Megoldásvázlatok a 2021/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Hány megoldása van az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenségnek?*

$$\left|1-\frac{x-1}{x}\right|>\frac{1}{2021}. \qquad (3\ pont)$$

b) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\log_2 x+\log_4 x-2\log_8 x=\frac{5}{3}. \qquad (3\ pont)$$

c) Határozzuk meg azokat az x, y és z valós számokat, amelyekre:

$$12x^2+15y^2+4z^2-12xy-12yz-8z+16=0. \qquad (6\ pont)$$

Megoldás. *a*) Az abszolút érték jelen belüli kifejezést átalakítva kapjuk: $\left|\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{2021}$, ahol $x\neq 0$. Ebből az következik, hogy $|x|<2021$, vagyis $-2020\leqslant x\leqslant 2020$, aminek 4040 egész szám felel meg, mivel $x=0$-ra nincs értelmezve az eredeti kifejezés.

b) Az x csak pozitív lehet. Áttérve 2-es alapú logaritmusra:

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{2}{3}\log_2 x=\frac{5}{3},$$

amiből következik, hogy

$$\log_2 x\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{5}{6}\log_2 x=\frac{5}{3},$$

azaz $\log_2 x=2$.

Így $x=4$ a megoldás.

c) Alkalmasan csoportosítva, majd kiemeléssel teljes négyzeteket alakíthatunk ki:

$$\begin{aligned}(12x^2-12xy+3y^2)+(12y^2-12yz+3z^2)+(z^2-8z+16)=0 &\iff\\ 3(4x^2-4xy+y^2)+3(4y^2-4yz+z^2)+(z^2-8z+16)=0 &\iff\\ 3(2x-y)^2+3(2y-z)^2+(z-4)^2=0.&\end{aligned}$$

A négyzetek összege akkor és csakis akkor nulla, ha minden tag nulla, így $2x=y$, $2y=z$ és $z=4$.

Az egyenlet megoldása tehát: $x=1$, $y=2$, $z=4$.

2. *a*) *Igazoljuk, hogy* $\log_{2020} 2021$ *irracionális szám.* (*4 pont*)

b) *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\cos 2x + \cos \frac{3}{5}x = 2. \qquad (6\ pont)$$

c) *A következő két állításról döntsük el, hogy igaz vagy hamis. Válaszunkat indokoljuk.* (*4 pont*)

I. *Van olyan* 6 *csúcsú nem összefüggő egyszerű gráf, amelyiknek minden csúcsa másodfokú.*

II. *Ha egy* 6 *csúcsú összefüggő egyszerű gráfban a fokszámok* $1, 1, 1, 3, 3, 3$, *akkor a gráfban biztosan van kör.*

Megoldás. *a*) Indirekt bizonyítással igazoljuk (*reductio ad absurdum*):

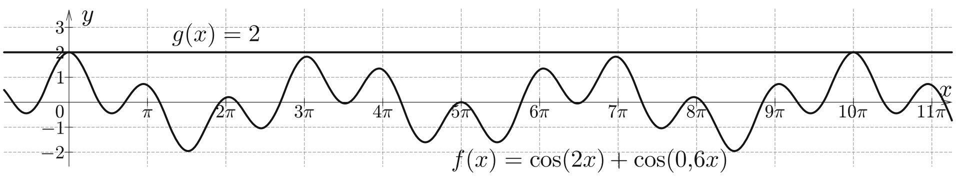
Tegyük fel az igazolandó állítás tagadását, vagyis azt, hogy $\log_{2020} 2021$ racionális szám. Ha ez igaz lenne, akkor léteznének p és q pozitív egész számok úgy, hogy $\log_{2020} 2021 = \frac{p}{q}$, ahonnan $2021 = 2020^{\frac{p}{q}}$, ami ekvivalens azzal, hogy $2021^q = 2020^p$, ami lehetetlen, mert az egyik szám páratlan, a másik páros.

