KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 3. szám Budapest, 2021. március

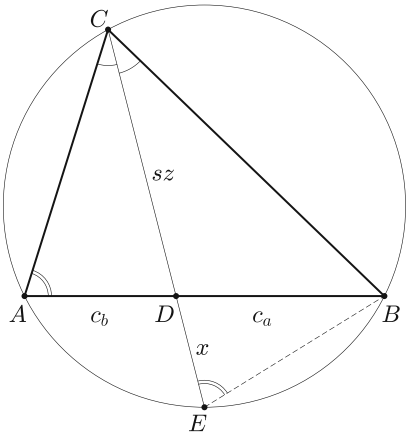
Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

A háromszög belső szögfelezőjének hosszáról

Dunay Zoltán, a Táncsics Mihály Gimnázium, majd a Fazekas Mihály Gimnázium matematika tanára emlékének.



1. ábra

Ismert a szögfelező-tétel: a háromszög belső szögfelezője a szemközti oldalt a szomszédos oldalak arányában osztja: $\frac{c_a}{c_b} = \frac{a}{b}$. Mivel emellett $c_a + c_b = c$, az arányos osztás miatt:

$$c_a = \frac{ca}{a+b} \quad \text{és} \quad c_b = \frac{cb}{a+b}.$$

A belső szögfelező háromszögbe eső szakasza $CD = sz$.

Tekintsük a D ponton átmenő AB és CE szelőket. Ezekre a szelődarabok szorzatának tétele miatt (*1. ábra*):

$$(*) \qquad c_a \cdot c_b = sz \cdot x.$$

A kerületi szögek tétele miatt $CAB\sphericalangle = CEB\sphericalangle$. Mivel a C csúcsbeli szöget elfeleztük, a $CAD\triangle \sim CEB\triangle$, mivel két megfelelő szögük egyenlő. Azonos oldalaik hányadosa tehát megegyezik: $\frac{b}{sz} = \frac{sz+x}{a}$. Átrendezve: $ab = sz^2 + sz \cdot x$, azaz $(*)$ miatt $ab = sz^2 + c_a \cdot c_b$. Vagyis a szögfelező szakasz hossza (illetve annak négyzete):

$$(1) \qquad sz^2 = ab - c_a \cdot c_b.^1$$

Beírva ide a c oldal két darabjának hosszát:

$$sz^2 = ab - \frac{c^2 ab}{(a+b)^2},$$

közös nevezőre hozva:

$$(2) \qquad sz^2 = \frac{ab\big((a+b)^2 - c^2\big)}{(a+b)^2}.^2$$

[1] Ez ebben a formában szerepel Horvay–Reiman: Geometriai feladatok gyűjteménye I. c. kötetében, az 1256. feladatra adott megoldásban.

[2] Ez az eredmény öt különböző, de egyaránt trigonometrikus levezetéssel szerepel Darvasi Gyula cikkében: A háromszög szögfelezőinek hosszáról, in: A matematika tanítása, 2001, 4. szám, 6–9. o.

Alakítsuk át ezen eredményt trigonometrikus (de az idézett cikkben nem szereplő) módon. Legyen $ACE\sphericalangle = DCB\sphericalangle = \gamma$. Írjuk fel a koszinusztételt az ABC háromszögre:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos 2\gamma = c^2.$$

A (2) képletben c^2 helyébe a fenti egyenlet bal oldalát írva:

$$sz^2 = \frac{ab(a^2 + 2ab + b^2 - a^2 - b^2 + 2ab \cdot \cos 2\gamma)}{(a+b)^2},$$

összevonás és az addíciós képlet révén:

$$sz^2 = \frac{ab\big(2ab + 2ab \cdot (2 \cdot \cos^2 \gamma - 1)\big)}{(a+b)^2} = \frac{4a^2b^2 \cos^2 \gamma}{(a+b)^2},$$

vagyis:

$$sz = \frac{2ab \cdot \cos \gamma}{a+b}, \tag{3}$$

ami egy másik kifejezése a szögfelező szakasz hosszának. Érdemes ezt tovább vizsgálni.

A háromszög bármely szöge, így $2\gamma < 180^\circ$, vagyis $\gamma < 90^\circ$ (és persze $0^\circ < \gamma$), ezért $0 < \cos \gamma < 1$, ezért

$$(0 <)\ sz < \frac{2ab}{a+b}, \tag{4}$$

vagyis *a szögfelező szakasz rövidebb* (kell legyen) *a két szomszédos oldal harmonikus közepénél.*

Alkalmazzuk a fent felismert (4) korlátot a szögfelező szakasz (2) képletbeli alakjára:

$$sz^2 = \frac{ab\big((a+b)^2 - c^2\big)}{(a+b)^2} < \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = \frac{4a^2b^2}{(a+b)^2},$$

egyszerűsítések után $(a+b)^2 - c^2 < 4ab$, átrendezve:

$$(a+b)^2 - 4ab < c^2, \quad \text{vagyis} \quad (a-b)^2 < c^2,$$

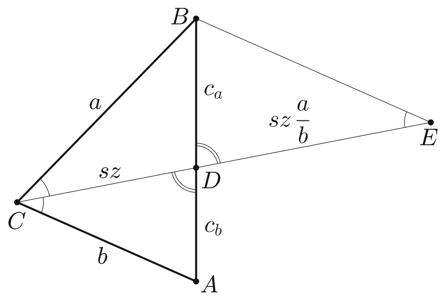
azaz

$$|a-b| < c. \tag{5}$$

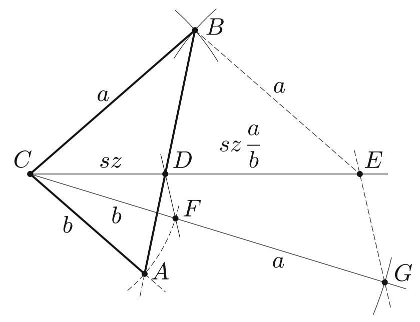
Tehát a (4)-beli eredmény (hogy a szögfelező szakasz hosszának a szomszédos oldalak harmonikus közepe felső korlátja) egyszerűen *a háromszög-egyenlőtlenség következménye.*

Szép elemi geometriai továbbgondolása a témának, ha szerkesztési feladatként fogjuk fel. Az analóg feladatok – szerkesszünk háromszöget két oldal és harmadikhoz tartozó magasság hosszából (a, b, m_c), vagy két oldal és a harmadikhoz tartozó súlyvonal hosszából (a, b, s_c) – a középiskolai oktatás ismert, bevett feladatai. De háromszög szerkesztése két oldal és a közrezárt szög felezőjének [a háromszög belsejébe eső szakaszának] hosszából (a, b, sz_c – vagy a cikk eddigi jelölése szerint egyszerűen csak sz), az már nem magától értetődő.

A szerkesztés érdekében idézzük fel a szögfelező-tétel bizonyításához használatos *2. ábrát:* hosszabbítsuk meg a szögfelezőt, amíg el nem metszi a B csúcson át AC-vel húzott párhuzamost (ezen az ábrán legyen ez a pont E). Mivel $ACD\sphericalangle$ és $BED\sphericalangle$ váltószögek, tehát egyenlők, és a szögfelezés miatt $DCB\sphericalangle$ is ugyanekkora, ezért a $CEB\triangle$ egyenlő szárú, tehát $BE=a$. A D-nél keletkezett csúcsszögek miatt $ACD\triangle\sim BED\triangle$, a hasonlóság aránya (megfelelő oldalak alapján) $b:a$, ezért a most keletkezett $DE=sz\frac{a}{b}$.



2. ábra



3. ábra

Ezek alapján adott a, b, sz esetén a következőképpen szerkeszthetünk háromszöget. Felveszünk egy C-ből induló félegyenest, rámérjük sz-t (CD). Felveszünk egy másik, C-ből induló (azzal lényegében bármilyen, nem egyenes-, célszerűen hegyesszöget bezáró) segéd félegyenest, amire egymás után felmérjük a $b=CF$ és $a=FG$ szakaszokat. A párhuzamos szelők tétele révén megszerkesztjük a $DE=sz\frac{a}{b}$ szakaszt úgy, hogy FD-vel párhuzamost húzunk G-ből, amíg elmetszi az elsőként felvett félegyenest. Ezután C-ből és E-ből egyaránt a sugarú körívet rajzolunk, (egyik, alkalmas) metszéspontjuk B. Ezt összekötjük D-vel, meghosszabbítjuk azon túl, és (vagy:) C középpontú, b sugarú körívvel kimetsszük belőle A-t (vagy:) a BE-vel párhuzamost húzva C-ből metsszük ki belőle A-t. A keletkezett $ABC\triangle$ a kívánt tulajdonságú (*3. ábra*).

Diszkusszió: a szerkesztés minden lépése végrehajtható tetszőleges a és b esetén, azonban a CE alapra egyenlő a szárakkal felvett B csúcs csak akkor keletkezik, ha teljesül a háromszög-egyenlőtlenség:

$$sz+sz\frac{a}{b}<a+a, \quad \text{vagyis} \quad sz\frac{b+a}{b}<2a, \quad \text{azaz} \quad sz<\frac{2ab}{a+b},$$

amivel más módon megkaptuk a (4) alatti feltételt.

Siposs András
ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium (Budapest)

Lineáris ciklusmodellek

Kivonat

Ebben a cikkben középiskolából ismert eszközökkel körvonalazzuk a diszkrét idejű lineáris ciklusmodelleket. Olyan dinamikus rendszert elemzünk, amelyben az állapot az előző két állapottól függ, méghozzá lineárisan. A szigorúan ismétlődő ciklusok bemutatása után az általánosabb harmonikus rezgéseket mutatjuk be.

1. Bevezetés

Mind a természetben, mind a társadalomban fontos szerepet játszanak a *ciklusok*: olyan folyamatok, amelyek rendszeres időközökben ismétlődnek. A természetből ismert nevezetes ciklikus pályák: ingalengés, bolygómozgás, szívverés stb.; a társadalomból ismert ciklikus pályák: gazdasági ciklusok, divathullámok stb. A természeti folyamatokat inkább folytonos, a társadalmi folyamatokat inkább diszkrét (szakaszos) időben szemléljük és modellezzük, ahol az egymást követő időszakok hossza állandó (óra, nap, s közelítőleg: hónap, év).

Minden *modell* a valóság leegyszerűsítése. A jó modell kiemeli a vizsgálat szempontjából fontos vonásokat, elhanyagolja a többit. Például a (matematikai) inga tanulmányozásakor csak arra figyelünk, hogyan függ a lengésidő (periódus) a kilengés maximumától – alig; és hogyan függ az inga hosszától – négyzetgyökösen; miközben figyelmen kivül hagyjuk az inga fizikai jellemzőit és a közegellenállást. Ehhez hasonlóan, a közgazdasági ciklusmodelleknél a periódus és a kilengés nagyságát kutatjuk, és eltekintünk attól, hogy melyik országról van szó.

A cikk címében szerepel még a lineáris jelző. Egy dinamikus modellt *homogén lineárisnak* nevezünk, ha a kezdőérték kétszeres, háromszoros nagyítása a pályát is kétszeresen, háromszorosan nagyítja. A matematikai inga mozgásegyenlete 30° alatti kilengésnél jó közelítéssel lineáris, a gazdasági ciklusok azonban sokkal kevésbé közelíthetők lineáris modellekkel. Például a gazdasági ciklus felemelkedő ága sokkal hosszabb, mint a leszálló ága. Ennek ellenére vizsgálatukat is érdemes lineáris modellel kezdeni, s csak második megközelítésben bevezetni a nemlineáris vonásokat.

Kitérő: a gazdasági dinamika szerkezete időben is változhat: például a 2007-ben kezdődött nemzetközi pénzügyi, majd gazdasági válság után hiába indult újra a növekedés, számos vonása megváltozott: például a gazdaság erőteljes ösztönzése nem okozott inflációt, a kamatlábak 0 közeliek maradtak. A cikkben tárgyalt séma gazdasági alkalmazásaira itt csak utalunk: sertésciklusok, beruházási ciklusok stb. [3].

Középiskolás szinten a ciklusokat legegyszerűbben diszkrét idejű dinamikus rendszerekkel tudjuk modellezni, ilyen modellkeretet nyújtanak a differenciaegyenletek. Káoszról írt KöMaL-cikkemben [2] már említettem az elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlettel leírt ciklust, ebben a cikkben a két legegyszerűbb (nem elfajult) lineáris ciklusmodellt mutatjuk be.

2. Ciklusmodell

Mindenekelőtt célszerű lesz bevezetni a következő definíciót. Legyen P egy természetes szám. Egy $(x_1, x_2, \dots)$ sorozatot *P-ciklusnak* nevezünk, ha P időszakonként ismétlődik, de rövidebb szakaszra nem ismétlődik:

$$x_{kP+r} = x_r, \qquad r = 0, 1, \dots, P-1, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Azaz P a legkisebb ilyen szám – a *periódus.* Megjegyezzük, hogy a $P = 1$ eset elfajult ciklus, hiszen a sorozat minden tagja azonos: $x_1 = x_2 = \dots$.

Dinamikus rendszerünkben az időszak indexe $t = 0, 1, 2, \dots$, állapota x_t, amely az előző egy vagy két állapottól, x_{t-1}-től és x_{t-2}-től függ.

1. példa. Elsőrendű (homogén) lineáris differenciaegyenletről beszélünk, ha

$$x_{t+1} = Ax_t, \qquad t = 0, 1, 2, \dots,$$

ahol A időben változatlan együttható, és az x_0 kezdeti állapot adott. Ekkor egyetlenegy esetben kapunk ciklust: ha $A = -1$, azaz $x_{t+1} = -x_t$, s ekkor 2-ciklust kapunk: $x_0, -x_0, x_0, -x_0, \dots$; kivéve, ha $x_0 = 0$, ekkor egyensúlyt kapunk.

