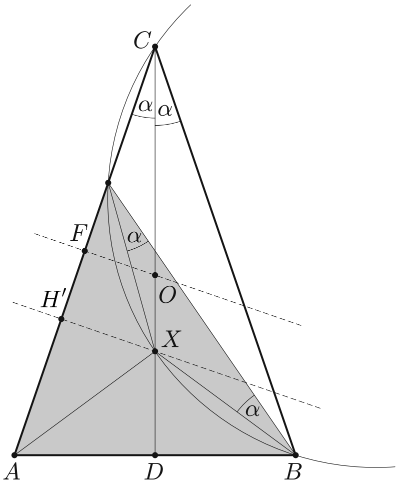
Ez az eredmény meg is felel a feladat összes feltételének, mert az első kérdésre hárman mondanak igent $\{4, 5, 8\}$, a másodikra hatan $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, a harmadikra pedig ketten $\{2, 6\}$.

Bán-Szabó Áron (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 140 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 116 versenyző, 3 pontos 13, 2 pontos 9 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 2 tanuló.

B. 5080. *Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőpontja D, AC szárának C-hez közelebbi harmadolópontja H. A BCH kör a CD egyenest a C és az X pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $CX = \frac{4}{3}r$, ahol r az ABC kör sugara.*

(*4 pont*)



Megoldás. Legyen H' az AC szár másik harmadolópontja, F az AC felezőpontja, O pedig az ABC háromszög körülírt körének középpontja. Legyen az $ACB\sphericalangle$ szárszög 2α.

A CD egyenes az egyenlő szárú ABC háromszög szimmeteriatengelye, ezért $ACD\sphericalangle = DCB\sphericalangle = \alpha$. A feltétel szerint B, C, H, X egy körön vannak, így a kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján $HBX\sphericalangle = HCX\sphericalangle = \alpha$ és $BCX\sphericalangle = BHX\sphericalangle = \alpha$. Ezzel megmutattuk, hogy BXH egyenlő szárú háromszög, $HX = XB$. Másrészt CD szimmetriatengely, emiatt $AX = BX$ is teljesül. Azt kaptuk, hogy az X pont az ABH háromszög körülírt körének középpontja. Az AH szakasz H' felezőpontjában az AC oldalra állított merőleges átmegy a körülírt kör X középpontján. Ugyanezen okból az AC szakasz F felezőpontjában az AC-re állított merőleges átmegy az O ponton. A befejezéshez látjuk, hogy a CFO és $CH'X$ derékszögű háromszögek α hegyesszöge közös és $FO||H'X$, tehát a két háromszög hasonló. A hasonlóság arányára kapjuk, hogy

$$\frac{CX}{CO} = \frac{CH'}{CF} = \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{4}{3}.$$

A CO szakasz a körülírt kör r sugara, így egyszerű szorzással

$$CX = \frac{4}{3}r.$$

Baski Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha a feladat többi adatait és jelöléseit megtartva harmadolás helyett a H pontot úgy választjuk az AC száron, hogy $HC = \lambda \cdot AC, (0 < \lambda < 1)$, akkor a CX szakasz hosszára, lényegében ugyanezekkel a lépésekkel, $CX = (1+\lambda)r$ adódik.

Összesen 63 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 57, 3 pontot 3 tanuló. 2 pontos 2, 1 pontos további 1 versenyző dolgozata.

B. 5123. *Andi és Bori elosztotta egymás között a SET játék*[1] 81 *kártyalapját; Andihoz* 40*, Borihoz* 41 *lap került. Mindketten megszámolják, hogy a náluk lévő kártyák között hány olyan hármas van, ami SET-et alkot. Mennyi lehet az így kapott darabszámok összege?*

(*6 pont*)

I. megoldás. A SET játék bármely két kártyalapjára igaz, hogy pontosan 1 olyan SET van, amelyben mindkét lap szerepel, tehát egyértelműen meghatározzák a 3. lapot, amely még tagja ennek a SET-nek. Hiszen akkor alkot SET-et 3 lap, ha négy tulajdonság (szám, forma, szín, tartalom) szempontjából vagy mind azonos, vagy mind különböző. Például ha adott az „1-piros-tömör-ovális" és a „3-lila-tömör-hullámos", akkor tudjuk, hogy a „2-zöld-tömör-rombusz" a SET 3. tagja. Így kiszámolhatjuk, hogy a játék 81 kártyalapja között összesen $\frac{\binom{81}{2}}{\binom{3}{2}} = 1080$ SET van[2].

Ezután vegyük azokat a SET-eket, amelyeknek Andihoz és Borihoz került legalább egy tagja. (Értelemszerűen vagy 2 lap van Andinál és 1 lap Borinál a SET-ből, vagy fordítva.)