Ellentmondásra jutottunk, ezzel bizonyítottá vált, hogy $\log_{2020} 2021$ irracionális szám.

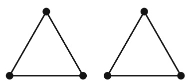
b) Mivel a koszinuszfüggvény értéke legfeljebb 1, a $\cos 2x + \cos \frac{3}{5}x = 2$ egyenlet csak olyan x értékekre teljesül, amelyekre egyszerre fennáll a $\cos 2x = 1$ és a $\cos \frac{3}{5}x = 1$ egyenlőség is.

Az első egyenletből $2x_1 = 2k\pi$, azaz $x_1 = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. A második egyenletből $\frac{3}{5}x_2 = 2n\pi$, azaz $x_2 = \frac{10}{3}n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. A gyökök akkor lesznek egyenlőek, ha $k\pi = \frac{10}{3}n\pi$, vagyis $3k = 10n$. Ha m tetszőleges egész, az utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha $k = 10m$, $n = 3m$, és így az eredeti egyenlet megoldása $x = 10m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Megjegyzés. A függvényt ábrázolva:



c) I. *Igaz.* Van ilyen gráf:



II. *Igaz.* A fokszámok összege 12, amiből az következik, hogy a gráfnak 6 éle van, egy 6 csúcsú fának pedig csak 5 éle van. Tehát a gráf nem lehet fa, tartalmaznia kell kört.

3. *Evelin minden nap iszik egy kávét vagy egy teát. Ha tegnap kávét ivott, akkor* 0,3 *valószínűséggel iszik ma is. Ha teát ivott tegnap, akkor* 0,6 *valószínűséggel ma kávét iszik.*

a) Ha Evelin tegnap kávét ivott, mekkora a valószínűsége, hogy holnap teát iszik? (*4 pont*)

b) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik kávét? (*7 pont*)

c) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik teát? (*2 pont*)

Megoldás. Evelin egy adott napon $P(K)$ valószínűséggel kávét, $P(T)$ valószínűséggel teát iszik, és mivel minden nap iszik kávét vagy teát, ezért $P(T) = 1 - P(K)$. Az érthetőség kedvéért indexeljünk: $P(K_{n+1} \mid K_n)$ jelölje a következő valószínűséget: feltéve, hogy egy adott napon kávét ivott, akkor a rákövetkező napon is kávét iszik. (Világos, hogy $P(K_{n+2}) = P(K_{n+1}) = P(K_n) = P(K)$ és $P(T_{n+2}) = P(T_{n+1}) = P(T_n) = P(T)$.) A feladat szerint $P(K_{n+1} \mid K_n) = 0{,}3$, amiből az következik, hogy $P(T_{n+1} \mid K_n) = 0{,}7$ (vagyis 0,7 valószínűséggel iszik ma teát, ha tegnap kávét ivott). Ugyanezt a jelölést alkalmazva a feladat szerint $P(K_{n+1} \mid T_n) = 0{,}6$, amiből pedig az következik, hogy $P(T_{n+1} \mid T_n) = 0{,}4$.

a) Ha tegnap kávét ivott *és* holnap teát iszik, az úgy lehet, hogy ma teát ivott, feltéve, hogy tegnap kávét ivott, *vagy* ma kávét ivott, feltéve, hogy tegnap is kávét ivott, vagyis a keresett valószínűség:

$$P(T_{n+2} \mid K_n) =$$
$$= P(T_{n+1} \mid K_n) \cdot P(T_{n+2} \mid T_{n+1}) + P(K_{n+1} \mid K_n) \cdot P(T_{n+2} \mid K_{n+1}) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 07 = 0{,}49.$$

b) Tegnap kávét ivott $P(K)$ valószínűséggel vagy teát $P(T)$ valószínűséggel. Hogy ma kávét igyon, ahhoz az kell, hogy feltéve, hogy tegnap kávét ivott, akkor ma is kávét igyon, *vagy* ma kávét igyon, feltéve, hogy tegnap teát ivott: $P(K) = P(K_n) \cdot P(K_{n+1} \mid K_n) + P(T_n) \cdot P(K_{n+1} \mid T_n)$. Beírva ebbe az egyenletbe a valószínűségeket és a $P(K)$ és $P(T)$ közötti összefüggést, azt kapjuk, hogy $P(K) = P(K) \cdot 0{,}3 + \left[1 - P(K)\right] \cdot 0{,}6$. Ebből a keresett valószínűség $P(K) = \frac{6}{13} \approx 0{,}462$, azaz Evelin hosszú távon a napok 46,2%-ában iszik kávét.