Az inhomogén eset az egyensúlytól való eltérésváltozó bevezetésével visszavezethető a homogénra.

A továbbiakban érdekesebb ciklusokat keresünk, s evégett az állapotváltozást egy másodrendű lineáris differenciaegyenlettel írjuk le, ahol nemcsak az előző, hanem az azt megelőző állapot is befolyásolja a mostani állapotot:

$$x_{t+1} = A_1x_t + A_2x_{t-1}, \qquad t = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

ahol A_1 és $A_2 \neq 0$ időben változatlan együtthatók, és az (x_{-1}, x_0) kezdeti állapotpár adott. Könnyű belátni, hogy az *egyensúlyi helyzet* [2] $x^0 = 0$, s ez az $(x_{-1}, x_0) = (0, 0)$ kezdeti állapotpárnak felel meg.

A ciklusmentes másodrendű differenciaegyenletet ($A_1^2 > -4A_2$) a KöMaL-ban már korábban [1] bemutattam. Most látni fogjuk, hogy $A_1^2 < -4A_2$ esetben az (1) rendszer megoldását egészen másképp, a szögfüggvények segítségével lehet tárgyalni, ezért a korábbi cikk ismeretére nincs szükség. Az elfajult $A_1^2 = -4A_2$ esettel most sem foglalkozunk.

Bemelegítésül bemutatjuk az 1. példát követő további két legegyszerűbb ciklust.

2. példa. 4-fázisú inga: $x_{t+1} = -x_{t-1}$, $x_0 = 1$, $x_{-1} = 0$. Helyettesítéssel belátható, hogy az állapotsorozat $1, 0, -1, 0, \dots$, tehát 4-ciklus.

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy az $x_{t+1} = x_t - x_{t-1}$ másodrendű differenciaegyenlet bármely megoldása 6-ciklus. Vegyük észre, hogy az $(1, 1, 0, -1, -1, 0)$ sorozat a cikluson belüli ismétlődés ellenére is 6-ciklus. (Az állandó (0)-sorozat is megoldás, de nem beszélünk 1-ciklusról.)

Az egyszerűség kedvéért egyelőre feltesszük, hogy a kilengés maximuma állandó, emellett a rendszer induló állapota maximális. A ciklikus pályát – a diszkrét idejű magyarázat ellenére – alkalmas periodikus folytonos időfüggvény egész értékű pontok helyettesítési értékeként keressük:

$$x_t = x_0 \cos \varphi t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

s az általánosított periódus az $x_0 \cos \varphi t = x_0 \cos \varphi(t + P)$ egyenlet legkisebb pozitív megoldása:

$$P = \frac{2\pi}{\varphi}. \tag{3}$$

Fizikában a $\varphi > 0$ paramétert *szögsebességnek* nevezik, hiszen ez mutatja, hogy a polárkoordináta-rendszerben a $(\cos \varphi t, \sin \varphi t)$ pontot az origóval összekötő sugár egységnyi idő alatt milyen szögben fordul el.

Ez a periódus általában nem természetes szám, ekkor nem beszélhetünk szigorú ciklusról. Ha $P > 1$ racionális szám, például egyszerűsített alakban p/q, akkor q körforgás után $x_p = x_0$, és onnan ismétlődik a pálya. Emiatt van szükség a szökőévek bonyolult rendszerére. (Például első közelítésben egy év 365 1/4 nap, ezért nyilvánított Julius Caesar i.e. 45-ben minden negyedik évet szökőévnek, és ezekben az években a 365 naphoz hozzátett egy 366.-at.) Ha azonban P irracionális szám, akkor szigorúan véve sohasem tér vissza a rendszer az eredeti állapotába. (Valami ilyesmi okozta, hogy 1582-ben Gergely pápának módosítani kellett a juliánusi naptárrendszert, és kihúzni a szökőévekből a 100-zal oszthatókat, és visszatenni a 400-zal oszthatókat.)

A továbbiakban az (1) differenciaegyenlettel származtatjuk a ciklikus megoldásokat.

1. tétel. *$A_1^2 < -4A_2$ mellett az* (1) *rendszer minden $x_0 \neq 0$ kezdőfeltétele melletti megoldása pontosan akkor* (2) *alakú, ha*

$$A_2 = -1, \quad \textit{és így} \quad |A_1| < 2 \tag{4}$$

és

$$x_{-1} = \frac{A_1}{2} x_0. \tag{5}$$

b) A φ szögsebességet (*és a* (3)*-on keresztül a P periódust*)

$$\cos \varphi = \frac{-A_1}{2} \in (-1, 1) \tag{6}$$

határozza meg.

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $A_1^2 < -4A_2 = 4$ feltétel szükséges és elegendő ahhoz, hogy a (6) implicit egyenletnek legyen pozitív megoldása.

2. Kiemeljük, hogy a (4) ciklusfeltétel milyen egyszerű: $A_2 = -1$. Ez egy elemi megfontolásból is következik: ha minden pálya ciklikus, akkor időben megfordítható. (Ilyenek

a mechanikai mozgások, de megfordíthatatlanok a hőtani folyamatok.) Ez viszont azt jelenti, hogyha az (1) egyenletet időben visszafelé oldjuk meg, ugyanazt a pályát kapjuk.

$$(1') \qquad x_{t-1} = A_2^{-1}A_1x_t - A_2^{-1}x_{t+1}, \qquad t = 0, -1, -2, \ldots,$$

A két egyenlet pontosan akkor ekvivalens, ha teljesül (4).

2. A_1 szerepe is jól látható: minél nagyobb, annál hosszabb a periódus: $A_1 = 0$-ra $P = 4$ (2. példa), $A_1 = 1/2$-re $P = 6$ (1. feladat). A függés azonban erősen nemlineáris.

3. Lineáris cikklusmodellünknek – főleg a közgazdaságtanban – két gyengesége van: *a*) a kilengés maximuma a kezdőértéktől függ, *b*) a ciklus feltétele késhegyen táncol: $|A_2| < 1$ esetén (például a súrlódásos ingánál) az állapot tart a 0-hoz, $|A_2| > 1$ esetén az állapot periódusonkénti maximális abszolút értéke tart a végtelenhez – ekkor a lineáris közelítés érvényét veszti. Ezek a gyengeségek gyakran csak nemlineáris modellekben kezelhetők.

Bizonyítás. Behelyettesítjük a feltételezett (2) megoldást az (1) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$x_0 \cos(\varphi t + \varphi) = A_1 x_0 \cos\varphi t + A_2 x_0 \cos(\varphi t - \varphi).$$

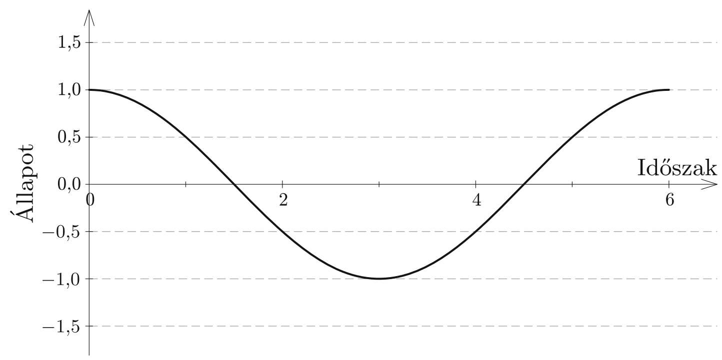
Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát $x_0 \neq 0$-val, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$\cos\varphi t \cos\varphi - \sin\varphi t \sin\varphi = A_1 \cos\varphi t + A_2[\cos\varphi t \cos\varphi + \sin\varphi t \sin\varphi].$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nem csak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\varphi t$ együtthatók egyenlősége $-1 = A_2$. A $\cos\varphi t$ együtthatók egyenlősége $\cos\varphi = A_1 + A_2\cos\varphi$, s ez (4)-gyel együtt (6)-tal ekvivalens.

A kezdőértékekre vonatkozó (5) feltétel egyszerűen adódik abból, hogy (2) értelmében $x_1 = x_{-1}$, s ezt behelyettesítve a (4)-gyel megszorított (1)-be: $x_{-1} = A_1x_0 - x_{-1}$, azaz (5). □

Az 1. tételt szemlélteti az *1. ábra:* $A_1 = 1$, $A_2 = -1$, $x_0 = 1$ és $x_{-1} = 1/2$ kezdőállapottal, folytonos időskálán bemutatva.



1. ábra. Ciklus, $n = 2$

3. Harmonikus rezgések

Zárásként kimondjuk az 1. tétel általánosítását, ahol A_2 különbözhet -1-től és az x_{-1} kezdőfeltétel tetszőleges. Ilyenkor nem ciklusról, hanem *harmonikus rezgésről, oszcillációról* kell beszélnünk, ahol a folytonosított idejű pályák nem térnek vissza önmagukba, de azonos P periódusonként váltanak előjelet.

2. tétel. *a) Ha* $A_1^2 < -4A_2$ *(tehát* $A_2 < 0$*), akkor (1) pályája*

$$x_t = ra^t \cos(\varphi t + \delta), \qquad t = 0, 1, 2, \ldots \tag{7}$$

alakú, ahol a csillapítási együttható

$$a = \sqrt{-A_2} \tag{8}$$

és a szögsebesség

$$\cos\varphi = \frac{-A_1}{2\sqrt{-A_2}} \in (-1, 1). \tag{9}$$

b) A további paraméterek (r *amplitudó és* δ *fázisszög) a kezdeti feltételekből adódnak:*

$$x_0 = r\cos\delta \quad \textit{és} \quad x_{-1} = ra^{-1}\cos(\delta - \varphi). \tag{10}$$

Megjegyzések. 1. Könnyen belátható, hogy (4)–(5) esetén a 2. tétel az 1. tételre egyszerűsödik.

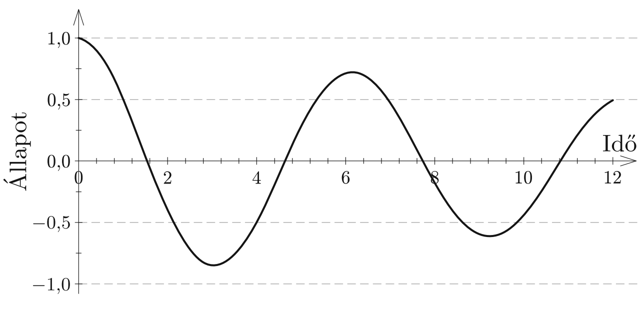
2. Külön meggondolást igényel, hogy a nemlineáris (10) egyenletrendszernek mindig van (r, δ) megoldása. (10) második egyenletét elosztva az elsővel, és a koszinusz addíciós képletét alkalmazva:

$$\frac{x_{-1}}{x_0} = a\frac{\cos\delta\cos\varphi + \sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta} = a[\cos\varphi + \operatorname{tg}\delta\sin\varphi],$$

ahonnan adódik δ:

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{x_{-1}}{ax_0\sin\varphi} - a^{-1}\operatorname{ctg}\varphi.$$

A 2. tételt szemlélteti a *2. ábra:* $A_1 = 1$, $A_2 = -0{,}9$ és a megfelelő kezdeti feltételek, újból folytonos időben ábrázolva.



2. ábra. Csillapított oszcilláció, $n = 2$

2. feladat. Az 1. tétel bizonyítását általánosítva bizonyítsuk be a 2. tételt.

Feladatmegoldások

1. feladat. Írjuk föl az egyenletet t helyett $(t-1)$-re: $x_t = x_{t-1} - x_{t-2}$, majd behelyettesítjük az eredeti egyenletbe:

$$x_{t+1} = x_{t-1} - x_{t-2} - x_{t-1} = -x_{t-2}.$$

Emiatt $x_{t-2} = -x_{t-5}$, azaz $x_{t+1} = x_{t-5}$, tehát $P = 6$.

2. feladat. Bevezetjük a $\psi_t = \varphi t + \delta$ jelölést és behelyettesítjük a feltételezett (7) megoldást az (1) másodrendű homogén lineáris differenciaegyenletbe:

$$ra^{t+1}\cos(\psi_t + \varphi) = A_1 ra^t \cos\psi_t + A_2 ra^{t-1}\cos(\psi_t - \varphi).$$

Elosztjuk az egyenlet mindkét oldalát ra^{t-1}-nel, és alkalmazzuk a koszinuszfüggvény addíciós képletét:

$$a^2[\cos\psi_t\cos\varphi - \sin\psi_t\sin\varphi] = A_1 a\ \cos\psi_t + A_2[\cos\psi_t\cos\varphi + \sin\psi_t\sin\varphi].$$

Két részre bontjuk az egyenletet, és mindkét részre megköveteljük az egyenlőséget. (Belátható, hogy ez nem csak elégséges, de szükséges is.) A $\sin\psi_t$ együtthatója két oldalon: $-a^2\sin\varphi = A_2\sin\varphi$, amely teljesül (8) miatt. A $\cos\psi_t$ együtthatója a két oldalon: $a^2\cos\varphi = A_1 a\ + A_2\cos\varphi$, amely teljesül (9) miatt. $\square$

Hivatkozások

[1] Simonovits András: „Három népességdinamika modell,” *KöMaL,* **62** (2013), 131–139. `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201602`

[2] Simonovits András: „Egyensúly, ciklus és káosz dinamikus rendszerekben,” *KöMaL,* **65** (2016), 258–267. `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201845`

[3] Simonovits András: *Közgazdasági modellek nemcsak középiskolásoknak,* TypoTEX, Budapest (2020).

