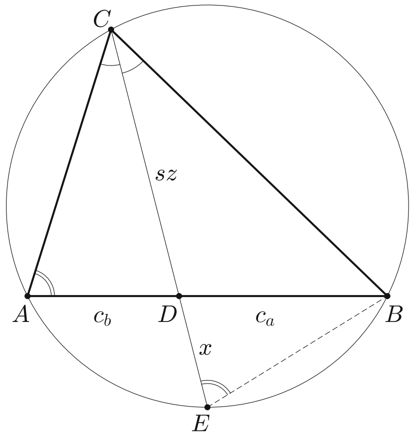
A háromszög belső szögfelezőjének hosszáról

Dunay Zoltán, a Táncsics Mihály Gimnázium, majd a Fazekas Mihály Gimnázium matematika tanára emlékének.



1. ábra

Ismert a szögfelező-tétel: a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja: $\frac{c_a}{c_b}=\frac{a}{b}$. Mivel emellett $c_a+c_b=c$, az arányos osztás miatt:

$$c_a=\frac{ca}{a+b} \quad \text{és} \quad c_b=\frac{cb}{a+b}.$$

A belső szögfelező háromszögbe eső szakasza $CD=sz$.

Tekintsük a D ponton átmenő AB és CE szelőket. Ezekre a szelődarabok szorzatának tétele miatt (*1. ábra*):

$$(*) \qquad c_a\cdot c_b=sz\cdot x.$$

A kerületi szögek tétele miatt $CAB\sphericalangle=CEB\sphericalangle$. Mivel a C csúcsbeli szöget elfeleztük, a $CAD\triangle\sim CEB\triangle$, mivel két megfelelő szögük egyenlő. Azonos oldalaik hányadosa tehát megegyezik: $\frac{b}{sz}=\frac{sz+x}{a}$. Átrendezve: $ab=sz^2+sz\cdot x$, azaz $(*)$ miatt $ab=sz^2+c_a\cdot c_b$. Vagyis a szögfelező szakasz hossza (illetve annak négyzete):

$$(1) \qquad sz^2=ab-c_a\cdot c_b.\text{[1]}$$

Beírva ide a c oldal két darabjának hosszát:

$$sz^2=ab-\frac{c^2ab}{(a+b)^2},$$

közös nevezőre hozva:

$$(2) \qquad sz^2=\frac{ab\big((a+b)^2-c^2\big)}{(a+b)^2}.\text{[2]}$$

[1] Ez ebben a formában szerepel Horvay–Reiman: Geometriai feladatok gyűjteménye I. c. kötetében, az 1256. feladatra adott megoldásban.

[2] Ez az eredmény öt különböző, de egyaránt trigonometrikus levezetéssel szerepel Darvasi Gyula cikkében: A háromszög szögfelezőinek hosszáról, in: A matematika tanítása, 2001, 4. szám, 6–9. o.

Alakítsuk át ezen eredményt trigonometrikus (de az idézett cikkben nem szereplő) módon. Legyen $ACE\sphericalangle = DCB\sphericalangle = \gamma$. Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögre:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 2\gamma = c^2.$$

A (2) képletben c^2 helyébe a fenti egyenlet bal oldalát írva:

$$sz^2 = \frac{ab(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cdot \cos 2\gamma)}{(a+b)^2},$$

összevonás és az addíciós képlet révén:

$$sz^2 = \frac{ab\big(2ab + 2ab \cdot (2 \cdot \cos^2\gamma - 1)\big)}{(a+b)^2} = \frac{4a^2b^2\cos^2\gamma}{(a+b)^2},$$

vagyis:

$$sz = \frac{2ab \cdot \cos\gamma}{a+b}, \tag{3}$$

ami egy másik kifejezése a szögfelező szakasz hosszának. Érdemes ezt tovább vizsgálni.

A háromszög bármely szöge, így $2\gamma < 180^\circ$, vagyis $\gamma < 90^\circ$ (és persze $0^\circ < \gamma$), ezért $0 < \cos\gamma < 1$, ezért

$$(0 <)\ sz < \frac{2ab}{a+b}, \tag{4}$$

vagyis *a szögfelező szakasz rövidebb* (kell legyen) *a két szomszédos oldal harmonikus közepénél.*