c) $P(T) = 1 - P(K) = 1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13} \approx 0{,}538$, ami azt jelenti, hogy hosszú távon Evelin a napok 53,8%-ában teát iszik.

4. *Egy n oldalú szabályos sokszög alapú egyenes hasáb magassága és alaplapjának az oldalai is* 1 cm*-esek.*

a) Ha a hasáb lapátlóinak és testátlóinak összege 6960*, akkor hány csúcsa van az alaplapját képező szabályos n-szögnek?* (*5 pont*)

b) Mekkora ennek a hasábnak a felszíne és a térfogata? (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Az n oldalú szabályos sokszög átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Így a hasáb alap- és fedőlapján összesen $n(n-3)$ átló van.

A hasáb oldallapjai négyzetek, ezek átlóinak a száma összesen $2n$. A hasáb testátlóinak a száma ugyancsak $n(n-3)$. Tehát az összes átló

$$n(n-3) + 2n + n(n-3) = 6960,$$

amiből a műveletek elvégzése és rendezés után a következő egyenletet kapjuk: $n^2 - 2n - 3480 = 0$. A másodfokú egyenlet megoldásai: $n_1 = 60$, $n_2 = -58$. Az n_2 negatív szám, így nyilvánvalóan nem lehet megoldás, tehát $n_1 = 60$ a jó megoldás. Így a szabályos sokszögnek 60 oldala van.

b) A hasáb alapját alkotó szabályos 60-szöget 60 darab olyan egyenlő szárú háromszögre tudjuk bontani, amelyek mindegyikének az alapja a szabályos sokszög egy-egy oldala, szárai pedig a szabályos sokszög köré írható kör sugarai és szárszöge $\frac{360°}{60} = 6°$. Egy ilyen háromszög magassága $\frac{0{,}5}{\operatorname{tg} 3°}$, így az alaplap területe:

$$T = 60 \cdot \frac{1 \cdot \frac{0{,}5}{\operatorname{tg} 3°}}{2} \approx 286{,}217 \ (\mathrm{cm}^2).$$

A felszínt az alap és a fedőlap, valamint a 60 db 1 cm oldalú négyzet alkotja, ezek területének az összege adja a felszínt: $2 \cdot 286{,}217 + 60 \cdot 1 = 632{,}434$ (cm^2).

A hasáb magassága $h = 1$ cm, így a térfogata

$$V = T \cdot h \approx 286{,}217 \cdot 1 = 286{,}217 \ (\mathrm{cm}^3).$$

II. rész

5. *a*) *Adjuk meg az $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény legbővebb értelmezési tartományát.* (*1 pont*)

b) *Mennyi az $f(x)$ függvény határértéke + végtelenben, azaz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =$?* (*3 pont*)

c) *Mennyi az $f(x)$ függvény maximuma a $[0;2]$ intervallumon, és ezt hol veszi fel?* (*6 pont*)