Simonovits András

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.

a) $x - 1 \leqslant \dfrac{x^2 - x + 6}{x^2 + x - 6}$. *(6 pont)*

b) $\log_{0,5}(-x^2 + 6x - 8) \leqslant 2 + \log_{0,5} 3$. *(6 pont)*

2. A 688, 1204 és a 2021 számok ugyanannak a természetes számokból álló, 1-nél nagyobb differenciájú a_n számtani sorozatnak a tagjai.

a) Határozzuk meg az a_n sorozat differenciáját. (*4 pont*)

b) Mennyi az a_n sorozat négyjegyű tagjainak összege? (*6 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a 688, 1204 és a 2021 számok nem lehetnek ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai. (*3 pont*)

3. Az óceánon egy kutatócsoportnak elromlott a hajója. Két mentőcsapat siet segítségükre. A kutatók épp derékszögben látják a két mentőhajót, amikor az egyik az $A(4;5)$ és a másik $B(5;-3)$ pontban láthatók a radaron. A koordinátarendszer egysége a valóságban 1 km.

a) A koordinátarendszer mely pontjában van a kutatóhajó, ha a három hajó által közrefogott háromszög területe a valóságban 15 km^2, és a kutatócsoport helyének abszcisszája 1. (*7 pont*)

A radaron véletlenszerűen felbukkan egy tengeralattjáró a hajók által közrefogott háromszögön belül.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a tengeralattjáró az abszcissza-tengely alatt bukkan fel? (*6 pont*)

4. Az $f(x)=2x^3-15x^2+24x+d$ harmadfokú függvény lokális minimumhelye egyben zérushelye is.

a) Határozzuk meg d értékét. (*7 pont*)

Legyen az f függvény lokális minimumhelye m, maximumhelye n.

b) Mekkora területet zár közre az x-tengely, az$x=m$, az $x=n$ egyenesek és az $y=f(x)$ egyenletű görbe? (*6 pont*)

II. rész

5. A MathCoffie Rt. 6 féle kávékeveréket gyárt (Arcusa, Binoma, Ciklona, Dodeka, Expona és Faktora). Pepi ki szeretné próbálni mindegyiket, ezért 2 dobozzal vett mindegyik fajtából. A kávékeverékek 3 különböző árkategóriában kaphatók. Az Arcusa és a Binoma I. árkategóriájú, a Ciklona és a Dodeka II. árkategóriájú, az Expona és a Faktora III. árkategóriába tartozik. A II. kategóriájú kávé ára az I. és III. kategóriájú kávék árának az átlaga. A II. és I. kategóriák árának aránya $\frac{10}{33}$-dal kisebb, mint a III. és I. kategóriák árának aránya.

a) Milyen árban vannak az egyes kávéfajták, ha Pepi a kávékért 15 480 Ft-ot fizetett? (*8 pont*)

Pepi mindegyik típusú kávéból az egyik dobozt megnyitotta, hogy megkóstolja a kávékat, majd visszazárta, így kívülről nem állapítható meg, hogy melyeket nyitotta ki. Pepi testvérei Pipi és Pepe szemet vetettek Pepi kávéjára, és véletlenszerűen elvettek a 12 dobozból két-két dobozzal.

b) Hányféleképp vihettek el két-két különböző típusú dobozt, ha számít, hogy a doboz bontott volt vagy sem? (*5 pont*) *c*) Feltéve, hogy mindkét testvér két különböző típusú kávét vitt el, mi a valószínűsége, hogy a 6 bontatlan doboz mindegyike otthon maradt? (*3 pont*)

6. Egy egység oldalú szabályos kilencszög csúcsai $A_1; A_2; \ldots; A_9$. Szerkesszünk félköröket A_1A_3; A_2A_4; $\ldots$; A_7A_9; A_8A_1; A_9A_2 szakaszokra, mint átmérőre a kilencszögön belül.

a) Igazoljuk, hogy a félköröket érintő kör átmérőjének hossza

$$\frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}. \qquad (9\ pont)$$

Húzzuk be a szabályos kilencszög összes átlóját, majd színezzük pirosra azokat a szakaszokat (átlókat, oldalakat), amelyek a csúcsok indexeit tekintve különböző paritásúakat kötnek össze, a többi szakaszt pedig fessük kék színűre.

b) Hányféle úton lehet eljutni az A_1 csúcsból az A_9 csúcsba piros szakaszokon úgy, hogy minden csúcsot pontosan egyszer érinthetünk? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk a szakaszok közül kettőt, akkor azok különböző színűek? (*4 pont*)

7. *a*) Jellemezzük az

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n}$$

sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. (*9 pont*)

b) Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4n}{3^n} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}. \qquad (7\ pont)$$

8. *a*) Igazoljuk, hogy minden pozitív valós számpárra ha $x^2 + 4y^2 = 12xy$, akkor

$$\lg(x + 2y) - 2\lg 2 = \frac{\lg x + \lg y}{2}. \qquad (6\ pont)$$

b) Van-e megoldása az $x^2 + 4y^2 = 12xy$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán? Válaszunkat indokoljuk. (*10 pont*)

9. Egy derékszögű trapéz hegyesszöge 60°-os, hosszabbik alapjának és hosszabbik szárának aránya $2 : 1$.

a) Határozzuk meg a trapéz átlóinak arányát. (*6 pont*)

A trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja, majd a hosszabbik szára körül.

b) Határozza meg a kapott testek térfogatának arányát. (*10 pont*)

Csányi Tibor
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a) Hány megoldása van az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenségnek?*

$$\left|1-\frac{x-1}{x}\right|>\frac{1}{2021}. \qquad (3\ pont)$$

b) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\log_2 x+\log_4 x-2\log_8 x=\frac{5}{3}. \qquad (3\ pont)$$

c) Határozzuk meg azokat az x, y és z valós számokat, amelyekre:

$$12x^2+15y^2+4z^2-12xy-12yz-8z+16=0. \qquad (6\ pont)$$

Megoldás. *a*) Az abszolút érték jelen belüli kifejezést átalakítva kapjuk: $\left|\frac{1}{x}\right|>\frac{1}{2021}$, ahol $x\neq 0$. Ebből az következik, hogy $|x|<2021$, vagyis $-2020\leqslant x\leqslant 2020$, aminek 4040 egész szám felel meg, mivel $x=0$-ra nincs értelmezve az eredeti kifejezés.

b) Az x csak pozitív lehet. Áttérve 2-es alapú logaritmusra:

$$\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x-\frac{2}{3}\log_2 x=\frac{5}{3},$$

amiből következik, hogy

$$\log_2 x\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=\frac{5}{3}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{5}{6}\log_2 x=\frac{5}{3},$$

azaz $\log_2 x=2$.

Így $x=4$ a megoldás.

c) Alkalmasan csoportosítva, majd kiemeléssel teljes négyzeteket alakíthatunk ki:

$$\begin{aligned}(12x^2-12xy+3y^2)+(12y^2-12yz+3z^2)+(z^2-8z+16)=0 &\iff\\ 3(4x^2-4xy+y^2)+3(4y^2-4yz+z^2)+(z^2-8z+16)=0 &\iff\\ 3(2x-y)^2+3(2y-z)^2+(z-4)^2=0.&\end{aligned}$$

A négyzetek összege akkor és csakis akkor nulla, ha minden tag nulla, így $2x=y$, $2y=z$ és $z=4$.

Az egyenlet megoldása tehát: $x=1$, $y=2$, $z=4$.

2. *a) Igazoljuk, hogy* $\log_{2020} 2021$ *irracionális szám.* (*4 pont*)

b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos 2x + \cos \frac{3}{5}x = 2. \qquad (6\ pont)$$

c) A következő két állításról döntsük el, hogy igaz vagy hamis. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

I. *Van olyan* 6 *csúcsú nem összefüggő egyszerű gráf, amelyiknek minden csúcsa másodfokú.*

II. *Ha egy* 6 *csúcsú összefüggő egyszerű gráfban a fokszámok* $1, 1, 1, 3, 3, 3$, *akkor a gráfban biztosan van kör.*

Megoldás. *a*) Indirekt bizonyítással igazoljuk (*reductio ad absurdum*):

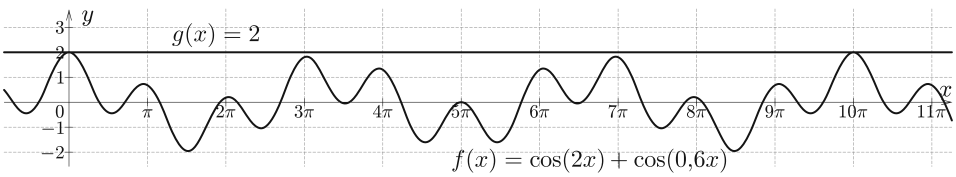
Tegyük fel az igazolandó állítás tagadását, vagyis azt, hogy $\log_{2020} 2021$ racionális szám. Ha ez igaz lenne, akkor léteznének p és q pozitív egész számok úgy, hogy $\log_{2020} 2021 = \frac{p}{q}$, ahonnan $2021 = 2020^{\frac{p}{q}}$, ami ekvivalens azzal, hogy $2021^q = 2020^p$, ami lehetetlen, mert az egyik szám páratlan, a másik páros.

Ellentmondásra jutottunk, ezzel bizonyítottá vált, hogy $\log_{2020} 2021$ irracionális szám.

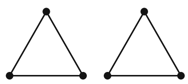
b) Mivel a koszinuszfüggvény értéke legfeljebb 1, a $\cos 2x + \cos \frac{3}{5}x = 2$ egyenlet csak olyan x értékekre teljesül, amelyekre egyszerre fennáll a $\cos 2x = 1$ és a $\cos \frac{3}{5}x = 1$ egyenlőség is.

Az első egyenletből $2x_1 = 2k\pi$, azaz $x_1 = k\pi$, $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. A második egyenletből $\frac{3}{5}x_2 = 2n\pi$, azaz $x_2 = \frac{10}{3}n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. A gyökök akkor lesznek egyenlőek, ha $k\pi = \frac{10}{3}n\pi$, vagyis $3k = 10n$. Ha m tetszőleges egész, az utóbbi egyenlőség akkor teljesül, ha $k = 10m$, $n = 3m$, és így az eredeti egyenlet megoldása $x = 10m\pi$ $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Megjegyzés. A függvényt ábrázolva:



c) I. *Igaz.* Van ilyen gráf:



II. *Igaz.* A fokszámok összege 12, amiből az következik, hogy a gráfnak 6 éle van, egy 6 csúcsú fának pedig csak 5 éle van. Tehát a gráf nem lehet fa, tartalmaznia kell kört.

3. *Evelin minden nap iszik egy kávét vagy egy teát. Ha tegnap kávét ivott, akkor* 0,3 *valószínűséggel iszik ma is. Ha teát ivott tegnap, akkor* 0,6 *valószínűséggel ma kávét iszik.*

a) Ha Evelin tegnap kávét ivott, mekkora a valószínűsége, hogy holnap teát iszik? *(4 pont)*

b) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik kávét? *(7 pont)*

c) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik teát? *(2 pont)*

Megoldás. Evelin egy adott napon $P(K)$ valószínűséggel kávét, $P(T)$ valószínűséggel teát iszik, és mivel minden nap iszik kávét vagy teát, ezért $P(T) = 1 - P(K)$. Az érthetőség kedvéért indexeljünk: $P(K_{n+1} \mid K_n)$ jelölje a következő valószínűséget: feltéve, hogy egy adott napon kávét ivott, akkor a rákövetkező napon is kávét iszik. (Világos, hogy $P(K_{n+2}) = P(K_{n+1}) = P(K_n) = P(K)$ és $P(T_{n+2}) = P(T_{n+1}) = P(T_n) = P(T)$.) A feladat szerint $P(K_{n+1} \mid K_n) = 0{,}3$, amiből az következik, hogy $P(T_{n+1} \mid K_n) = 0{,}7$ (vagyis 0,7 valószínűséggel iszik ma teát, ha tegnap kávét ivott). Ugyanezt a jelölést alkalmazva a feladat szerint $P(K_{n+1} \mid T_n) = 0{,}6$, amiből pedig az következik, hogy $P(T_{n+1} \mid T_n) = 0{,}4$.

a) Ha tegnap kávét ivott *és* holnap teát iszik, az úgy lehet, hogy ma teát ivott, feltéve, hogy tegnap kávét ivott, *vagy* ma kávét ivott, feltéve, hogy tegnap is kávét ivott, vagyis a keresett valószínűség:

$$\begin{aligned}
&P(T_{n+2} \mid K_n) = \\
&= P(T_{n+1} \mid K_n) \cdot P(T_{n+2} \mid T_{n+1}) + P(K_{n+1} \mid K_n) \cdot P(T_{n+2} \mid K_{n+1}) = \\
&= 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 07 = 0{,}49.
\end{aligned}$$

b) Tegnap kávét ivott $P(K)$ valószínűséggel vagy teát $P(T)$ valószínűséggel. Hogy ma kávét igyon, ahhoz az kell, hogy feltéve, hogy tegnap kávét ivott, akkor ma is kávét igyon, *vagy* ma kávét igyon, feltéve, hogy tegnap teát ivott: $P(K) = P(K_n) \cdot P(K_{n+1} \mid K_n) + P(T_n) \cdot P(K_{n+1} \mid T_n)$. Beírva ebbe az egyenletbe a valószínűségeket és a $P(K)$ és $P(T)$ közötti összefüggést, azt kapjuk, hogy $P(K) = P(K) \cdot 0{,}3 + \left[1 - P(K)\right] \cdot 0{,}6$. Ebből a keresett valószínűség $P(K) = \frac{6}{13} \approx 0{,}462$, azaz Evelin hosszú távon a napok 46,2%-ában iszik kávét.

c) $P(T) = 1 - P(K) = 1 - \frac{6}{13} = \frac{7}{13} \approx 0{,}538$, ami azt jelenti, hogy hosszú távon Evelin a napok 53,8%-ában teát iszik.

