Lineáris ciklusmodellek

Kivonat

Ebben a cikkben középiskolából ismert eszközökkel körvonalazzuk a diszkrét idejű lineáris ciklusmodelleket. Olyan dinamikus rendszert elemzünk, amelyben az állapot az előző két állapottól függ, méghozzá lineárisan. A szigorúan ismétlődő ciklusok bemutatása után az általánosabb harmonikus rezgéseket mutatjuk be.

1. Bevezetés

Mind a természetben, mind a társadalomban fontos szerepet játszanak a *ciklusok*: olyan folyamatok, amelyek rendszeres időközökben ismétlődnek. A természetből ismert nevezetes ciklikus pályák: ingalengés, bolygómozgás, szívverés stb.; a társadalomból ismert ciklikus pályák: gazdasági ciklusok, divathullámok stb. A természeti folyamatokat inkább folytonos, a társadalmi folyamatokat inkább diszkrét (szakaszos) időben szemléljük és modellezzük, ahol az egymást követő időszakok hossza állandó (óra, nap, s közelítőleg: hónap, év).

Minden *modell* a valóság leegyszerűsítése. A jó modell kiemeli a vizsgálat szempontjából fontos vonásokat, elhanyagolja a többit. Például a (matematikai) inga tanulmányozásakor csak arra figyelünk, hogyan függ a lengésidő (periódus) a kilengés maximumától – alig; és hogyan függ az inga hosszától – négyzetgyökösen; miközben figyelmen kívül hagyjuk az inga fizikai jellemzőit és a közegellenállást. Ehhez hasonlóan, a közgazdasági ciklusmodelleknél a periódus és a kilengés nagyságát kutatjuk, és eltekintünk attól, hogy melyik országról van szó.

A cikk címében szerepel még a lineáris jelző. Egy dinamikus modellt *homogén lineárisnak* nevezünk, ha a kezdőérték kétszeres, háromszoros nagyítása a pályát is kétszeresen, háromszorosan nagyítja. A matematikai inga mozgásegyenlete 30° alatti kilengésnél jó közelítéssel lineáris, a gazdasági ciklusok azonban sokkal kevésbé közelíthetők lineáris modellekkel. Például a gazdasági ciklus felemelkedő ága sokkal hosszabb, mint a leszálló ága. Ennek ellenére vizsgálatukat is érdemes lineáris modellel kezdeni, s csak második megközelítésben bevezetni a nemlineáris vonásokat.

Kitérő: a gazdasági dinamika szerkezete időben is változhat: például a 2007-ben kezdődött nemzetközi pénzügyi, majd gazdasági válság után hiába indult újra a növekedés, számos vonása megváltozott: például a gazdaság erőteljes ösztönzése nem okozott inflációt, a kamatlábak 0 közeliek maradtak. A cikkben tárgyalt séma gazdasági alkalmazásaira itt csak utalunk: sertésciklusok, beruházási ciklusok stb. [3].

Középiskolás szinten a ciklusokat legegyszerűbben diszkrét idejű dinamikus rendszerekkel tudjuk modellezni, ilyen modellkeretet nyújtanak a differenciaegyenletek. Káoszról írt KöMaL-cikkemben [2] már említettem az elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlettel leírt ciklust, ebben a cikkben a két legegyszerűbb (nem elfajult) lineáris ciklusmodellt mutatjuk be.

2. Ciklusmodell

Mindenekelőtt célszerű lesz bevezetni a következő definíciót. Legyen P egy természetes szám. Egy $(x_1, x_2, \dots)$ sorozatot *P-ciklusnak* nevezünk, ha P időszakonként ismétlődik, de rövidebb szakaszra nem ismétlődik:

$$x_{kP+r} = x_r, \qquad r = 0, 1, \dots, P-1, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Azaz P a legkisebb ilyen szám – a *periódus.* Megjegyezzük, hogy a $P = 1$ eset elfajult ciklus, hiszen a sorozat minden tagja azonos: $x_1 = x_2 = \dots$.

Dinamikus rendszerünkben az időszak indexe $t = 0, 1, 2, \dots$, állapota x_t, amely az előző egy vagy két állapottól, x_{t-1}-től és x_{t-2}-től függ.

1. példa. Elsőrendű (homogén) lineáris differenciaegyenletről beszélünk, ha

$$x_{t+1} = Ax_t, \qquad t = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol A időben változatlan együttható, és az x_0 kezdeti állapot adott. Ekkor egyetlenegy esetben kapunk ciklust: ha $A = -1$, azaz $x_{t+1} = -x_t$, s ekkor 2-ciklust kapunk: $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$; kivéve, ha $x_0 = 0$, ekkor egyensúlyt kapunk.