Mivel az Andinál lévő 40 lap közül mindnek van közös SET-je a Borinál levő 41 lap mindegyikével, ez összesen $40 \cdot 41 = 1640$ SET lenne. De így mindet kétszer számoltuk, mert ha például h_1, h_2 és h_3 lapok egy SET-et alkotnak, és közülük h_1 és h_2 Andinál, h_3 pedig Borinál van, akkor ezt a SET-et számoltuk a $\{h_1, h_3\}$ és $\{h_2, h_3\}$ párokra is.

Így ha mindketten megszámolják, hogy a náluk lévő kártyák között hány olyan hármas van, amely SET-et alkot, az így kapott darabszámok összege:

$$1080 - \frac{40 \cdot 41}{2} = 260.$$

Feczkó Nóra (Budapest, Budai Ciszterci Szent Imre Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Képzeljük úgy, hogy kezdetben Borinál volt az összes kártya, majd sorban egyesével adott ezek közül 40-et Andinak.

Lemma. *Amikor az n-edik kártyát* ($1 \leqslant n \leqslant 40$) *adja át Bori Andinak, akkor azon SET-ek száma, amelyek mindhárom lapja ugyanazon kézben van, pontosan* $(41-n)$*-nel csökken* (*függetlenül attól, hogy melyik lapot adja Bori Andinak*).

[1] `https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml`.

[2] Az eddig elmondottak bizonyítással együtt szerepeltek a feladatban is belinkelt `https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml` cikkben is.

A lemma bizonyításához felhasználjuk a következő tényt: Ha egy lapot kiveszünk a pakliból, a maradék 80 lap párokba rendezhető úgy, hogy a kivett lap éppen egy-egy ilyen párral együtt alkot SET-et, más SET-ben pedig nincsen benne. (Lásd: `https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml` cikk 3. pont.)

A lemma bizonyítása. Amikor egy kártyát átad Bori Andinak, az ehhez a kártyához tartozó párok közül néhány pár már egészen Andinál van (ezekből egy-egy új, egy kézben levő SET keletkezik), néhány pár pedig még egészen Borinál maradt (ezeknél elveszik egy-egy eddig egy kézben levő SET); míg a többi pár két tagja külön kézben van, ezek nem befolyásolják a SET-ek számának változását.

Most tekintsük az n-edik kártya átadásának pillanatát és az ehhez a kártyához tartozó párokat. Ha ekkor a_n olyan pár van, amely már teljesen Andinál van, akkor ezek összesen $2a_n$ helyet foglalnak el Andi kezében. Tehát $n-1-2a_n$ olyan kártya van Andi kezében, amelynek a párja Borinál van. Bori kezében marad $81-n$ lap, ezek közül tehát $n-1-2a_n$ darabnak Andinál van a párja, így a maradék $(81-n)-(n-1-2a_n)=82+2a_n-2n$ darab kártya összesen $b_n=41+a_n-n$ olyan párt fog alkotni, amelyek teljesen Borinál maradtak. Így az egy kézben levő SET-ek száma valóban $b_n-a_n=(41+a_n-n)-a_n=41-n$ darabbal csökken. □

Így, mivel kezdetben mind az 1080 db SET Bori kezében volt, a 40. lap átadása után az egy kézben levő SET-ek száma:

$$1080-(40+39+\ldots+1)=1080-\frac{40\cdot 41}{2}=260.$$

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

III. megoldás (vázlat). Nevezzük *közel egyenlő elosztásnak* azokat a kártyakiosztásokat, amelyekben egyik lánynál 41, a másik lánynál 40 lap van. Ha egy közel egyenlő állásnál a 41 lapos játékos átad egy kártyát a 40 laposnak – ezt nevezzük *átbillentő lépésnek* – akkor egy másik közel egyenlő kártyakiosztást kapunk. A harmadik megoldás a következő két észrevételre épül:

1. Egy átbillentő lépés hatására nem változik az egy kézben levő SET-ek száma (ez lényegében az előző megoldás lemmájának speciális esete $n=41$ esetén).
2. Egy közel egyenlő elosztásból indulva bármelyik másik közel egyenlő kiosztásba el lehet jutni átbillentő lépések sorozatával.

Ezen két észrevétel belátása után már elegendő egy általunk konkrétan kiválasztott közel egyenlő elosztásban megszámolnunk a SET-ek számát.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) és *Győrffy Ádám György* (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.) megoldásának felhasználásával

74 dolgozat érkezett. 6 pontos 58, 5 pontos 8, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 0 pontos 2 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.