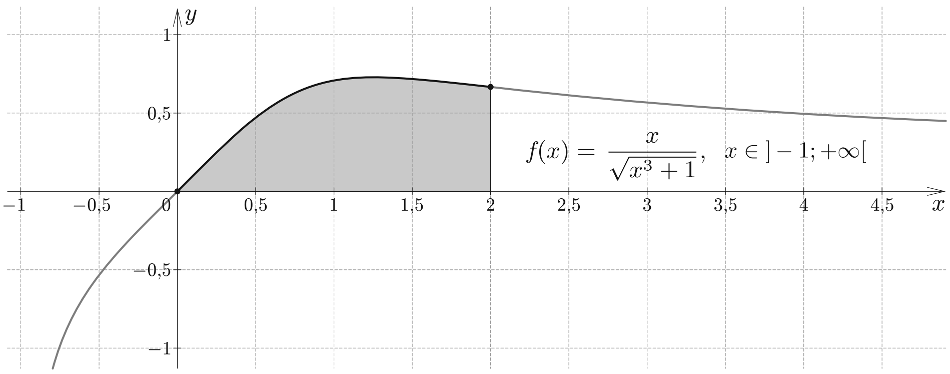
d) *Számítsuk ki a következő határozott integrál értékét:*

$$\int_0^2 (x^3+1) f^2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3\ pont)$$

e) *Mennyi annak a „serleg" alakú testnek a térfogata, mely testet úgy kapjuk meg, hogy az $f(x)$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon vett grafikonját az x tengely körül megforgatjuk? (Természetesen a nyak feletti részről van szó és az egység legyen* 1 cm. *A kép csak illusztráció.)* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) A nevezőben levő négyzetgyök miatt (x^3+1) csak pozitív lehet, vagyis $x^3 > -1$. Így az értelmezési tartomány: $]-1;+\infty[$.

Megjegyzés. A függvény grafikonja:



$$b) \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{x^2}}} = 0,$$

mivel

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

c) Az $f(x)$ függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a deriváltja zérus:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)' = \frac{1\cdot\sqrt{x^3+1} - x\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} = 0.$$

Ez akkor valósulhat meg, ha a számláló nulla (és a nevező ugyanekkor nem nulla), vagyis:

$$\sqrt{x^3+1} = \frac{3x^3}{2\sqrt{x^3+1}},$$

ami akkor teljesül, ha $2(x^3+1) = 3x^3$, azaz $x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}2599$. Az itt felvett érték:

$$f\left(\sqrt[3]{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\frac{4}{27}} \approx 0{,}7274.$$

Ahhoz, hogy valóban szélsőértékről van szó, nézzük meg, megvalósul-e a deriváltfüggvény előjelváltása ezen a helyen. Ehhez az $f'(x)$ számlálóját közös nevezőre hozással majd az emeletes tört eltüntetésével alakítsuk át:

$$f'(x) = \frac{1\cdot\sqrt{x^3+1} - x\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} = \frac{\frac{2(x^3+1)-3x^3}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1} = \frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(*Megjegyzés:* Ebből az alakból is kiolvasható az előbbi zérushely értéke.)

Foglaljuk táblázatba a függvény viselkedését a $[0;2]$ intervallumon:

x	0	$0<x<\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}<x<2$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\uparrow$ szigorúan monoton növekszik	maximum: $\sqrt[6]{\frac{4}{27}}\approx 0{,}7274$	$\downarrow$ szigorúan monoton csökken	$\frac{2}{3}\approx 0{,}6667$

d)

$$\int_0^2 (x^3+1)f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2 (x^3+1)\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{8}{3}.$$

e) A keresett forgástest térfogata cm^3-ben:

$$V=\pi\int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\int_0^2\frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\big[\ln(x^3+1)\big]_0^2=$$

$$=\frac{\pi}{3}\ln 9\approx 2{,}3009.$$

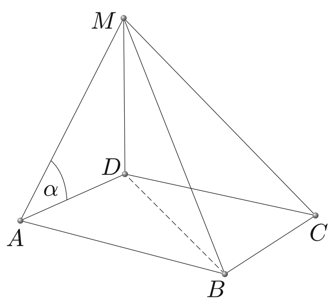
6. *Emeljünk egy merőleges szakaszt az $ABCD$ téglalap síkjára a D pontban úgy, hogy a szakasz másik végpontjára, M-re igazak a következők: $MA=12\sqrt{2}$, $MB=4\sqrt{34}$, $MC=20$.*