Az inhomogén eset az egyensúlytól való eltérésváltozó bevezetésével visszavezethető a homogénra.

A továbbiakban érdekesebb ciklusokat keresünk, s evégett az állapotváltozást egy másodrendű lineáris differenciaegyenlettel írjuk le, ahol nemcsak az előző, hanem az azt megelőző állapot is befolyásolja a mostani állapotot:

$$x_{t+1} = A_1 x_t + A_2 x_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

ahol A_1 és $A_2 \neq 0$ időben változatlan együtthatók, és az (x_{-1}, x_0) kezdeti állapotpár adott. Könnyű belátni, hogy az *egyensúlyi helyzet* [2] $x^0 = 0$, s ez az $(x_{-1}, x_0) = (0, 0)$ kezdeti állapotpárnak felel meg.

A ciklusmentes másodrendű differenciaegyenletet ($A_1^2 > -4A_2$) a KöMaL-ban már korábban [1] bemutattam. Most látni fogjuk, hogy $A_1^2 < -4A_2$ esetben az (1) rendszer megoldását egészen másképp, a szögfüggvények segítségével lehet tárgyalni, ezért a korábbi cikk ismeretére nincs szükség. Az elfajult $A_1^2 = -4A_2$ esettel most sem foglalkozunk.

Bemelegítésül bemutatjuk az 1. példát követő további két legegyszerűbb ciklust.

2. példa. 4-fázisú inga: $x_{t+1} = -x_{t-1}$, $x_0 = 1$, $x_{-1} = 0$. Helyettesítéssel belátható, hogy az állapotsorozat $1, 0, -1, 0, \dots$, tehát 4-ciklus.

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $x_{t+1} = x_t - x_{t-1}$ másodrendű differenciaegyenlet bármely megoldása 6-ciklus. Vegyük észre, hogy az $(1, 1, 0, -1, -1, 0)$ sorozat a cikluson belüli ismétlődés ellenére is 6-ciklus. (Az állandó (0)-sorozat is megoldás, de nem beszélünk 1-ciklusról.)

Az egyszerűség kedvéért egyelőre feltesszük, hogy a kilengés maximuma állandó, emellett a rendszer induló állapota maximális. A ciklikus pályát – a diszkrét idejű magyarázat ellenére – alkalmas periodikus folytonos időfüggvény egész értékű pontok helyettesítési értékeként keressük:

$$x_t = x_0 \cos \varphi t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

s az általánosított periódus az $x_0 \cos \varphi t = x_0 \cos \varphi(t + P)$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása:

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}. \tag{3}$$

Fizikában a $\varphi > 0$ paramétert *szögsebességnek* nevezik, hiszen ez mutatja, hogy a polárkoordináta-rendszerben a $(\cos \varphi t, \sin \varphi t)$ pontot az origóval összekötő sugár egységnyi idő alatt milyen szögben fordul el.

Ez a periódus általában nem természetes szám, ekkor nem beszélhetünk szigorú ciklusról. Ha $P > 1$ racionális szám, például egyszerűsített alakban p/q, akkor q körforgás után $x_p = x_0$, és onnan ismétlődik a pálya. Emiatt van szükség a szökőévek bonyolult rendszerére. (Például első közelítésben egy év 365 1/4 nap, ezért nyilvánított Julius Caesar i.e. 45-ben minden negyedik évet szökőévnek, és ezekben az években a 365 naphoz hozzátett egy 366.-at.) Ha azonban P irracionális szám, akkor szigorúan véve sohasem tér vissza a rendszer az eredeti állapotába. (Valami ilyesmi okozta, hogy 1582-ben Gergely pápának módosítani kellett a juliánusi naptárrendszert, és kihúzni a szökőévekből a 100-zal oszthatókat, és visszatenni a 400-zal oszthatókat.)

A továbbiakban az (1) differenciaegyenlettel származtatjuk a ciklikus megoldásokat.

1. tétel. *$A_1^2 < -4A_2$ mellett az* (1) *rendszer minden $x_0 \neq 0$ kezdőfeltétele melletti megoldása pontosan akkor* (2) *alakú, ha*

$$A_2 = -1, \quad \textit{és így} \quad |A_1| < 2 \tag{4}$$

és

$$x_{-1} = \frac{A_1}{2} x_0. \tag{5}$$

b) A φ szögsebességet (*és a* (3)*-on keresztül a P periódust*)

$$\cos \varphi = \frac{-A_1}{2} \in (-1, 1) \tag{6}$$

határozza meg.

