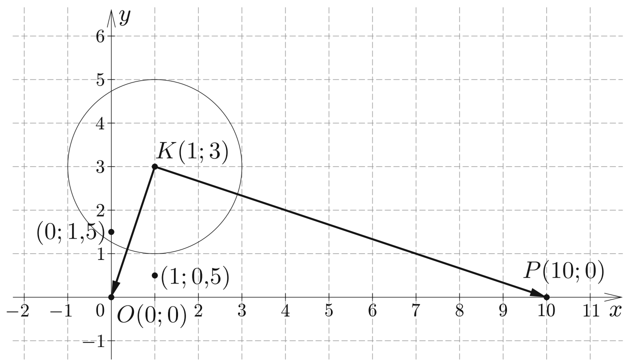
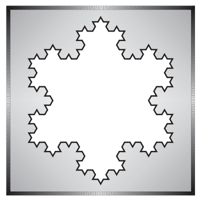
c) Kiszámítjuk a vektorok koordinátáit: $\overrightarrow{KO}(-1;-3)$ és $\overrightarrow{KP}(9;-3)$; majd képezzük a két vektor skaláris szorzatát: $\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{KP}=(-1)\cdot 9+(-3)\cdot(-3)=0$. Ebből következik, hogy a vektorok derékszöget zárnak be egymással.



Mihályi Gyula
Székesfehérvár



C gyakorlatok megoldása

C. 1627. *Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor $a>0$, $b>0$ és $c>0$.*

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Az egyenlőtlenségekben szereplő kifejezések szimmetrikusak, így elnevezés szempontjából felcserélhetők. Tegyük fel, hogy az a, b, c valós számokra teljesül, hogy

$$a+b+c>0, \tag{1}$$

$$ab+bc+ca>0, \tag{2}$$

$$abc>0. \tag{3}$$

A (3) egyenlőtlenségből következik, hogy a, b, c egyike sem lehet 0, hiszen ekkor a szorzat is 0 lenne. Az $abc>0$ feltétel két esetben teljesülhet: ha az a, b, c számok mindegyike pozitív, vagy ha közöttük két negatív és egy pozitív szám van.

Ha mindhárom szám pozitív, akkor tekintve, hogy pozitív számok szorzata és összege is pozitív, az egyenlőtlenségek teljesülnek.

Indirekt tegyük fel, hogy a, b, c közül kettő negatív, egy pozitív és a fenti három egyenlőtlenség teljesül. Több módon is ellentmondásra juthatunk.

I. megoldás. Mivel a betűk szerepe szimmetrikus, legyen $a>0$ és $b,c<0$.

Az $a+b+c>0$ állítás akkor teljesül, ha $|a|>|b|+|c|$, ebből viszont az következik, hogy $|a|>|b|$ és $|a|>|c|$. Az $a>0$ és $b,c<0$ feltételek miatt $ab<0, bc>0$ és $ca<0$. Ennek alapján az $ab+bc+ca>0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $|bc|>|ab|+|ca|$.

Mivel $|a|>|c|$, ezért $|ab|>|bc|$, és $|a|>|b|$ miatt $|ac|>|bc|$. Adjuk össze az $|ab|>|bc|$ és $|ac|>|bc|$ egyenlőtlenségeket, így kapjuk az $|ab|+|ac|>2|bc|$ kifejezést. Csökkentve a jobb oldalt az $|ab|+|ac|>|bc|$ egyenlőtlenségre jutunk. Vagyis ha $b,c<0$ és $a>0$, akkor $ab+bc+ca<0$. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Antal Sára (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az ismeretlenek szimmetrikussága okán feltehető, hogy a és b negatív, c pedig pozitív. Tegyük fel, hogy a fenti egyenlőtlenségek teljesülnek.

Az $ab+bc+ca>0$ feltételt írjuk $b(a+c)+ca>0$ alakba. Látható, hogy $ac<0$, hiszen feltevésünk szerint $a<0$ és $c>0$. Az (1) feltétel átrendezhető $a+c>(-b)$ alakba. Mivel feltevésünk szerint $b<0$ és az egyenlőtlenségek teljesülnek, így a jobb oldal pozitív, s ennek okán a bal oldal is.

Viszont ha $a+c>0$, $b,c<0$ és $a>0$, akkor $b(a+c)<0$ és $ac<0$, ezért $b(a+c)+ac<0$, ami ellentmond kezdeti feltevésünknek.