4. *Egy n oldalú szabályos sokszög alapú egyenes hasáb magassága és alaplapjának az oldalai is* 1 cm*-esek.*

a) Ha a hasáb lapátlóinak és testátlóinak összege 6960*, akkor hány csúcsa van az alaplapját képező szabályos n-szögnek?* *(5 pont)*

b) Mekkora ennek a hasábnak a felszíne és a térfogata? *(7 pont)*

Megoldás. *a*) Az n oldalú szabályos sokszög átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. Így a hasáb alap- és fedőlapján összesen $n(n-3)$ átló van.

A hasáb oldallapjai négyzetek, ezek átlóinak a száma összesen $2n$. A hasáb testátlóinak a száma ugyancsak $n(n-3)$. Tehát az összes átló

$$n(n-3)+2n+n(n-3)=6960,$$

amiből a műveletek elvégzése és rendezés után a következő egyenletet kapjuk: $n^2-2n-3480=0$. A másodfokú egyenlet megoldásai: $n_1=60$, $n_2=-58$. Az n_2 negatív szám, így nyilvánvalóan nem lehet megoldás, tehát $n_1=60$ a jó megoldás. Így a szabályos sokszögnek 60 oldala van.

b) A hasáb alapját alkotó szabályos 60-szöget 60 darab olyan egyenlő szárú háromszögre tudjuk bontani, amelyek mindegyikének az alapja a szabályos sokszög egy-egy oldala, szárai pedig a szabályos sokszög köré írható kör sugarai és szárszöge $\frac{360^\circ}{60}=6^\circ$. Egy ilyen háromszög magassága $\frac{0{,}5}{\operatorname{tg}3^\circ}$, így az alaplap területe:

$$T=60\cdot\frac{1\cdot\frac{0{,}5}{\operatorname{tg}3^\circ}}{2}\approx 286{,}217\ (\mathrm{cm}^2).$$

A felszínt az alap és a fedőlap, valamint a 60 db 1 cm oldalú négyzet alkotja, ezek területének az összege adja a felszínt: $2\cdot 286{,}217+60\cdot 1=632{,}434\ (\mathrm{cm}^2)$.

A hasáb magassága $h=1$ cm, így a térfogata

$$V=T\cdot h\approx 286{,}217\cdot 1=286{,}217\ (\mathrm{cm}^3).$$

II. rész

5. *a*) *Adjuk meg az $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény legbővebb értelmezési tartományát.* *(1 pont)*

b) *Mennyi az $f(x)$ függvény határértéke + végtelenben, azaz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$* *(3 pont)*

c) *Mennyi az $f(x)$ függvény maximuma a $[0;2]$ intervallumon, és ezt hol veszi fel?* *(6 pont)*

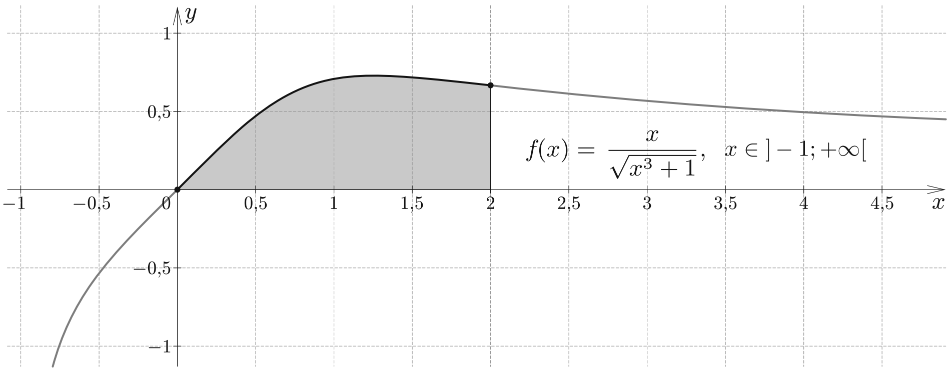
d) *Számítsuk ki a következő határozott integrál értékét:*

$$\int_0^2 (x^3+1)f^2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3\ pont)$$

e) *Mennyi annak a „serleg" alakú testnek a térfogata, mely testet úgy kapjuk meg, hogy az $f(x)$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon vett grafikonját az x tengely körül megforgatjuk? (Természetesen a nyak feletti részről van szó és az egység legyen* 1 cm. *A kép csak illusztráció.)* *(3 pont)*

Megoldás. *a*) A nevezőben levő négyzetgyök miatt (x^3+1) csak pozitív lehet, vagyis $x^3>-1$. Így az értelmezési tartomány: $]-1;+\infty[$.

Megjegyzés. A függvény grafikonja:



b) $$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2}{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x+\frac{1}{x^2}}}=0,$$

mivel
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

c) Az $f(x)$ függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a deriváltja zérus:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)'=\frac{1\cdot\sqrt{x^3+1}-x\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}=0.$$

Ez akkor valósulhat meg, ha a számláló nulla (és a nevező ugyanekkor nem nulla), vagyis:
$$\sqrt{x^3+1}=\frac{3x^3}{2\sqrt{x^3+1}},$$
ami akkor teljesül, ha $2(x^3+1)=3x^3$, azaz $x=\sqrt[3]{2}\approx 1{,}2599$. Az itt felvett érték:

$$f\big(\sqrt[3]{2}\big)=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}=\sqrt[6]{\frac{4}{27}}\approx 0{,}7274.$$

Ahhoz, hogy valóban szélsőértékről van szó, nézzük meg, megvalósul-e a deriváltfüggvény előjelváltása ezen a helyen. Ehhez az $f'(x)$ számlálóját közös nevezőre hozással majd az emeletes tört eltüntetésével alakítsuk át:

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^3+1}-x\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}=\frac{\frac{2(x^3+1)-3x^3}{2\sqrt{x^3+1}}}{x^3+1}=\frac{2-x^3}{2(x^3+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

(*Megjegyzés:* Ebből az alakból is kiolvasható az előbbi zérushely értéke.)

Foglaljuk táblázatba a függvény viselkedését a $[0;2]$ intervallumon:

x	0	$0 < x < \sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2} < x < 2$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\uparrow$ szigorúan monoton növekszik	maximum: $\sqrt[6]{\frac{4}{27}} \approx 0{,}7274$	$\downarrow$ szigorúan monoton csökken	$\frac{2}{3} \approx 0{,}6667$

d)

$$\int_0^2 (x^3+1)f^2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (x^3+1)\left(\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

e) A keresett forgástest térfogata cm^3-ben:

$$V = \pi\int_0^2 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^2 \frac{x^2}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\int_0^2 \frac{(x^3+1)'}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3}\big[\ln(x^3+1)\big]_0^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\ln 9 \approx 2{,}3009.$$

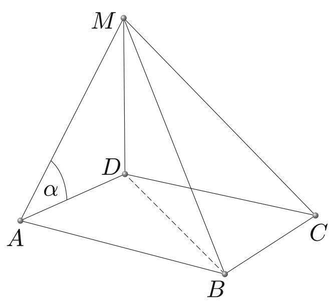
6. *Emeljünk egy merőleges szakaszt az $ABCD$ téglalap síkjára a D pontban úgy, hogy a szakasz másik végpontjára, M-re igazak a következők: $MA = 12\sqrt{2}$, $MB = 4\sqrt{34}$, $MC = 20$.*

Ha a hosszúságokat centiméterben mérjük, számítsuk ki:

a) *a téglalap oldalainak hosszát;* (*7 pont*)

b) *az MAB háromszög síkjának az $ABCD$ téglalap síkjával bezárt szögét;* (*6 pont*)

c) *az $ABCDM$ test térfogatát.* (*3 pont*)



Megoldás. *a*) Legyen $AD = a$, $DC = b$ és $MD = h$. Ekkor Pitagorasz tétele alapján a téglalap átlójára teljesül, hogy $BD^2 = a^2 + b^2$ és az MDA, MDB, valamint az MDC derékszögű háromszögekben is rendre igaz, hogy:

$$MA^2 = AD^2 + MD^2, \quad MB^2 = BD^2 + MD^2$$

és

$$MC^2 = CD^2 + MD^2.$$

Tehát a megadott hosszúságadatokkal:

$$(1) \qquad 288 = a^2 + h^2,$$

$$(2) \qquad 544 = a^2 + b^2 + h^2,$$

$$(3) \qquad 400 = b^2 + h^2.$$

Innen (1) + (3) alapján: $288 + 400 = a^2 + b^2 + 2h^2$; felhasználva a (2) összefüggésből adódó $a^2 + b^2 = 544 - h^2$ egyenlőséget, következik, hogy $h^2 = 144$, azaz $h = 12$. $DM = h$ ismeretében már egyszerűen kiszámíthatók a téglalap oldalai: $AD = a = 12$ (cm), $DC = b = 16$ (cm).

b) Az MAB háromszög síkjának az $ABCD$ téglalap síkjával való metszésvonala AB, amelyre AD és MD egyaránt merőleges. A két sík hajlásszöge megegyezik az MAD derékszögű háromszög A-nál lévő szögével (α), így ebben a háromszögben

$$\sin\alpha = \frac{MD}{MA} = \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

amiből adódik, hogy a keresett hajlásszög $\alpha = 45°$.

c) A téglalap alapú gúla térfogata:

$$V = \frac{T \cdot h}{3} = \frac{a \cdot b \cdot h}{3} = \frac{12 \cdot 16 \cdot 12}{3} = 768 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

7. *Képzeljük el, hogy a* 2025*-ös évben vagyunk.* Pénzügytudatos Patrik *pontosan öt évvel ezelőtt,* 2020*-ban egy nagyobb összeghez jutott és azzal a céllal vásárolt ebből* 10 *millió forintért egy államkötvényt (vagyis befektette a pénzét), hogy az öt éves futamidő leteltével, amikor felveszi a kamatokkal megnövelt összeget, azt felhasználja lakásvásárlásra.*

a) *Öt év elteltével mekkora lett a kamatokkal növelt összeg, ha a kamat számítása a következők szerint történik? Az öt éves futamidőt hat kamatozási periódusra osztották, és az egyes időszakaszokban változó mértékű kamatlábat állapítottak meg. Az első félévben az éves kamat* 3,50% (*vagyis félévre* 1,75%)*, a második félévre az éves kamat* 4,00% (*vagyis erre a félévre* 2%)*. A második évtől kezdve már egész évente változik a kamat és ezen belül egész évre vonatkozóan ugyanakkora mértékű: a második évre* 4,50%*, a harmadikra* 5,00%*, a negyedikre* 5,50%*, végül az ötödikre* 6,00%*. Lényeges továbbá, hogy az egy-egy kamatozási periódus végén létrejött, a névérték kamattal megnövelt összege képezi a következő kamatperiódus során a kamatszámítás alapját* (*kamatos kamat*). (*5 pont*)

b) *Pénzügytudatos Patrik házastársa is rendelkezik egy öt éves futamidejű, hasonló névértékű, de fix kamatozású állampapírral, melynek az éves kamata* 5% *és ez is éppen* 2025*-ben jár le. Ezen kívül a házaspár kap az államtól* 10 *millió forint vissza nem térítendő családalapítási támogatást. Ezt a három forrást felhasználva százezresekre kerekítve mekkora összegből tud a házaspár lakást vásárolni?* (*5 pont*)

c) *Pénzügytudatosék mellett másik három baráti házaspár is lakást vásárol, mégpedig valamennyien egy új építésű lakóparkban, amely a* 10 *lakásos „Zöld Ház”-ból és a* 20 *lakásos „Fehér Ház”-ból áll. A beruházó a viták elkerülése végett sorsolással dönt arról, hogy a* 30 *lakás közül melyiknek melyik család legyen a tulajdonosa.*

A sorsolásnál ügyelnek arra, hogy bármelyik lakáshoz ugyanakkora eséllyel lehessen hozzájutni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négy házaspár közül kettő a „Zöld Ház”-ba, a másik kettő pedig a „Fehér Ház”-ba költözhet? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az öt éves futamidő végén kapott összeg (forintra kerekítve):

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}0175 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}045 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}055 \cdot 1{,}06 = 12\,734\,986{,}94 \approx 12\,734\,987 \text{ Ft.}$$

b) Éves 5%-os fix kamatlábbal és kamatos kamattal számolva:

$$10\,000\,000 \cdot 1{,}05^5 = 12\,762\,815{,}63 \approx 12\,762\,816 \text{ Ft.}$$

A három forrás összege: $12\,734\,987 + 12\,762\,816 + 10\,000\,000 = 35\,497\,803$, ami százezresekre kerekítve 35 500 000 Ft. Ekkora összegből tud a Pénzügytudatos-házaspár lakást vásárolni.

c) Az összes eset száma: $n = \binom{30}{4}$, a kedvező esetek száma: $k = \binom{10}{2} \cdot \binom{20}{2}$. Így a keresett valószínűség:

$$P = \frac{k}{n} = \frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{20}{2}}{\binom{30}{4}} = \frac{\frac{10\cdot 9}{2} \cdot \frac{20\cdot 19}{2}}{\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = 0{,}312.$$

8. *a*) *Adott az* $\{x_n\}$ *valós számsorozat, ahol* $x_1 = \sqrt{2}$ *és* $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, *ha* $n \geqslant 1$. *Igazoljuk, hogy az* $\{x_n\}$ *sorozat konvergens és határozzuk meg* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *értékét.* (*7 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy ha az* x *és* y *pozitív számok összege* 2, *akkor*

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geqslant 4. \qquad (5 \text{ pont})$$

Forrás:
`https://varlexikon.hu/varpalota`

Egy négyzet alakú várban a csúcsoknál egy-egy torony áll, az Északi Torony (E), *a Keleti Torony* (K), *a Déli Torony* (D) *és a Nyugati Torony* (N). *Őrségben a várfal tetején lévő négy falszakaszon sétálnak a várőrök. Az Északi Toronyban lévő őrszobából indulnak és toronytól toronyig haladva az* EK, KD, DN *és* NE *közül mindig pontosan hat falszakaszon haladnak végig egy őrjárat során. (Értelemszerűen egy falszakasz többször is szerepelhet egy őrjárat során, például akkor, ha a következő toronynál egyből visszafordul a várőr.)*

c) *Legfeljebb hány tagú a várőrség, ha mindegyikük különböző útvonalon sétált? (Az őrjáratnak nem kell feltétlenül az Északi Toronynál végződnie. Két útvonalat nem tekintünk különbözőnek, ha ugyanazokat a falszakaszokat tartalmazza ugyanabban a sorrendben.)* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Bebizonyítjuk, hogy a sorozat korlátos és szigorúan monoton, ebből már következik a konvergenciája.

