2. feladat. Az 1. tétel bizonyítását általánosítva bizonyítsuk be a 2. tételt.

Feladatmegoldások

1. feladat. Írjuk föl az egyenletet t helyett $(t-1)$-re: $x_t = x_{t-1} - x_{t-2}$, majd behelyettesítjük az eredeti egyenletbe:

$$x_{t+1} = x_{t-1} - x_{t-2} - x_{t-1} = -x_{t-2}.$$

Emiatt $x_{t-2} = -x_{t-5}$, azaz $x_{t+1} = x_{t-5}$, tehát $P = 6$.

2. feladat. Bevezetjük a $\psi_t = \varphi t + \delta$ jelölést és behelyettesítjük a feltételezett (7) megoldást az (1) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$ra^{t+1}\cos(\psi_t + \varphi) = A_1 ra^t \cos\psi_t + A_2 ra^{t-1}\cos(\psi_t - \varphi).$$

Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát ra^{t-1}-nel, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$a^2[\cos\psi_t \cos\varphi - \sin\psi_t \sin\varphi] = A_1 a\ \cos\psi_t + A_2[\cos\psi_t\cos\varphi + \sin\psi_t\sin\varphi].$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nem csak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\psi_t$ együtthatója két oldalon: $-a^2\sin\varphi = A_2\sin\varphi$, amely teljesül (8) miatt. A $\cos\psi_t$ együtthatója a két oldalon: $a^2\cos\varphi = A_1 a\ + A_2\cos\varphi$, amely teljesül (9) miatt. $\square$

Hivatkozások

[1] Simonovits András: „Három népességdinamika modell," *KöMaL,* **62** (2013), 131–139.
`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201602`

[2] Simonovits András: „Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben," *KöMaL,* **65** (2016), 258–267.
`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201845`

[3] Simonovits András: *Közgazdasági modellek nemcsak középiskolásoknak,* TypoTEX, Budapest (2020).

Simonovits András

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $x - 1 \leqslant \dfrac{x^2 - x + 6}{x^2 + x - 6}$. *(6 pont)*

b) $\log_{0,5}(-x^2 + 6x - 8) \leqslant 2 + \log_{0,5} 3$. *(6 pont)*

2. A 688, 1204 és a 2021 számok ugyanannak a természetes számokból álló, 1-nél nagyobb differenciájú a_n számtani sorozatnak a tagjai.

a) Határozzuk meg az a_n sorozat differenciáját. (*4 pont*)

b) Mennyi az a_n sorozat négyjegyű tagjainak összege? (*6 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a 688, 1204 és a 2021 számok nem lehetnek ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. (*3 pont*)

3. Az óceánon egy kutatócsoportnak elromlott a hajója. Két mentőcsapat siet segítségükre. A kutatók épp derékszögben látják a két mentőhajót, amikor az egyik az $A(4;5)$ és a másik $B(5;-3)$ pontban láthatók a radaron. A koordinátarendszer egysége a valóságban 1 km.

a) A koordinátarendszer mely pontjában van a kutatóhajó, ha a három hajó által közrefogott háromszög területe a valóságban 15 km^2, és a kutatócsoport helyének abszcisszája 1. (*7 pont*)

A radaron véletlenszerűen felbukkan egy tengeralattjáró a hajók által közrefogott háromszögön belül.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a tengeralattjáró az abszcissza-tengely alatt bukkan fel? (*6 pont*)

4. Az $f(x)=2x^3-15x^2+24x+d$ harmadfokú függvény lokális minimumhelye egyben zérushelye is.

a) Határozzuk meg d értékét. (*7 pont*)

Legyen az f függvény lokális minimumhelye m, maximumhelye n.

b) Mekkora területet zár közre az x-tengely, az$x=m$, az $x=n$ egyenesek és az $y=f(x)$ egyenletű görbe? (*6 pont*)

II. rész

5. A MathCoffie Rt. 6 féle kávékeveréket gyárt (Arcusa, Binoma, Ciklona, Dodeka, Expona és Faktora). Pepi ki szeretné próbálni mindegyiket, ezért 2 dobozzal vett mindegyik fajtából. A kávékeverékek 3 különböző árkategóriában kaphatók. Az Arcusa és a Binoma I. árkategóriájú, a Ciklona és a Dodeka II. árkategóriájú, az Expona és a Faktora III. árkategóriába tartozik. A II. kategóriájú kávé ára az I. és III. kategóriájú kávék árának az átlaga. A II. és I. kategóriák árának aránya $\frac{10}{33}$-dal kisebb, mint a III. és I. kategóriák árának aránya.

a) Milyen árban vannak az egyes kávéfajták, ha Pepi a kávékért 15 480 Ft-ot fizetett? (*8 pont*)

Pepi mindegyik típusú kávéból az egyik dobozt megnyitotta, hogy megkóstolja a kávékat, majd visszazárta, így kívülről nem állapítható meg, hogy melyeket nyitotta ki. Pepi testvérei Pipi és Pepe szemet vetettek Pepi kávéjára, és véletlenszerűen elvettek a 12 dobozból két-két dobozzal.

b) Hányféleképp vihettek el két-két különböző típusú dobozt, ha számít, hogy a doboz bontott volt vagy sem? (*5 pont*) *c*) Feltéve, hogy mindkét testvér két különböző típusú kávét vitt el, mi a valószínűsége, hogy a 6 bontatlan doboz mindegyike otthon maradt? (*3 pont*)

6. Egy egység oldalú szabályos kilencszög csúcsai $A_1; A_2; \ldots; A_9$. Szerkesszünk félköröket A_1A_3; A_2A_4; $\ldots$; A_7A_9; A_8A_1; A_9A_2 szakaszokra, mint átmérőre a kilencszögön belül.

a) Igazoljuk, hogy a félköröket érintő kör átmérőjének hossza

$$\frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}. \qquad (9\ pont)$$

Húzzuk be a szabályos kilencszög összes átlóját, majd színezzük pirosra azokat a szakaszokat (átlókat, oldalakat), amelyek a csúcsok indexeit tekintve különböző paritásúakat kötnek össze, a többi szakaszt pedig fessük kék színűre.

b) Hányféle úton lehet eljutni az A_1 csúcsból az A_9 csúcsba piros szakaszokon úgy, hogy minden csúcsot pontosan egyszer érinthetünk? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk a szakaszok közül kettőt, akkor azok különböző színűek? (*4 pont*)

7. *a*) Jellemezzük az

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n}$$

sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. (*9 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4n}{3^n} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}. \qquad (7\ pont)$$

8. *a*) Igazoljuk, hogy minden pozitív valós számpárra ha $x^2 + 4y^2 = 12xy$, akkor

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = \frac{\lg x + \lg y}{2}. \qquad (6\ pont)$$

b) Van-e megoldása az $x^2 + 4y^2 = 12xy$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán? Válaszunkat indokoljuk. (*10 pont*)

9. Egy derékszögű trapéz hegyesszöge 60°-os, hosszabbik alapjának és hosszabbik szárának aránya $2:1$.

a) Határozzuk meg a trapéz átlóinak arányát. (*6 pont*)

A trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja, majd a hosszabbik szára körül.

b) Határozza meg a kapott testek térfogatának arányát. (*10 pont*)

Csányi Tibor
Budapest