Alkalmazzuk a fent felismert (4) korlátot a szögfelező szakasz (2) képletbeli alakjára:

$$sz^2 = \frac{ab\big((a+b)^2 - c^2\big)}{(a+b)^2} < \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2},$$

egyszerűsítések után $(a+b)^2 - c^2 < 4ab$, átrendezve:

$$(a+b)^2 - 4ab < c^2, \quad \text{vagyis} \quad (a-b)^2 < c^2,$$

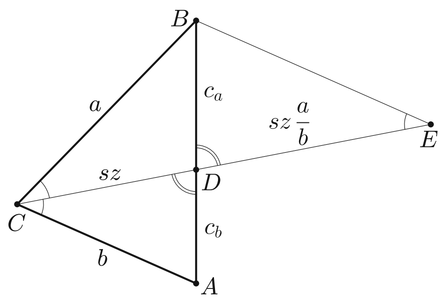
azaz

$$|a-b| < c. \tag{5}$$

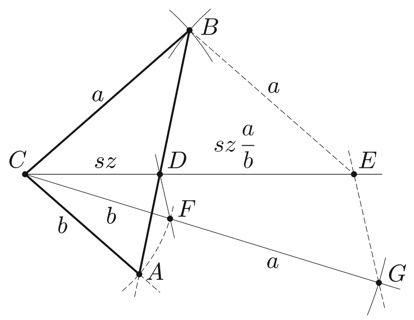
Tehát a (4)-beli eredmény (hogy a szögfelező szakasz hosszának a szomszédos oldalak harmonikus közepe felső korlátja) egyszerűen *a háromszög-egyenlőtlenség következménye.*

Szép elemi geometriai továbbgondolása a témának, ha szerkesztési feladatként fogjuk fel. Az analóg feladatok – szerkesszünk háromszöget két oldal és harmadikhoz tartozó magasság hosszából (a, b, m_c), vagy két oldal és a harmadikhoz tartozó súlyvonal hosszából (a, b, s_c) – a középiskolai oktatás ismert, bevett feladatai. De háromszög szerkesztése két oldal és a közrezárt szög felezőjének [a háromszög belsejébe eső szakaszának] hosszából (a, b, sz_c – vagy a cikk eddigi jelölése szerint egyszerűen csak sz), az már nem magától értetődő.

A szerkesztés érdekében idézzük fel a szögfelező-tétel bizonyításához használatos *2. ábrát:* hosszabbítsuk meg a szögfelezőt, amíg el nem metszi a B csúcson át AC-vel húzott párhuzamost (ezen az ábrán legyen ez a pont E). Mivel $ACD\sphericalangle$ és $BED\sphericalangle$ váltószögek, tehát egyenlők, és a szögfelezés miatt $DCB\sphericalangle$ is ugyanekkora, ezért a $CEB\triangle$ egyenlő szárú, tehát $BE=a$. A D-nél keletkezett csúcsszögek miatt $ACD\triangle\sim BED\triangle$, a hasonlóság aránya (megfelelő oldalak alapján) $b:a$, ezért a most keletkezett $DE=sz\frac{a}{b}$.



2. ábra



3. ábra

Ezek alapján adott a, b, sz esetén a következőképpen szerkeszthetünk háromszöget. Felveszünk egy C-ből induló félegyenest, rámérjük sz-t (CD). Felveszünk egy másik, C-ből induló (azzal lényegében bármilyen, nem egyenes-, célszerűen hegyesszöget bezáró) segéd félegyenest, amire egymás után felmérjük a $b=CF$ és $a=FG$ szakaszokat. A párhuzamos szelők tétele révén megszerkesztjük a $DE=sz\frac{a}{b}$ szakaszt úgy, hogy FD-vel párhuzamost húzunk G-ből, amíg elmetszi az elsőként felvett félegyenest. Ezután C-ből és E-ből egyaránt a sugarú körívet rajzolunk, (egyik, alkalmas) metszéspontjuk B. Ezt összekötjük D-vel, meghosszabbítjuk azon túl, és (vagy:) C középpontú, b sugarú körívvel kimetsszük belőle A-t (vagy:) a BE-vel párhuzamost húzva C-ből metsszük ki belőle A-t. A keletkezett $ABC\triangle$ a kívánt tulajdonságú (*3. ábra*).

Diszkusszió: a szerkesztés minden lépése végrehajtható tetszőleges a és b esetén, azonban a CE alapra egyenlő a szárakkal felvett B csúcs csak akkor keletkezik, ha teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$sz+sz\frac{a}{b}<a+a,\quad \text{vagyis}\quad sz\frac{b+a}{b}<2a,\quad \text{azaz}\quad sz<\frac{2ab}{a+b},$$

amivel más módon megkaptuk a (4) alatti feltételt.

Siposs András
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium (Budapest)