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $A_1^2 < -4A_2 = 4$ feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy a (6) implicit egyenletnek legyen pozitív megoldása.

2. Kiemeljük, hogy a (4) ciklusfeltétel milyen egyszerű: $A_2 = -1$. Ez egy elemi megfontolásból is következik: ha minden pálya ciklikus, akkor időben megfordítható. (Ilyenek

a mechanikai mozgások, de megfordíthatatlanok a hőtani folyamatok.) Ez viszont azt jelenti, hogyha az (1) egyenletet időben visszafelé oldjuk meg, ugyanazt a pályát kapjuk.

$$x_{t-1} = A_2^{-1}A_1x_t - A_2^{-1}x_{t+1}, \qquad t = 0, -1, -2, \ldots, \tag{1'}$$

A két egyenlet pontosan akkor ekvivalens, ha teljesül (4).

2. A_1 szerepe is jól látható: minél nagyobb, annál hosszabb a periódus: $A_1 = 0$-ra $P = 4$ (2. példa), $A_1 = 1/2$-re $P = 6$ (1. feladat). A függés azonban erősen nemlineáris.

3. Lineáris cikklusmodellünknek – főleg a közgazdaságtanban – két gyengesége van: *a*) a kilengés maximuma a kezdőértéktől függ, *b*) a ciklus feltétele késhegyen táncol: $|A_2| < 1$ esetén (például a súrlódásos ingánál) az állapot tart a 0-hoz, $|A_2| > 1$ esetén az állapot periódusonkénti maximális abszolút értéke tart a végtelenhez – ekkor a lineáris közelítés érvényét veszti. Ezek a gyengeségek gyakran csak nemlineáris modellekben kezelhetők.

Bizonyítás. Behelyettesítjük a feltételezett (2) megoldást az (1) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$x_0\cos(\varphi t + \varphi) = A_1x_0\cos\varphi t + A_2x_0\cos(\varphi t - \varphi).$$

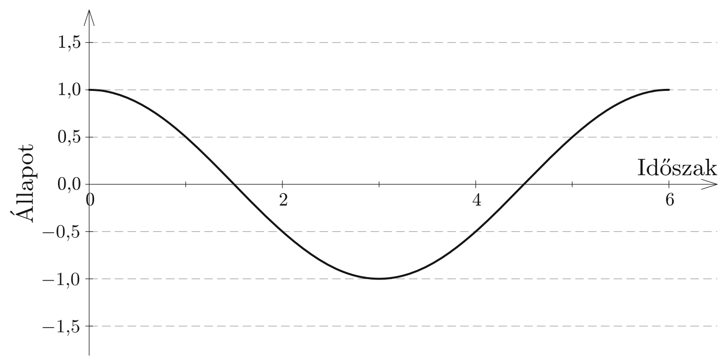
Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $x_0 \neq 0$-val, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$\cos\varphi t\cos\varphi - \sin\varphi t\sin\varphi = A_1\cos\varphi t + A_2[\cos\varphi t\cos\varphi + \sin\varphi t\sin\varphi].$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nem csak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\varphi t$ együtthatók egyenlősége $-1 = A_2$. A $\cos\varphi t$ együtthatók egyenlősége $\cos\varphi = A_1 + A_2\cos\varphi$, s ez (4)-gyel együtt (6)-tal ekvivalens.

A kezdőértékekre vonatkozó (5) feltétel egyszerűen adódik abból, hogy (2) értelmében $x_1 = x_{-1}$, s ezt behelyettesítve a (4)-gyel megszorított (1)-be: $x_{-1} = A_1x_0 - x_{-1}$, azaz (5). □

Az 1. tételt szemlélteti az *1. ábra:* $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $x_0 = 1$ és $x_{-1} = 1/2$ kezdőállapottal, folytonos időskálán bemutatva.



1. ábra. Ciklus, $n = 2$

3. Harmonikus rezgések

Zárásként kimondjuk az 1. tétel általánosítását, ahol A_2 különbözhet -1-től és az x_{-1} kezdőfeltétel tetszőleges. Ilyenkor nem ciklusról, hanem *harmonikus rezgésről, oszcillációról* kell beszélnünk, ahol a folytonosított idejű pályák nem térnek vissza önmagukba, de azonos P periódusonként váltanak előjelet.