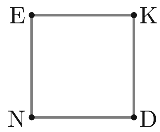
A teljes indukció módszerével igazoljuk, hogy a sorozat minden tagjára igaz: $0 < x_n < 2$. Ha $n = 1$, akkor $x_1 = \sqrt{2}$, melyre igaz. Tegyük fel, hogy $0 < x_n < 2$. Ekkor $0 \leqslant x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} \leqslant \sqrt{2+2} = 2$, tehát a sorozat korlátos.

A továbbiakban azt igazoljuk, hogy a sorozat szigorúan monoton növekvő: $x_{n+1} > x_n$, vagyis $\sqrt{2+x_n} > x_n$. Ez az állítás ekvivalens azzal, hogy $x_n^2 - x_n - 2 < < 0$, szorzattá alakítva: $(x_n - 2) \cdot (x_n + 1) < 0$, ami valóban igaz, mivel az előzőekben igazoltuk, hogy $0 < x_n < 2$. Tehát a sorozat szigorúan monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens.

Legyen $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Ekkor $a = \sqrt{2+a}$, ahonnan $a^2 - a - 2 = 0$, a másodfokú egyenlet gyökei $a_1 = -1$, $a_2 = 2$. Mivel $0 < a \leqslant 2$, az következik, hogy $a = 2$, vagyis a sorozat határértéke 2.

b) Ekvivalens átalakításokat végzünk a zárójelek felbontásával majd xy-al való beszorzással: $xy + x + y + 1 \geqslant 4xy$. Mindkét oldalból kivonunk xy-t és felhasználjuk, hogy $x + y = 2$, az $xy \leqslant 1$ egyenlőtlenségre jutunk. Ez teljesül, hiszen a két számra vonatkozó számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenségből következik:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$



c) Összeszámoljuk a lehetséges járőr-útvonalakat. Az Északi Toronyból (E) indulva két falszakasz közül lehet választani (EK vagy EN), így eddig a lehetséges útvonalak száma 2. A következő toronynál megint két falszakasz közül lehet választani, így $2 \cdot 2 = 4$ a különböző útvonalak száma két kiválasztott falszakasz után.

Hasonlóan folytatva a hat falszakaszon megtett őrjárat (séta) után

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 64$$

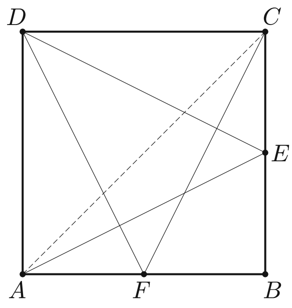
különböző útvonal van. Tehát legfeljebb 64 tagú a várőrség.

9. *a*) *Egy egységoldalú négyzet belsejében és oldalain lévő pontok mindegyikét kiszíneztük két szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy létezik két egyszínű pont, amelyek legalább* $\frac{\sqrt{5}}{2}$ *távolságra vannak egymástól.* (*6 pont*)

b) *A* $K(1;3)$ *középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében melyek azok a pontok, amelyeknek a koordinátái a következő egyenletrendszer gyökei?*

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{y-\frac{1}{2}} &= 3,\\ 16x^2 - 16xy + 4y^2 &= 9. \end{aligned} \qquad (8\ pont)$$

c) *Mekkora szöget zár be egymással az a két vektor, amelyek közös kezdőpontja a* $K(1;3)$ *pont, és az egyik az origóba, a másik pedig a* $P(10;0)$ *pontba mutat?* (*2 pont*)



Megoldás. *a*) Az $ABCD$ egységoldalú négyzetben a BC oldal felezőpontja legyen E, az AB oldal felezőpontja pedig F.

Ekkor $AE=ED=DF=FC=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ha az A és E pontok azonos színűek, akkor máris létezik két olyan pont, amelyek egymástól való távolsága éppen $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ha nem így van, akkor különböző színűek, az A az egyik szín, mondjuk piros, E pedig a másik szín, mondjuk kék. (Fordított esetben teljesen hasonló módon gondolhatjuk végig a továbbiakat, csak a színeket kell felcserélni.)

Hasonlóan gondolkodva következik, hogy D piros, majd F kék, és ha pedig C kék, akkor a megfelelő pontok F és C, ha viszont C piros, akkor a megfelelő pontok C és A, hiszen a négyzet átlója $AC=\sqrt{2}>\frac{\sqrt{5}}{4}$.

b) A második egyenletet 4-gyel osztva a bal oldalon kapott kifejezés teljes négyzetté alakítható: $(2x-y)^2=\frac{9}{4}$, amiből a

$$2x-y=\pm\frac{3}{2}$$

egyenlethez jutunk, ahonnan $y=2x+\frac{3}{2}$, vagy $y=2x-\frac{3}{2}$.

Ha $y=2x+\frac{3}{2}$, akkor az első egyenletbe való behelyettesítés után a

$$2^x+2^{2x+1}-3=0$$

egyenletet kapjuk. Ez 2^x-ben másodfokú:

$$2\cdot(2^x)^2+2^x-3=0,$$

amelynek a gyökei 1 és $-\frac{3}{2}$. Mivel $2^x>0$, valós megoldás csak a $2^x=1$-ből adódik, vagyis $x=0$. Mivel $y=2x+\frac{3}{2}$, így $y=\frac{3}{2}$.

Ha $y=2x-\frac{3}{2}$, akkor az előzőekhez hasonlóan a

$$2^x+2^{2x-2}-3=0$$

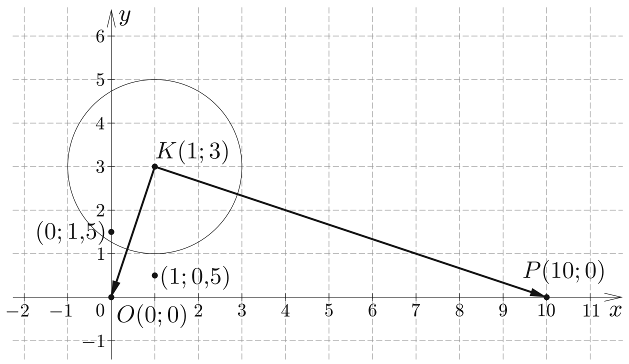
egyenlethez jutunk, vagyis a $(2^x)^2+4\cdot 2^x-12=0$, ugyancsak 2^x-ben másodfokú egyenletet kell megoldani. Ennek a gyökei 2 és -6. Itt is csak a pozitív gyök jöhet számításba. Vagyis $2^x=2$, amiből $x=1$, és $y=2x-\frac{3}{2}$ figyelembe vételével $y=\frac{1}{2}$.

Összegezve: az egyenletrendszer megoldása a $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ és az $\left(1;\frac{1}{2}\right)$ számpár.

Az adott $K(1;3)$ középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében azok és csak azok a pontok vannak, amelyeknek a koordinátái kielégítik a következő egyenlőtlenséget: $(x-1)^2+(y-3)^2<4$.

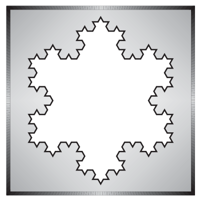
Ennek az egyenlőtlenségnek az egyenletrendszer megoldásából adódó két számpár közül csak a $\left(0;\frac{3}{2}\right)$ koordinátájú pont tesz eleget, így ez a feladat megoldása.

c) Kiszámítjuk a vektorok koordinátáit: $\overrightarrow{KO}(-1;-3)$ és $\overrightarrow{KP}(9;-3)$; majd képezzük a két vektor skaláris szorzatát: $\overrightarrow{KO}\cdot\overrightarrow{KP}=(-1)\cdot 9+(-3)\cdot(-3)=0$. Ebből következik, hogy a vektorok derékszöget zárnak be egymással.



Mihályi Gyula
Székesfehérvár

C gyakorlatok megoldása



C. 1627. *Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül, hogy $a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$ és $abc>0$, akkor $a>0$, $b>0$ és $c>0$.*

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Az egyenlőtlenségekben szereplő kifejezések szimmetrikusak, így elnevezés szempontjából felcserélhetők. Tegyük fel, hogy az a, b, c valós számokra teljesül, hogy

(1) $$a+b+c>0,$$

(2) $$ab+bc+ca>0,$$

(3) $$abc>0.$$

A (3) egyenlőtlenségből következik, hogy a, b, c egyike sem lehet 0, hiszen ekkor a szorzat is 0 lenne. Az $abc>0$ feltétel két esetben teljesülhet: ha az a, b, c számok mindegyike pozitív, vagy ha közöttük két negatív és egy pozitív szám van.

Ha mindhárom szám pozitív, akkor tekintve, hogy pozitív számok szorzata és összege is pozitív, az egyenlőtlenségek teljesülnek.

Indirekt tegyük fel, hogy a, b, c közül kettő negatív, egy pozitív és a fenti három egyenlőtlenség teljesül. Több módon is ellentmondásra juthatunk.

I. megoldás. Mivel a betűk szerepe szimmetrikus, legyen $a>0$ és $b,c<0$.

Az $a+b+c>0$ állítás akkor teljesül, ha $|a|>|b|+|c|$, ebből viszont az következik, hogy $|a|>|b|$ és $|a|>|c|$. Az $a>0$ és $b,c<0$ feltételek miatt $ab<0, bc>0$ és $ca<0$. Ennek alapján az $ab+bc+ca>0$ egyenlőtlenség akkor teljesül, ha $|bc|>|ab|+|ca|$.

Mivel $|a|>|c|$, ezért $|ab|>|bc|$, és $|a|>|b|$ miatt $|ac|>|bc|$. Adjuk össze az $|ab|>|bc|$ és $|ac|>|bc|$ egyenlőtlenségeket, így kapjuk az $|ab|+|ac|>2|bc|$ kifejezést. Csökkentve a jobb oldalt az $|ab|+|ac|>|bc|$ egyenlőtlenségre jutunk. Vagyis ha $b,c<0$ és $a>0$, akkor $ab+bc+ca<0$. Ezzel ellentmondásra jutottunk.

Antal Sára (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az ismeretlenek szimmetrikussága okán feltehető, hogy a és b negatív, c pedig pozitív. Tegyük fel, hogy a fenti egyenlőtlenségek teljesülnek.

Az $ab+bc+ca>0$ feltételt írjuk $b(a+c)+ca>0$ alakba. Látható, hogy $ac<0$, hiszen feltevésünk szerint $a<0$ és $c>0$. Az (1) feltétel átrendezhető $a+c>(-b)$ alakba. Mivel feltevésünk szerint $b<0$ és az egyenlőtlenségek teljesülnek, így a jobb oldal pozitív, s ennek okán a bal oldal is.

Viszont ha $a+c>0$, $b,c<0$ és $a>0$, akkor $b(a+c)<0$ és $ac<0$, ezért $b(a+c)+ac<0$, ami ellentmond kezdeti feltevésünknek.

Mivel ellentmondásra jutottunk, így a, b, c közül nem lehet egyszerre kettő negatív. Ha a fenti egyenlőtlenségek fennállnak, a, b, c között nem lehet sem egy, sem kettő, sem három negatív szám és egyikük sem lehet 0, így mindegyik csak pozitív lehet.

Farkas Orsolya (Miskolc, Földes F. Gimn., 11. évf.)

III. megoldás. A feladat a $p(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ valós együtthatós polinom, a, b, c valós gyökeinek vizsgálatával is megoldható. A szorzásokat elvégezve látható a gyökök és együtthatók közötti összefüggés:

$$p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc.$$

Tegyük fel, hogy az a,b,c számokra megadott egyenlőtlenségek teljesülnek, és vizsgáljuk meg a $p(x)$ polinom $x\leqslant 0$ helyeken vett helyettesítési értékeit. Ekkor $p(x)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc<0$, hiszen a bal oldal első három tagja nem pozitív, a konstans tag pedig negatív, így az a, b, c gyökök valóban csak pozitívak lehetnek.

Megjegyzés. Az I. megoldás kulcsgondolata: ha a, b, c közül 2 negatív, például a és b, akkor $c>-a-b$ kell legyen, hogy az $a+b+c>0$ egyenlőtlenség teljesüljön. Ez a felismerés egy másik megoldásra is lehetőséget nyit. Fontos megjegyezni, hogy $c>-a-b$ jobb oldala pozitív, hiszen feltettük, hogy $a,b<0$. Célszerű erre az $a=-A$, $b=-B$ jelöléseket bevezetni, ekkor A, B, c pozitívak. Az $ab+bc+ca>0$ egyenlőtlenség így átírható $AB>Ac+Bc=(A+B)c$ alakba; $c>A+B$ felhasználásával

$$AB>(A+B)^2=A^2+B^2+2AB,$$

ebből pedig $0>A^2+B^2+AB>0$ következik, ami ellentmondás.

Szabó Attila József, javító

254 dolgozat érkezett. 5 pontos 125, 4 pontos 31, 3 pontos 24, 2 pontos 27, 1 pontos 11, 0 pontos 12 dolgozat. Nem versenyszerű: 21 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 3 dolgozat.