Mivel ellentmondásra jutottunk, így a, b, c közül nem lehet egyszerre kettő negatív. Ha a fenti egyenlőtlenségek fennállnak, a, b, c között nem lehet sem egy, sem kettő, sem három negatív szám és egyikük sem lehet 0, így mindegyik csak pozitív lehet.

Farkas Orsolya (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. A feladat a $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ valós együtthatós polinom, a, b, c valós gyökeinek vizsgálatával is megoldható. A szorzásokat elvégezve látható a gyökök és együtthatók közötti összefüggés:

$$p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Tegyük fel, hogy az a,b,c számokra megadott egyenlőtlenségek teljesülnek, és vizsgáljuk meg a $p(x)$ polinom $x\leqslant 0$ helyeken vett helyettesítési értékeit. Ekkor $p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc<0$, hiszen a bal oldal első három tagja nem pozitív, a konstans tag pedig negatív, így az a, b, c gyökök valóban csak pozitívak lehetnek.

Megjegyzés. Az I. megoldás kulcsgondolata: ha a, b, c közül 2 negatív, például a és b, akkor $c>-a-b$ kell legyen, hogy az $a+b+c>0$ egyenlőtlenség teljesüljön. Ez a felismerés egy másik megoldásra is lehetőséget nyit. Fontos megjegyezni, hogy $c>-a-b$ jobb oldala pozitív, hiszen feltettük, hogy $a,b<0$. Célszerű erre az $a=-A$, $b=-B$ jelöléseket bevezetni, ekkor A, B, c pozitívak. Az $ab+bc+ca>0$ egyenlőtlenség így átírható $AB>Ac+Bc=(A+B)c$ alakba; $c>A+B$ felhasználásával

$$AB>(A+B)^2=A^2+B^2+2AB,$$

ebből pedig $0>A^2+B^2+AB>0$ következik, ami ellentmondás.

Szabó Attila József, javító

254 dolgozat érkezett. 5 pontos 125, 4 pontos 31, 3 pontos 24, 2 pontos 27, 1 pontos 11, 0 pontos 12 dolgozat. Nem versenyszerű: 21 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 3 dolgozat.

C. 1650. *Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget, ahol $a,b,c>1$:*

$$\log_{ab} c \leqslant \frac{\log_a c + \log_b c}{4}.$$

Megoldás. Alakítsuk az egyenlőtlenséget, felhasználva a logaritmus azonosságait:

$$4\log_{ab} c \leqslant \log_a c + \log_b c,$$

$$4\cdot\frac{1}{\log_c ab} \leqslant \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b},$$

$$\frac{4}{\log_c a + \log_c b} \leqslant \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b}.$$

Mivel a-ról, b-ről és c-ről tudjuk, hogy mind 1-nél nagyobbak, ezért nem lehet egyik nevező se 0, sőt mindegyik pozitív. Legyen $x=\log_c a$ és $y=\log_c b$. Ekkor az egyenlőtlenség így néz ki:

$$\frac{4}{x+y} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Szorozzunk be a pozitív nevezőkkel, majd alakítsuk tovább az egyenlőtlenséget:

$$4xy \leqslant x^2+2xy+y^2,$$

$$0 \leqslant x^2-2xy+y^2,$$

$$0 \leqslant (x-y)^2.$$

Ez természetesen igaz, hiszen egy szám négyzete sosem negatív, mindig pozitív vagy 0.

Tehát ekvivalens lépésekkel nyilvánvalóan igaz állításhoz jutottunk, ezért a bizonyítandó állítás is igaz.

Szalanics Tamás (Nyíregyháza, Szent Imre Kat. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Nagyon gyakori volt, hogy a megoldó nem indokolta azt, hogy valamelyik logaritmikus kifejezéssel osztva vagy szorozva az egyenlőtlenséget, a relációs jel nem fordul meg a logaritmikus kifejezés pozitivitása miatt.

46 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 17 versenyző: Albert Ákos, Andó Lujza, Baksay Réka, Biró Ádám, Bodrogi Éva, Dobi Dorina Lili, Duska Máté, Egyházi Hanna, Fekete András Albert, Flódung Áron, Horváth Antal, HyunBin Yoo, Lénárt Réka, Molnár Réka, Németh László Csaba, Szalanics Tamás, Xu Yiling. 4 pontos 19, 3 pontos 6, 2 pontos 2, 1 pontos 2 dolgozat.