Ha a hosszúságokat centiméterben mérjük, számítsuk ki:

a) a téglalap oldalainak hosszát; *(7 pont)*

b) az MAB háromszög síkjának az $ABCD$ téglalap síkjával bezárt szögét; *(6 pont)*

c) az $ABCDM$ test térfogatát. *(3 pont)*



Megoldás. *a*) Legyen $AD=a$, $DC=b$ és $MD=h$. Ekkor Pitagorasz tétele alapján a téglalap átlójára teljesül, hogy $BD^2=a^2+b^2$ és az MDA, MDB, valamint az MDC derékszögű háromszögekben is rendre igaz, hogy:

$$MA^2=AD^2+MD^2,\quad MB^2=BD^2+MD^2$$

és

$$MC^2=CD^2+MD^2.$$

Tehát a megadott hosszúságadatokkal:

$$288 = a^2 + h^2, \tag{1}$$

$$544 = a^2 + b^2 + h^2, \tag{2}$$

$$400 = b^2 + h^2. \tag{3}$$

Innen (1) + (3) alapján: $288 + 400 = a^2 + b^2 + 2h^2$; felhasználva a (2) összefüggésből adódó $a^2 + b^2 = 544 - h^2$ egyenlőséget, következik, hogy $h^2 = 144$, azaz $h = 12$. $DM = h$ ismeretében már egyszerűen kiszámíthatók a téglalap oldalai: $AD = a = 12$ (cm), $DC = b = 16$ (cm).

b) Az MAB háromszög síkjának az $ABCD$ téglalap síkjával való metszésvonala AB, amelyre AD és MD egyaránt merőleges. A két sík hajlásszöge megegyezik az MAD derékszögű háromszög A-nál lévő szögével (α), így ebben a háromszögben

$$\sin\alpha = \frac{MD}{MA} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből adódik, hogy a keresett hajlásszög $\alpha = 45°$.

c) A téglalap alapú gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot h}{3} = \frac{a \cdot b \cdot h}{3} = \frac{12 \cdot 16 \cdot 12}{3} = 768 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

7. *Képzeljük el, hogy a* 2025*-ös évben vagyunk.* Pénzügytudatos Patrik *pontosan öt évvel ezelőtt,* 2020*-ban egy nagyobb összeghez jutott és azzal a céllal vásárolt ebből* 10 *millió forintért egy államkötvényt (vagyis befektette a pénzét), hogy az öt éves futamidő leteltével, amikor felveszi a kamatokkal megnövelt összeget, azt felhasználja lakásvásárlásra.*

a) *Öt év elteltével mekkora lett a kamatokkal növelt összeg, ha a kamat számítása a következők szerint történik? Az öt éves futamidőt hat kamatozási periódusra osztották, és az egyes időszakaszokban változó mértékű kamatlábat állapítottak meg. Az első félévben az éves kamat* 3,50% (*vagyis félévre* 1,75%)*, a második félévre az éves kamat* 4,00% (*vagyis erre a félévre* 2%)*. A második évtől kezdve már egész évente változik a kamat és ezen belül egész évre vonatkozóan ugyanakkora mértékű: a második évre* 4,50%*, a harmadikra* 5,00%*, a negyedikre* 5,50%*, végül az ötödikre* 6,00%*. Lényeges továbbá, hogy az egy-egy kamatozási periódus végén létrejött, a névérték kamattal megnövelt összege képezi a következő kamatperiódus során a kamatszámítás alapját* (*kamatos kamat*). (*5 pont*)

b) *Pénzügytudatos Patrik házastársa is rendelkezik egy öt éves futamidejű, hasonló névértékű, de fix kamatozású állampapírral, melynek az éves kamata* 5% *és ez is éppen* 2025*-ben jár le. Ezen kívül a házaspár kap az államtól* 10 *millió forint vissza nem térítendő családalapítási támogatást. Ezt a három forrást felhasználva százezresekre kerekítve mekkora összegből tud a házaspár lakást vásárolni?* (*5 pont*)

c) *Pénzügytudatosék mellett másik három baráti házaspár is lakást vásárol, mégpedig valamennyien egy új építésű lakóparkban, amely a* 10 *lakásos „Zöld Ház"-ból és a* 20 *lakásos „Fehér Ház"-ból áll. A beruházó a viták elkerülése végett sorsolással dönt arról, hogy a* 30 *lakás közül melyiknek melyik család legyen a tulajdonosa.*