C. 1650. *Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenséget, ahol $a, b, c > 1$:*

$$\log_{ab} c \leqslant \frac{\log_a c + \log_b c}{4}.$$

Megoldás. Alakítsuk az egyenlőtlenséget, felhasználva a logaritmus azonosságait:

$$4 \log_{ab} c \leqslant \log_a c + \log_b c,$$

$$4 \cdot \frac{1}{\log_c ab} \leqslant \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b},$$

$$\frac{4}{\log_c a + \log_c b} \leqslant \frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b}.$$

Mivel a-ról, b-ről és c-ről tudjuk, hogy mind 1-nél nagyobbak, ezért nem lehet egyik nevező se 0, sőt mindegyik pozitív. Legyen $x = \log_c a$ és $y = \log_c b$. Ekkor az egyenlőtlenség így néz ki:

$$\frac{4}{x+y} \leqslant \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Szorozzunk be a pozitív nevezőkkel, majd alakítsuk tovább az egyenlőtlenséget:

$$4xy \leqslant x^2 + 2xy + y^2,$$

$$0 \leqslant x^2 - 2xy + y^2,$$

$$0 \leqslant (x-y)^2.$$

Ez természetesen igaz, hiszen egy szám négyzete sosem negatív, mindig pozitív vagy 0.

Tehát ekvivalens lépésekkel nyilvánvalóan igaz állításhoz jutottunk, ezért a bizonyítandó állítás is igaz.

Szalanics Tamás (Nyíregyháza, Szent Imre Kat. Gimn., 11. évf.)

Megjegyzás. Nagyon gyakori volt, hogy a megoldó nem indokolta azt, hogy valamelyik logaritmikus kifejezéssel osztva vagy szorozva az egyenlőtlenséget, a relációs jel nem fordul meg a logaritmikus kifejezés pozitivitása miatt.

46 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 17 versenyző: Albert Ákos, Andó Lujza, Baksay Réka, Biró Ádám, Bodrogi Éva, Dobi Dorina Lili, Duska Máté, Egyházi Hanna, Fekete András Albert, Flódung Áron, Horváth Antal, HyunBin Yoo, Lénárt Réka, Molnár Réka, Németh László Csaba, Szalanics Tamás, Xu Yiling. 4 pontos 19, 3 pontos 6, 2 pontos 2, 1 pontos 2 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 4993. *Rajzoljunk az ABC derékszögű háromszög BC és CA befogói fölé négyzeteket. A négyzetek C-vel átellenes csúcsai legyenek D és E. Mutassuk meg, hogy az ABC háromszög köré írt kör átmegy a DE szakasz felezőpontján.*

(*4 pont*)

Megoldás. Ahol használjuk, ott jelölje G és H a két négyzet másik csúcsát, P pedig az ED szakasz felezőpontját. Mivel a négyzet átlója és oldala a közös csúcsban 45°-ot zárnak be, ezért $DCB\sphericalangle = ECH\sphericalangle (= 45^\circ)$, és így D, C és E egy egyenesen vannak. A P pont a nagyobb négyzet belsejében van. Ha a két négyzet egybevágó (vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú), akkor P és C megegyezik, az állítás nyilvánvaló.

I. megoldás. Legyen

$$AC = CH = HE = EA = a \quad \text{és} \quad BC = CG = GD = DB = b.$$

Hosszabbítsuk meg a DB, DG, EA és EH szakaszokat, metszéspontjukat jelölje I és F az *1. ábra* szerint. Az $IEFD$ négyszög négyzet, mivel mind a négy oldalának hossza $a+b$, és két szemben lévő szöge (az E, illetve D csúcsnál lévő) 90°.

Ekkor az átlók metszéspontja (és egyben felezőpontja) P. Ekkor $PF = IF/2 = ED/2 = PE$ és $EA = BF = a$, tehát a BPF és az APE háromszögek két-két oldalának hossza megegyezik. Az ezek által közbezárt szögek nagysága $AEP\sphericalangle = BFP\sphericalangle = 45^\circ$, hiszen a négyzet átlói az oldalakkal 45°-os szöget zárnak be. Tehát a két háromszög egybevágó, és így $BPF\sphericalangle = APE\sphericalangle$ is teljesül.

Mivel $BPF\sphericalangle = APE\sphericalangle$ és $EPF\sphericalangle = 90^\circ$, ezért $APB\sphericalangle = EPF\sphericalangle - APE\sphericalangle + BPF\sphericalangle = 90^\circ$ is teljesül. Tehát a P pont a Thálesz-tétel megfordítása miatt rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

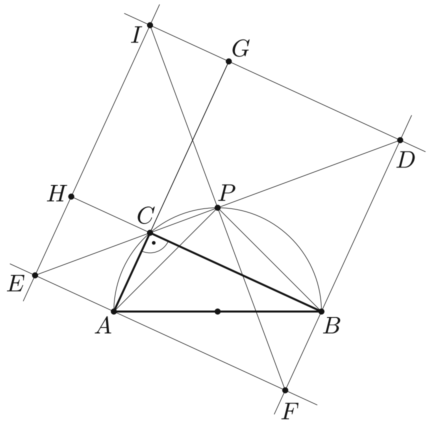
Tóth Bálint (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. A P pont egyenlő távol van az egymással párhuzamos EA és DG egyenestől, tehát rajta van a rájuk merőleges AG szakasz felező merőlegesén. Tehát $PG = PA$, az APG háromszög egyenlő szárú. Emiatt $PAG\sphericalangle = PGA\sphericalangle$ (*2. ábra*).

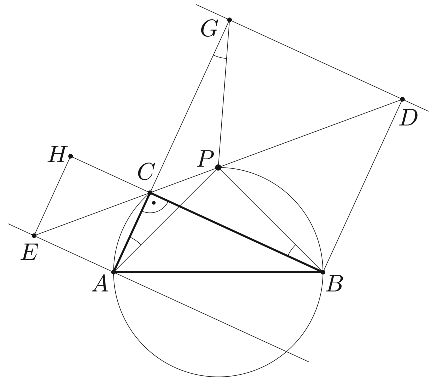
Másrészt az ED átlóra való szimmetria miatt $PGC\sphericalangle = PBC\sphericalangle$.

A fentiekből következik, hogy $PBC\sphericalangle = PGC\sphericalangle = PGA\sphericalangle = PAC\sphericalangle$, vagyis az A és a B pont a CP szakasznak ugyanazon a látószögkörívén van, tehát az A, B, P és C pontok egy körön vannak, és ezt kellett bizonyítani.

Tiszay Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) megoldása alapján

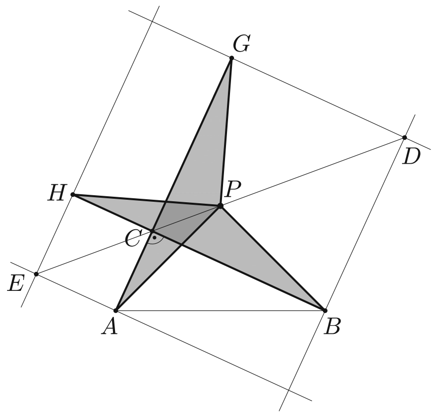


1. ábra

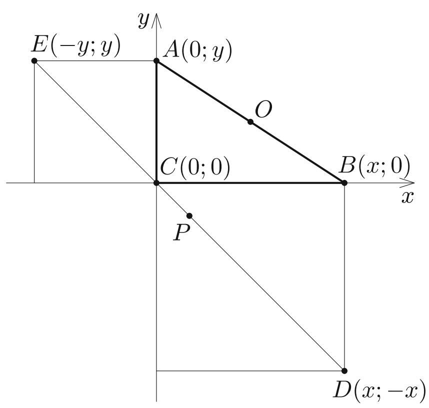


2. ábra

III. megoldás. Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy az APG háromszög egyenlő szárú és hogy $PBC\sphericalangle = PGA\sphericalangle = PAC\sphericalangle$, illetve $PB = PG$. Hasonló módon mutatható meg, hogy a BPH háromszög is egyenlő szárú. A fentiekből következik, hogy a PAG és a PBH háromszög szárai és alapon fekvő szögeik, vagyis így mindhárom szögük megegyezik, tehát a két háromszög egybevágó. Sőt, a P pont körüli forgatással megkapható egyik a másikból. Mivel $AG \perp HB$, ezért a forgatás szöge 90°, ami azt jelenti, hogy a PB szakasz és a PA szakasz is 90°-ot zárnak be egymással, tehát a Thálesz-tétel megfordítása miatt a P pont rajta van az AB szakasz Thalész körén, ami – szintén a Thálesz-tétel megfordítása miatt – az ABC háromszög köré írt köre (*3. ábra*).



3. ábra



4. ábra

IV. megoldás. Helyezzük el a háromszöget a derékszögű koordinátarendszerben a *4. ábra* szerint.

Legyen az ABC háromszög köré írható körének középpontja O. A Thalész-tétel miatt az O pont az AB oldal felezőpontja, így koordinátái $O\left(\frac{x}{2};\frac{y}{2}\right)$. A P pont az ED szakasz felezőpontja, így koordinátái $P\left(\frac{x-y}{2};\frac{y-x}{2}\right)$.

Az ABC háromszög köré írt körének sugara $r=|OC|=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}$.

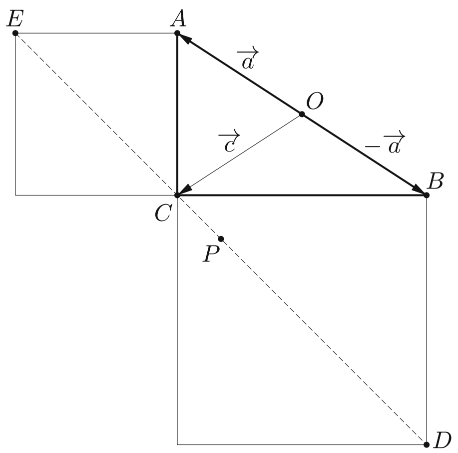
Számítsuk ki az OP távolságot:

$$|OP|=\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}-\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y-x}{2}-\frac{y}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{y}{2}\right)^2+\left(-\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}}=r.$$

Mivel $|OP|=|OC|$, ezért P rajta van az ABC háromszög köré írható körén.

Laki Anna (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn. és Koll., 11. évf.)

V. megoldás. Legyen az ABC háromszög köréírt körének közzéppontja, és egyben az origó O. Mivel a Thálesz-tétel megfordítása miatt C rajta van az AB szakasz Thalész körén, ezért az O pont az AB szakasz felezőpontja.



5. ábra

Legyen $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$, és vesszővel jelöljük a vektor $-90°$-os elforgatottját. Eszerint $\vec{p}$ $+90°$-os elforgatottja $-\vec{p}\,'$ (*5. ábra*).

Ekkor igazak a következők:

$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a},$$

$$\vec{e}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\overrightarrow{AC}'=\\=\vec{a}+\vec{c}\,'-\vec{a}\,',$$

$$\overrightarrow{BC}=\vec{c}-(-\vec{a})=\vec{c}+\vec{a},$$

$$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{BC}'=-\vec{c}\,'-\vec{a}\,',$$

$$\vec{d}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}=-\vec{a}-\vec{c}\,'-\vec{a}\,'.$$

Egy szakasz felezőpontjába mutató vektor a két végpontba mutató vektorból kapható meg:

$$\vec{p}=\frac{\vec{d}+\vec{e}}{2}=\frac{-\vec{a}-\vec{c}\,'-\vec{a}\,'+\vec{a}+\vec{c}\,'-\vec{a}\,'}{2}=-\vec{a}\,'.$$

Tehát P az O-tól $|-\vec{a}\,'|=|\vec{a}|$ távolságra van, ami épp a kör sugara, azaz a P pont ráéesik a körre.

Horváth Anikó (Szegedi Radnóti Miklós Kís. Gimn., 10. évf.)

103 dolgozat érkezett. 4 pontos 73, 3 pontos 18, 2 pontos 2, 1 pontos 4, 0 pontos 6 dolgozat.

B. 5070. *Egy szigeten kétféle ember él. Az igazmondók mindig igazat mondanak, a hazudósok mindig hazudnak. Tíz szigetlakó között kiosztottuk az* $1, 2, \ldots, 10$ *számokat. Mindenki egy-egy különböző számot kapott. Ezután mindenkinek feltették a következő három kérdést: „A te számod páros?", „A te számod osztható* 4*-gyel?", „A te számod osztható* 5*-tel?". Az első kérdésre hárman, a másodikra hatan, a harmadikra pedig ketten válaszoltak igennel. Mely számok vannak hazudósoknál?*

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Minden számhoz hozzárendeljük azt a személyt, akinél az adott szám van. Így most mindegyik szám vagy igazmondó, vagy hazudós.

Nézzük az első kérdést. „A te számod páros?". Tegyük fel, hogy a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ halmazból x fő igazmondó van. Ekkor ebből a halmazból pontosan x fő mondott igent a kérdésre. A páratlan számok $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazában, ha x' igazmondó van, akkor ez az x' fő nemmel válaszolt, de a többi $5 - x'$ hazudós igennel, így összesen $x + 5 - x'$ igen válasz érkezett. A feltétel alapján $3 = x + 5 - x'$, tehát $x' = 2 + x$.

Vegyük a második kérdést. „A te számod osztható 4-gyel?". Tegyük fel, hogy a 4-gyel oszthatóak $\{4, 8\}$ halmazából y fő igazmondó. Ekkor itt y darab igen válasz érkezett, míg a 4-gyel nem oszthatóak $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\}$ halmazában y' igazmondó van, akkor a maradék $8 - y'$ hazudóstól ismét igen válasz érkezett, így az igenek száma $y + 8 - y'$. Erre a kérdésre összesen 6 igen válasz érkezett, vagyis $6 = y + 8 - y'$, azaz $y' = 2 + y$.