2. tétel. *a) Ha $A_1^2 < -4A_2$ (tehát $A_2 < 0$), akkor (1) pályája*

$$x_t = ra^t \cos(\varphi t + \delta), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

alakú, ahol a csillapítási együttható

$$a = \sqrt{-A_2} \tag{8}$$

és a szögsebesség

$$\cos\varphi = \frac{-A_1}{2\sqrt{-A_2}} \in (-1, 1). \tag{9}$$

b) A további paraméterek (r amplitudó és δ fázisszög) a kezdeti feltételekből adódnak:

$$x_0 = r\cos\delta \quad \textit{és} \quad x_{-1} = ra^{-1}\cos(\delta - \varphi). \tag{10}$$

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy (4)–(5) esetén a 2. tétel az 1. tételre egyszerűsödik.

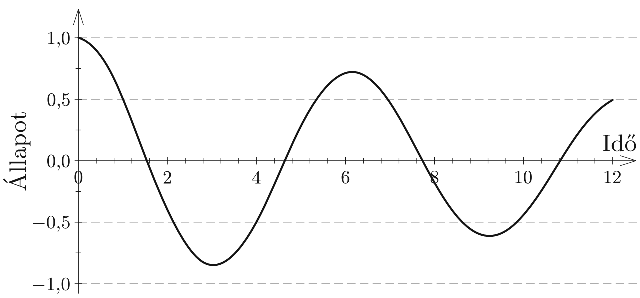
2. Külön meggondolást igényel, hogy a nemlineáris (10) egyenletrendszernek mindig van (r, δ) megoldása. (10) második egyenletét elosztva az elsővel, és a koszinusz addíciós képletét alkalmazva:

$$\frac{x_{-1}}{x_0} = a\frac{\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta} = a[\cos\varphi + \operatorname{tg}\delta\sin\varphi],$$

ahonnan adódik δ:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{x_{-1}}{ax_0\sin\varphi} - a^{-1}\operatorname{ctg}\varphi.$$

A 2. tételt szemlélteti a *2. ábra:* $A_1 = 1$, $A_2 = -0{,}9$ és a megfelelő kezdeti feltételek, újból folytonos időben ábrázolva.



2. ábra. Csillapított oszcilláció, $n = 2$

2. feladat. Az 1. tétel bizonyítását általánosítva bizonyítsuk be a 2. tételt.

Feladatmegoldások

1. feladat. Írjuk föl az egyenletet t helyett $(t-1)$-re: $x_t = x_{t-1} - x_{t-2}$, majd behelyettesítjük az eredeti egyenletbe:

$$x_{t+1} = x_{t-1} - x_{t-2} - x_{t-1} = -x_{t-2}.$$

Emiatt $x_{t-2} = -x_{t-5}$, azaz $x_{t+1} = x_{t-5}$, tehát $P = 6$.

2. feladat. Bevezetjük a $\psi_t = \varphi t + \delta$ jelölést és behelyettesítjük a feltételezett (7) megoldást az (1) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$ra^{t+1}\cos(\psi_t + \varphi) = A_1 ra^t \cos\psi_t + A_2 ra^{t-1}\cos(\psi_t - \varphi).$$

Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát ra^{t-1}-nel, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$a^2[\cos\psi_t \cos\varphi - \sin\psi_t \sin\varphi] = A_1 a\ \cos\psi_t + A_2[\cos\psi_t \cos\varphi + \sin\psi_t \sin\varphi].$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nem csak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\psi_t$ együtthatója két oldalon: $-a^2\sin\varphi = A_2\sin\varphi$, amely teljesül (8) miatt. A $\cos\psi_t$ együtthatója a két oldalon: $a^2\cos\varphi = A_1 a\ + A_2\cos\varphi$, amely teljesül (9) miatt. $\square$

Hivatkozások

[1] Simonovits András: „Három népességdinamika modell," *KöMaL,* **62** (2013), 131–139. `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201602`

[2] Simonovits András: „Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben," *KöMaL,* **65** (2016), 258–267. `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201845`

[3] Simonovits András: *Közgazdasági modellek nemcsak középiskolásoknak,* TypoTEX, Budapest (2020).

Simonovits András

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $x - 1 \leqslant \dfrac{x^2 - x + 6}{x^2 + x - 6}$. *(6 pont)*

b) $\log_{0,5}(-x^2 + 6x - 8) \leqslant 2 + \log_{0,5} 3$. *(6 pont)*