A sorsolásnál ügyelnek arra, hogy bármelyik lakáshoz ugyanakkora eséllyel lehessen hozzájutni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négy házaspár közül kettő a „Zöld Ház”-ba, a másik kettő pedig a „Fehér Ház”-ba költözhet? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az öt éves futamidő végén kapott összeg (forintra kerekítve):

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}055 \cdot 1{,}06 = 12\,734\,986{,}94 \approx 12\,734\,987 \text{ Ft.}$$

b) Éves 5%-os fix kamatlábbal és kamatos kamattal számolva:

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}05^5 = 12\,762\,815{,}63 \approx 12\,762\,816 \text{ Ft.}$$

A három forrás összege: $12\,734\,987 + 12\,762\,816 + 10\,000\,000 = 35\,497\,803$, ami százezresekre kerekítve 35 500 000 Ft. Ekkora összegből tud a Pénzügytudatos-házaspár lakást vásárolni.

c) Az összes eset száma: $n = \binom{30}{4}$, a kedvező esetek száma: $k = \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{2}$. Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{30}{4}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2} \cdot \frac{20\cdot 19}{2}}{\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = 0{,}312.$$

8. *a*) *Adott az* $\{x_n\}$ *valós számsorozat, ahol* $x_1 = \sqrt{2}$ *és* $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, *ha* $n \geqslant 1$. *Igazoljuk, hogy az* $\{x_n\}$ *sorozat konvergens és határozzuk meg* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *értékét.* (*7 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy ha az* x *és* y *pozitív számok összege* 2, *akkor*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4. \qquad (5 \text{ pont})$$

Forrás:
`https://varlexikon.hu/varpalota`

Egy négyzet alakú várban a csúcsoknál egy-egy torony áll, az Északi Torony (E), *a Keleti Torony* (K), *a Déli Torony* (D) *és a Nyugati Torony* (N). *Őrségben a várfal tetején lévő négy falszakaszon sétálnak a várőrök. Az Északi Toronyban lévő őrszobából indulnak és toronytól toronyig haladva az* EK, KD, DN *és* NE *közül mindig pontosan hat falszakaszon haladnak végig egy őrjárat során. (Értelemszerűen egy falszakasz többször is szerepelhet egy őrjárat során, például akkor, ha a következő toronynál egyből visszafordul a várőr.)*

c) *Legfeljebb hány tagú a várőrség, ha mindegyikük különböző útvonalon sétált? (Az őrjáratnak nem kell feltétlenül az Északi Toronynál végződnie. Két útvonalat nem tekintünk különbözőnek, ha ugyanazokat a falszakaszokat tartalmazza ugyanabban a sorrendben.)* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Bebizonyítjuk, hogy a sorozat korlátos és szigorúan monoton, ebből már következik a konvergenciája.

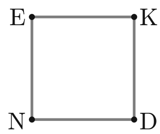
A teljes indukció módszerével igazoljuk, hogy a sorozat minden tagjára igaz: $0 < x_n < 2$. Ha $n = 1$, akkor $x_1 = \sqrt{2}$, melyre igaz. Tegyük fel, hogy $0 < x_n < 2$. Ekkor $0 \leqslant x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$, tehát a sorozat korlátos.