Tekintsük végül a harmadik kérdést. „A te számod osztható 5-tel?" Ha az 5-tel oszthatóak $\{5, 10\}$ halmazában z fő igazmondó van, akkor a maradék $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból a z' igazmondó nemmel válaszolt, a $8 - z'$ hazudós pedig ismét igennel. A feltétel szerint az igen válaszok száma $2 = z + 8 - z'$, tehát $z' = z + 6$.

Mivel az igazmondók száma állandó, és

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} =$$
$$= \{4, 8\} \cup \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10\} = \{5, 10\} \cup \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\},$$

ezért $x + x' = y + y' = z + z'$. Beírva korábbi összefüggéseinket:

$$2 + 2x = 2 + 2y = 6 + 2z,$$

majd az egyszerűsítések után:

$$x = y = z + 2.$$

Az $\{5, 10\}$ halmazban z darab igazmondó van, így $0 \leqslant z \leqslant 2$, ugyanígy a $\{4, 8\}$ halmazban y igazmondó van, tehát $0 \leqslant y \leqslant 2$. E két feltétel alapján kapjuk, hogy $z = 0$ és $y = x = 2$.

Az $y = 2$ miatt a 4 és 8 igazmondók, viszont az $x = 2$ miatt a $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ további elemei már hazudósak. Továbbá a $z = 0$ miatt 5 és 10 mindketten hazudósak, viszont az első kérdésnél az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazban $x' = x + 2 = 4$ igazmondó van. Ezek közül az 5 hazudós, tehát a többi négy biztosan igazmondó. Összefoglalva:

Igazmondók: $1, 3, 4, 7, 8, 9$

Hazudósak: $2, 5, 6, 10$.

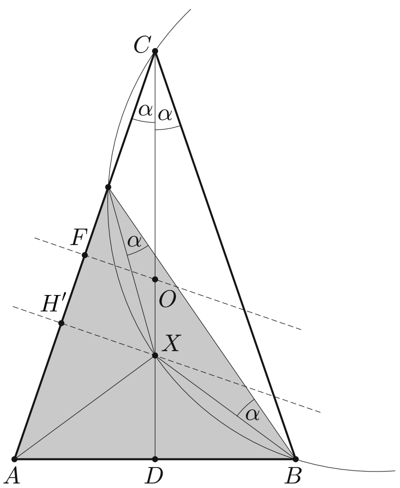
Ez az eredmény meg is felel a feladat összes feltételének, mert az első kérdésre hárman mondanak igent $\{4, 5, 8\}$, a másodikra hatan $\{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$, a harmadikra pedig ketten $\{2, 6\}$.

Bán-Szabó Áron (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 140 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 116 versenyző, 3 pontos 13, 2 pontos 9 tanuló dolgozata. 1 pontot kapott 2 tanuló.

B. 5080. *Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőpontja D, AC szárának C-hez közelebbi harmadolópontja H. A BCH kör a CD egyenest a C és az X pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $CX = \frac{4}{3}r$, ahol r az ABC kör sugara.*

(*4 pont*)



Megoldás. Legyen H' az AC szár másik harmadolópontja, F az AC felezőpontja, O pedig az ABC háromszög körülírt körének középpontja. Legyen az $ACB\sphericalangle$ szárszög 2α.

A CD egyenes az egyenlő szárú ABC háromszög szimmeteriatengelye, ezért $ACD\sphericalangle = DCB\sphericalangle = \alpha$. A feltétel szerint B, C, H, X egy körön vannak, így a kerületi szögekre vonatkozó tétel alapján $HBX\sphericalangle = HCX\sphericalangle = \alpha$ és $BCX\sphericalangle = BHX\sphericalangle = \alpha$. Ezzel megmutattuk, hogy BXH egyenlő szárú háromszög, $HX = XB$. Másrészt CD szimmetriatengely, emiatt $AX = BX$ is teljesül. Azt kaptuk, hogy az X pont az ABH háromszög körülírt körének középpontja. Az AH szakasz H' felezőpontjában az AC oldalra állított merőleges átmegy a körülírt kör X középpontján. Ugyanezen okból az AC szakasz F felezőpontjában az AC-re állított merőleges átmegy az O ponton. A befejezéshez látjuk, hogy a CFO és $CH'X$ derékszögű háromszögek α hegyesszöge közös és $FO||H'X$, tehát a két háromszög hasonló. A hasonlóság arányára kapjuk, hogy

$$\frac{CX}{CO} = \frac{CH'}{CF} = \frac{\frac{2}{3}AC}{\frac{1}{2}AC} = \frac{4}{3}.$$

A CO szakasz a körülírt kör r sugara, így egyszerű szorzással

$$CX = \frac{4}{3}r.$$

Baski Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ha a feladat többi adatait és jelöléseit megtartva harmadolás helyett a H pontot úgy választjuk az AC száron, hogy $HC = \lambda \cdot AC, (0 < \lambda < 1)$, akkor a CX szakasz hosszára, lényegében ugyanezekkel a lépésekkel, $CX = (1 + \lambda)r$ adódik.

Összesen 63 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 57, 3 pontot 3 tanuló. 2 pontos 2, 1 pontos további 1 versenyző dolgozata.

B. 5123. *Andi és Bori elosztotta egymás között a SET játék*[1] 81 *kártyalapját; Andihoz* 40*, Borihoz* 41 *lap került. Mindketten megszámolják, hogy a náluk lévő kártyák között hány olyan hármas van, ami SET-et alkot. Mennyi lehet az így kapott darabszámok összege?*

(*6 pont*)

I. megoldás. A SET játék bármely két kártyalapjára igaz, hogy pontosan 1 olyan SET van, amelyben mindkét lap szerepel, tehát egyértelműen meghatározzák a 3. lapot, amely még tagja ennek a SET-nek. Hiszen akkor alkot SET-et 3 lap, ha négy tulajdonság (szám, forma, szín, tartalom) szempontjából vagy mind azonos, vagy mind különböző. Például ha adott az „1-piros-tömör-ovális” és a „3-lila-tömör-hullámos”, akkor tudjuk, hogy a „2-zöld-tömör-rombusz” a SET 3. tagja. Így kiszámolhatjuk, hogy a játék 81 kártyalapja között összesen $\frac{\binom{81}{2}}{\binom{3}{2}} = 1080$ SET van[2].

Ezután vegyük azokat a SET-eket, amelyeknek Andihoz és Borihoz került legalább egy tagja. (Értelemszerűen vagy 2 lap van Andinál és 1 lap Borinál a SET-ből, vagy fordítva.)

Mivel az Andinál lévő 40 lap közül mindnek van közös SET-je a Borinál levő 41 lap mindegyikével, ez összesen $40 \cdot 41 = 1640$ SET lenne. De így mindet kétszer számoltuk, mert ha például h_1, h_2 és h_3 lapok egy SET-et alkotnak, és közülük h_1 és h_2 Andinál, h_3 pedig Borinál van, akkor ezt a SET-et számoltuk a $\{h_1, h_3\}$ és $\{h_2, h_3\}$ párokra is.

Így ha mindketten megszámolják, hogy a náluk lévő kártyák között hány olyan hármas van, amely SET-et alkot, az így kapott darabszámok összege:

$$1080 - \frac{40 \cdot 41}{2} = 260.$$

Feczkó Nóra (Budapest, Budai Ciszterci Szent Imre Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. Képzeljük úgy, hogy kezdetben Borinál volt az összes kártya, majd sorban egyesével adott ezek közül 40-et Andinak.

Lemma. *Amikor az n-edik kártyát* ($1 \leqslant n \leqslant 40$) *adja át Bori Andinak, akkor azon SET-ek száma, amelyek mindhárom lapja ugyanazon kézben van, pontosan* ($41 - n$)*-nel csökken* (*függetlenül attól, hogy melyik lapot adja Bori Andinak*).

[1] `https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml`.

[2] Az eddig elmondottak bizonyítással együtt szerepeltek a feladatban is belinkelt `https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml` cikkben is.

A lemma bizonyításához felhasználjuk a következő tényt: Ha egy lapot kiveszünk a pakliból, a maradék 80 lap párokba rendezhető úgy, hogy a kivett lap éppen egy-egy ilyen párral együtt alkot SET-et, más SET-ben pedig nincsen benne. (Lásd: `https://www.komal.hu/cikkek/2008-02/SET.h.shtml` cikk 3. pont.)

A lemma bizonyítása. Amikor egy kártyát átad Bori Andinak, az ehhez a kártyához tartozó párok közül néhány pár már egészen Andinál van (ezekből egy-egy új, egy kézben levő SET keletkezik), néhány pár pedig még egészen Borinál maradt (ezeknél elveszik egy-egy eddig egy kézben levő SET); míg a többi pár két tagja külön kézben van, ezek nem befolyásolják a SET-ek számának változását.

Most tekintsük az n-edik kártya átadásának pillanatát és az ehhez a kártyához tartozó párokat. Ha ekkor a_n olyan pár van, amely már teljesen Andinál van, akkor ezek összesen $2a_n$ helyet foglalnak el Andi kezében. Tehát $n-1-2a_n$ olyan kártya van Andi kezében, amelynek a párja Borinál van. Bori kezében marad $81-n$ lap, ezek közül tehát $n-1-2a_n$ darabnak Andinál van a párja, így a maradék $(81-n)-(n-1-2a_n)=82+2a_n-2n$ darab kártya összesen $b_n=41+a_n-n$ olyan párt fog alkotni, amelyek teljesen Borinál maradtak. Így az egy kézben levő SET-ek száma valóban $b_n-a_n=(41+a_n-n)-a_n=41-n$ darabbal csökken. $\square$

Így, mivel kezdetben mind az 1080 db SET Bori kezében volt, a 40. lap átadása után az egy kézben levő SET-ek száma:

$$1080-(40+39+\ldots+1)=1080-\frac{40\cdot 41}{2}=260.$$

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 10. évf.)
megoldása alapján

III. megoldás (vázlat). Nevezzük *közel egyenlő elosztásnak* azokat a kártyakiosztásokat, amelyekben egyik lánynál 41, a másik lánynál 40 lap van. Ha egy közel egyenlő állásnál a 41 lapos játékos átad egy kártyát a 40 laposnak – ezt nevezzük *átbillentő lépésnek* – akkor egy másik közel egyenlő kártyakiosztást kapunk. A harmadik megoldás a következő két észrevételre épül:

1. Egy átbillentő lépés hatására nem változik az egy kézben levő SET-ek száma (ez lényegében az előző megoldás lemmájának speciális esete $n=41$ esetén).
2. Egy közel egyenlő elosztásból indulva bármelyik másik közel egyenlő kiosztásba el lehet jutni átbillentő lépések sorozatával.

Ezen két észrevétel belátása után már elegendő egy általunk konkrétan kiválasztott közel egyenlő elosztásban megszámolnunk a SET-ek számát.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) és
Győrffy Ádám György (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., 12. évf.)
megoldásának felhasználásával

74 dolgozat érkezett. 6 pontos 58, 5 pontos 8, 4 pontos 2, 3 pontos 2, 0 pontos 2 dolgozat. Nem versenyszerű: 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (689–693.)

K. 689. Egy kosárlabdázó a szezon 6., 7., 8. és 9. mérkőzésén rendre 23, 14, 11 és 20 pontot szerzett. A pontátlaga a 9. mérkőzés után nagyobb volt, mint az 5. mérkőzés után. Az átlaga a 10. mérkőzés után 18 fölé ment. Mennyi az a legkisebb pontszám, amelyet a 10. mérkőzésen megszerezve elérhette ezt az állapotot?

K. 690. Peti gondolt egy pozitív egész számra és huszonhárom állítást fogalmazott meg a számmal kapcsolatban, melyek közül kettő szomszédos nem igaz, de a többi igaz.

1. Osztható 2-vel.
2. Osztható 3-mal.
3. Osztható 4-gyel.

$\vdots$

23. Osztható 24-gyel.

Peti a lehető legkisebb ilyen számra gondolt. Melyik ez a szám?

K. 691. Az $ABCDEFGH$ szabályos nyolcszög 2 egység hosszú BC és GF oldalára befelé a $BCIM$ és az $FGKL$ négyzetet rajzoljuk. Mekkora a területe annak a téglalapnak, amelyet az AH, KL, ED és IM egyenesek határolnak?

K. 692. Legfeljebb hány egymással nem egybevágó rácstéglalapra lehet felbontani egy 6×6-os négyzetet? Adjunk példát a felbontásra.

K. 693. Az $ABCD$ érintőnégyszög beírt körének középpontja O. Mutassuk meg, hogy a $DOC\sphericalangle$ és a $BOA\sphericalangle$ összege 180°.

Beküldési határidő: 2021. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1658–1664.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1658. Egy körlapot felosztunk hat egybevágó körcikkre. Mindegyikbe beleírunk egy kört, mely érinti a körcikk határoló ívét és két sugarát. A hat kör együttes területe az eredeti kör területének hányadrészét fedi le?

C. 1659. Az AB szakasz A pontjából induló a félegyenes a szakasszal $0° < \alpha < 90°$-os, a B-ből induló b félegyenes pedig $0° < \beta < 90°$-os szöget zár be. A két félegyenes az AB egyenese által meghatározott két különböző félsíkban helyezkedik el. Az AB átmérőjű kör az a-t A_1-ben, a b-t pedig B_1-ben metszi másodszor. Az A_1B_1 átmérőjű kör az a-ra illeszkedő egyenest A_2-ben, a b-re illeszkedő egyenest pedig B_2-ben metszi másodszor. Milyen összefüggés van α és β között, ha A_1B_1 és A_2B_2 merőlegesek?