A továbbiakban azt igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő: $x_{n+1} > x_n$, vagyis $\sqrt{2 + x_n} > x_n$. Ez az állítás ekvivalens azzal, hogy $x_n^2 - x_n - 2 <$ < 0, szorzattá alakítva: $(x_n - 2) \cdot (x_n + 1) < 0$, ami valóban igaz, mivel az előzőekben igazoltuk, hogy $0 < x_n < 2$. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens.

Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor $a = \sqrt{2 + a}$, ahonnan $a^2 - a - 2 = 0$, a másodfokú egyenlet gyökei $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Mivel $0 < a \leqslant 2$, az következik, hogy $a = 2$, vagyis a sorozat határértéke 2.

b) Ekvivalens átalakításokat végzünk a zárójelek felbontásával majd xy-al való beszorzással: $xy + x + y + 1 \geqslant 4xy$. Mindkét oldalból kivonunk xy-t és felhasználjuk, hogy $x + y = 2$, az $xy \leqslant 1$ egyenlőtlenségre jutunk. Ez teljesül, hiszen a két számra vonatkozó számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenségből következik:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$



c) Összeszámoljuk a lehetséges járőr-útvonalakat. Az Északi Toronyból (E) indulva két falszakasz közül lehet választani (EK vagy EN), így eddig a lehetséges útvonalak száma 2. A következő toronynál megint két falszakasz közül lehet választani, így $2 \cdot 2 = 4$ a különböző útvonalak száma két kiválasztott falszakasz után.

Hasonlóan folytatva a hat falszakaszon megtett őrjárat (séta) után

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

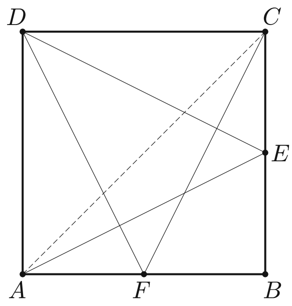
különböző útvonal van. Tehát legfeljebb 64 tagú a várőrség.

9. *a*) *Egy egységoldalú négyzet belsejében és oldalain lévő pontok mindegyikét kiszíneztük két szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy létezik két egyszínű pont, amelyek legalább* $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *távolságra vannak egymástól.* (*6 pont*)

b) *A* $K(1;3)$ *középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében melyek azok a pontok, amelyeknek a koordinátái a következő egyenletrendszer gyökei?*

$$2^x + 2^{y-\frac{1}{2}} = 3,$$
$$16x^2 - 16xy + 4y^2 = 9.$$
(*8 pont*)

c) *Mekkora szöget zár be egymással az a két vektor, amelyek közös kezdőpontja a* $K(1;3)$ *pont, és az egyik az origóba, a másik pedig a* $P(10;0)$ *pontba mutat?*
(*2 pont*)



Megoldás. *a*) Az $ABCD$ egységoldalú négyzetben a BC oldal felezőpontja legyen E, az AB oldal felezőpontja pedig F.

Ekkor $AE=ED=DF=FC=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ha az A és E pontok azonos színűek, akkor máris létezik két olyan pont, amelyek egymástól való távolsága éppen $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ha nem így van, akkor különböző színűek, az A az egyik szín, mondjuk piros, E pedig a másik szín, mondjuk kék. (Fordított esetben teljesen hasonló módon gondolhatjuk végig a továbbiakat, csak a színeket kell felcserélni.)

Hasonlóan gondolkodva következik, hogy D piros, majd F kék, és ha pedig C kék, akkor a megfelelő pontok F és C, ha viszont C piros, akkor a megfelelő pontok C és A, hiszen a négyzet átlója $AC=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{4}$.

b) A második egyenletet 4-gyel osztva a bal oldalon kapott kifejezés teljes négyzetté alakítható: $(2x-y)^2=\frac{9}{4}$, amiből a

$$2x-y=\pm\frac{3}{2}$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $y=2x+\frac{3}{2}$, vagy $y=2x-\frac{3}{2}$.

Ha $y=2x+\frac{3}{2}$, akkor az első egyenletbe való behelyettesítés után a

$$2^x+2^{2x+1}-3=0$$

egyenletet kapjuk. Ez 2^x-ben másodfokú:

$$2\cdot\left(2^x\right)^2+2^x-3=0,$$

amelynek a gyökei 1 és $-\frac{3}{2}$. Mivel $2^x>0$, valós megoldás csak a $2^x=1$-ből adódik, vagyis $x=0$. Mivel $y=2x+\frac{3}{2}$, így $y=\frac{3}{2}$.

Ha $y=2x-\frac{3}{2}$, akkor az előzőekhez hasonlóan a

$$2^x+2^{2x-2}-3=0$$

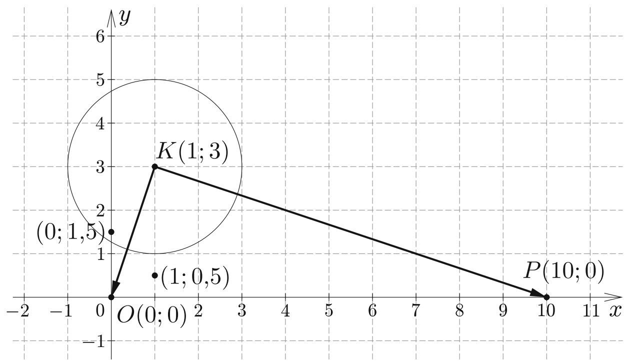
egyenlethez jutunk, vagyis a $\left(2^x\right)^2+4\cdot 2^x-12=0$, ugyancsak 2^x-ben másodfokú egyenletet kell megoldani. Ennek a gyökei 2 és -6. Itt is csak a pozitív gyök jöhet számításba. Vagyis $2^x=2$, amiből $x=1$, és $y=2x-\frac{3}{2}$ figyelembe vételével $y=\frac{1}{2}$.

Összegezve: az egyenletrendszer megoldása a $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ és az $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ számpár.

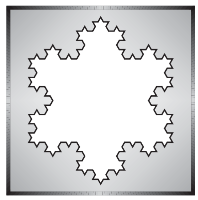
Az adott $K(1;3)$ középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében azok és csak azok a pontok vannak, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenséget: $(x-1)^2+(y-3)^2<4$.

Ennek az egyenlőtlenségnek az egyenletrendszer megoldásából adódó két számpár közül csak a $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ koordinátájú pont tesz eleget, így ez a feladat megoldása.

c) Kiszámítjuk a vektorok koordinátáit: $\overrightarrow{KO}(-1;-3)$ és $\overrightarrow{KP}(9;-3)$; majd képezzük a két vektor skaláris szorzatát: $\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{KP}=(-1)\cdot 9+(-3)\cdot(-3)=0$. Ebből következik, hogy a vektorok derékszöget zárnak be egymással.



Mihályi Gyula
Székesfehérvár



C gyakorlatok megoldása

C. 1627. *Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor $a>0$, $b>0$ és $c>0$.*

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Az egyenlőtlenségekben szereplő kifejezések szimmetrikusak, így elnevezés szempontjából felcserélhetők. Tegyük fel, hogy az a, b, c valós számokra teljesül, hogy

$$a+b+c>0, \tag{1}$$

$$ab+bc+ca>0, \tag{2}$$

$$abc>0. \tag{3}$$

A (3) egyenlőtlenségből következik, hogy a, b, c egyike sem lehet 0, hiszen ekkor a szorzat is 0 lenne. Az $abc>0$ feltétel két esetben teljesülhet: ha az a, b, c számok mindegyike pozitív, vagy ha közöttük két negatív és egy pozitív szám van.

Ha mindhárom szám pozitív, akkor tekintve, hogy pozitív számok szorzata és összege is pozitív, az egyenlőtlenségek teljesülnek.

Indirekt tegyük fel, hogy a, b, c közül kettő negatív, egy pozitív és a fenti három egyenlőtlenség teljesül. Több módon is ellentmondásra juthatunk.