Feladatok mindenkinek

C. 1660. Egy 61×61-es sakktábla négyzeteire elhelyezzük a pozitív egész számokat a bal felső sarokból indulva és a tábla sorainak megfelelően haladva 1-től 61^2-ig. Ezután első lépésben minden beírt szám előjelét negatívra változtatjuk. Második lépésben minden páros szám előjelét megváltoztatjuk, harmadik lépésben minden 3-mal osztható szám előjelét, és így tovább, amíg a lépés lehetséges. Mindezt elvégezve a táblán hány olyan 1×2-es téglalap lesz, amelyben a számok összege negatív?

C. 1661. Lottó Ottó, aki retteg a csökkenéstől, hagyományos lottót játszik. Itt 90 számból húznak ki öt számot. Ottó csak a következő feltételeknek eleget tevő számötöst jelöli be: az öt szám számjegyeit tekintve egy számjegy csak maximum egyszer szerepelhet, illetve miután leírta egymás mellé az öt számot növekvő sorrendben, a számjegyeknek is növekednie kell. Pl. 1, 2, 3, 46, 78. Hány, a feltételeknek megfelelő számötös létezik?

Javasolta: *Berkó Erzsébet* (Szolnok)

C. 1662. Az $a > 0$ valós paraméter mely értéke esetén lesz az $x^2 + a = \sqrt{x - a}$ egyenletnek pontosan egy megoldása a valós számok halmazán? Mi ekkor az egyenlet megoldása?

Feladatok 11. évfolyamtól

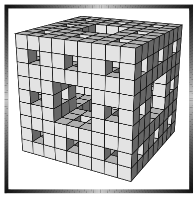
C. 1663. A k_1 és k_2 körök az E pontban kívülről érintik egymást. Az f és g egyenesek áthaladnak az E ponton. A két kör egyik közös külső érintője a k_1, k_2 köröket rendre a C, D pontokban érinti. Bocsássunk merőlegeseket a C pontból az f, g egyenesekre és kössük össze a merőlegesek talppontjait, így kapjuk a h egyenest. Hasonlóképpen adódik a D pontból kiindulva az m egyenes. Bizonyítsuk be, hogy h és m merőleges egymásra.

C. 1664. Az $ABCDEF$ konvex hatszög AD, BE, CF átlóinak mindegyike felezi a hatszög területét. Bizonyítsuk be, hogy ezek az átlók egy pontban metszik egymást.

❄

Beküldési határidő: 2021. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5158–5165.)

B. 5158. Az A, B, C és D pontokra a síkon $AB < CB$ és $CD < AD$ teljesül. Mutassuk meg, hogy az AB és CD szakaszok nem metszik egymást.

(*3 pont*)

B. 5159. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a

$$\left[\frac{2020-x}{x-1}\right]+\left[\frac{2021+x}{x+1}\right]=82$$

egyenletet, ahol $[c]$ a c szám egészrészét jelöli.

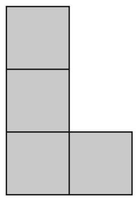
(*4 pont*) Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Esztergom)

B. 5160. Mennyi lehet $x+y+z$ értéke, ha

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{y-4}+3\sqrt{z-9}=\frac{x+y+z}{2}?$$

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5161. A 100×100-as sakktáblára letettünk 800 L-tetrominót. Mutassuk meg, hogy letehetünk még egy L-tetrominót a táblára. A tetrominók nem fednek át, és mindegyik pontosan a sakktábla 4 mezőjét fedi. L-tetrominó alatt az *ábrán* látható alakzatot, elforgatottjait és tükrözöttjeit értjük.



(*6 pont*)

B. 5162. Az ABC háromszög oldalai 9, 10 és 17 egység hosszúak. Mekkora az ABC háromszög külső szögfelezői által meghatározott háromszög területe?

(*5 pont*) Javasolta: *Tatár Zsuzsanna Mária* (Esztergom)

B. 5163. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsából induló, a legrövidebb oldalhoz közelebbi szögharmadoló az AB átfogót T-ben, a háromszög körülírt körét D-ben metszi. Mekkorák a háromszög hegyesszögei, ha a D-ből a befogók egyeneseire bocsátott merőlegesek talppontjai és T egy egyenesen vannak?

(*4 pont*)

B. 5164. Két játékos 3 győzelemig tartó kő-papír-olló párbajt játszik. Tegyük fel, hogy mindketten minden menetben véletlenszerűen (egymástól és a korábbi mutatásoktól függetlenül), $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$ eséllyel választják ki, hogy mit mutatnak. Adjuk meg a menetek számának várható értékét.

(*5 pont*)

B. 5165. Legyen k egy adott pozitív egész. Van-e olyan $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvény, amelyre

$$f(x)+f\big(f(x)\big)=x+k$$

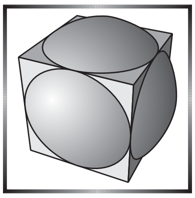
minden $x\in\mathbb{N}$ esetén?

(*6 pont*) Javasolta: *Lovas Márton* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2021. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (795–796.)

A. 795. A következő játékot játsszák n emberrel: adott $n+1$ kalap, melyek meg vannak számozva 1-től $n+1$-ig. Az emberek szemét bekötik, és mindegyikük fejére feltesznek egyet az $n+1$ kalap közül (a megmaradó kalapot elrejtik). Ezután az embereket sorba állítják, és leveszik a szemükről a kötést (mindegyik ember az előtte állókon lévő kalapok számait látja). Ezután hátulról előrefelé haladva mindegyik játékos sorban megtippeli a fején lévő kalap számát, de a tippek között nem lehet két egyforma (a játékosok hallják egymás tippjét).

Legfeljebb hány biztos találata lehet az n embernek, ha a játék ismertetése után megegyezhetnek egy közös taktikában?

Javasolta: *Kiss Viktor* (Budapest)

A. 796. Legyen $ABCD$ egy húrnégyszög, melynek AB és CD oldalegyenesei a P, BC és DA oldalegyenesei pedig a Q pontban metszik egymást. A P pontból az BC és DA oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai K és L, a Q pontból a AB és CD oldalegyenesekre állított merőlegesek talppontjai M és N. Az AC átló felezőpontja legyen F.

Bizonyítandó, hogy az FKN és FLM háromszögek körülírt körei és a PQ egyenes egy ponton megy át.

Balogh Ádám Péter (Szeged) ötlete alapján

❄

Beküldési határidő: 2021. április 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Kedves Olvasóink!

Szeretnénk felmérni a KöMaL és pontversenyeinek tartalmáról, ismertségéről alkotott véleményeket. Kérjük, hogy a honlapunk főoldaláról (`www.komal.hu`) elérhető kérdőívet töltsék ki, és biztassák erre a matematika vagy a természettudományok iránt érdeklődő ismerőseiket is.

kérdőív diákok részére

kérdőív nem diákok részére

Informatikából kitűzött feladatok

I. 532. Az angol ABC 26 betűjének kölcsönösen egyértelműen megfeleltetjük az 1-től 26-ig terjedő egészeket. Ismerjük N darab szó ($1 < N \leqslant 200$) egyes betűinek megfelelő számok összegét mindegyik szóra, de magát az eredeti betű-szám megfeleltetést nem.

Készítsünk programot, amely meghatározza a különböző szavak és azok értéke alapján a lehető legtöbb betű számértékét az alább leírt műveletsor segítségével.

Standard bemenet: az első sor a szavak N számát tartalmazza, az ezt követő N sor soronként egy szót és annak értékét tartalmazza szóközzel elválasztva. A szavak legalább 3, de legföljebb 10 betűsök.

Standard kimenet: írjuk ki ABC-sorrendben azon betűket és értéküket, amelyek meghatározhatók az alább leírt módszerrel. Ha egyik betű értéke sem meghatározható, akkor írjuk ki az „Egyetlen betű-szám megfeleltetést sem találtam" mondatot.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`6`	`a 3`
`kapu 57 / apa 22`	`k 24`
`satu 40 / apu 33`	`p 16`
`tas 26 / mar 31`	`u 14`

A megoldáshoz vezető eljárás addig ismétli az alábbi két lépést, amíg talál új betű-szám megfeleltetést:

a) keres olyan szót, amelyben pontosan egy ismeretlen értékű betű van, és megállapítja annak értékét;

b) összehasonlítja a szavakat, és ha talál két olyan szót, amely egy ismeretlen értékű betűben tér el egymástól, akkor ismét meghatározza az ismeretlen betű számértékét.

A fenti példában a `satu` és `tas` szavak alapján meghatározza az `u` betű értékét, ami így `14` lesz. Ezután az `apu` és `apa` szavak összehasonlításából megkapja az `a` betű értékét, ami `3`. Ezt követően az `apa` szóból a `p` betűt kapjuk, ami `16`, majd a `kapu` szóból a `k` értékét, ami `24`. További betű-szám megfeleltetést nem találunk, így kiírjuk ABC sorrendben az eddigi találatokat.

Beküldendő egy `i532.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

I. 533. Készítsük el a Mastermind játék számjegyes változatát táblázatkezelővel. A szabályok a következők:

- A játékot ketten játsszák, a feladó és a kitaláló. A kitaláló játékosnak maximum 10 lépése van, hogy a feladó négy számjegyből álló rejtett sorozatát kitalálja.
- A számjegyek nem ismétlődhetnek sem a rejtett, sem a tippsorozatban.
- Miután a feladó begépelte a szabályoknak megfelelő számnégyest, azok eltűnnek és kezdődhet a kitaláló tippelése. Ha a feladó nem a szabályok szerinti számnégyest szeretne feladni, akkor az ne váljon rejtetté.
- Minden tippelés sorában a jelzések azt mutatják, hogy hány számjegy van jó helyen, és hány szerepel a rejtett számban, de a tippben nem jó helyen. Az eltalált és jó helyen levő számjegyek száma az első; az eltalált, de rossz helyen levő számjegyek száma a második jelzés.

A táblázatot készítsük fel arra, hogy a helyesen, számjegyek ismétlődése nélkül beírt „Rejtett” számok ne jelenjenek meg, amíg a tippek segítségével eltalált és jó helyen levő számjegyek száma négy nem lesz. A jelzések se jelenjenek meg addig, amíg a kitaláló a szabályoknak nem megfelelően adja meg a tippet, illetve nincs mind a négy cella kitöltve. A tippek számára a mintának megfelelően 10 sort készítsünk elő.

Segédszámításokat a `H` oszloptól jobbra végezhetünk, melyek értelmezését feliratokkal segítsük. Megoldási módszerünket mutassuk meg, tehát ezeket a cellákat ne rejtsük el.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Rejtett					
2	Lépés						
3		Tippek				Helyén	Szerepel
4	10.						
5	9.						
6	8.						
7	7.						
8	6.						
9	5.						
10	4.	3	0				
11	3.	3	2	7	4	1	2
12	2.	3	2	4	6	2	1
13	1.	2	3	8	1	0	2

Megfejtés közben

	A	B	C	D	E	F	G
1		Rejtett					
2	Lépés	3	0	4	2		
3		Tippek				Helyén	Szerepel
4	10.						
5	9.						
6	8.						
7	7.						
8	6.						
9	5.						
10	4.	3	0	4	2	4	0
11	3.	3	2	7	4	1	2
12	2.	3	2	4	6	2	1
13	1.	2	3	8	1	0	2

Megtalált megoldás

Beküldendő egy tömörített `i533.zip` állományban a munkafüzet, valamint egy rövid leírás, amelyben szerepel az alkalmazott táblázatkezelő neve és verziószáma.

I. 534 (É). A Nemzetközi Sakkszövetség (Fédération Internationale des Échecs, FIDE) honlapján elérhető a világ jelenleg és korábban versenyszerűen sakkozó játékosainak eredményességét mutató Élő-pontszám és a versenyzők néhány más adata. Töltsük le a 2021. februári ranglistát, melynek elérhetősége a következő: `http://ratings.fide.com/download/standard_feb21frl.zip`. Tömörítsük ki az állományt, majd mentsük a benne lévő szöveges állományt `sakk.txt` néven. Töröljük az állomány első sorát, így a megmaradt szöveg 363 272 sakkozó adatait tárolja azonos formátumban.

A fájl táblázatos kinézetét szóközök segítségével alakították ki. Minden sor pontosan 135 karaktert tartalmaz (csak az angol ABC karakterei, valamint számok és írásjelek fordulnak benne elő). A 16–76. karakterhelyen található balra igazítva a versenyző neve, a 77–79. karakterhelyen a versenyző országának hárombetűs rövidítése (a magyaroknál a szokásos HUN), a 81. karakterhelyen a versenyző nemét jelző betű (angol rövidítéssel M vagy F), a 114–117. karakterhelyen a versenyző aktuális Élő-pontszáma, és a 127–130. karakterhelyen a versenyző születési éve. A többi adatra nem lesz szükségünk a feladatok megoldása során.

Készítsünk programot `sakk` néven, amely megoldja a következő feladatokat. A feladatok megoldása során mindig írjuk ki a feladat sorszámát. Törekedjünk a mintának megfelelő kommunikációra a felhasználóval. Az ékezetek nélküli kiírás is megfelelő.

1. Olvassuk végig a szöveges állományt, és tároljuk el a fájl azon sorainak adatait, amelyek magyar versenyzőkről szólnak, tehát a magyar versenyzők nevét, nemét, Élő-pontszámát és születési évét. A név ne tartalmazza a fájlban a név után írt szóközöket, az Élő-pontszám és a születési év legyen egész érték.
2. Adjuk meg, hogy hány női, és hány férfi sakkozónk szerepel a listában.
3. Adjuk meg a legmagasabb Élő-pontszámmal rendelkező férfi és női sakkozónk nevét, pontszámát és születési évét.
4. Állapítsuk meg és írjuk ki, hogy hány olyan női versenyzőink van, aki 1990-ben vagy az után született, és Élő-pontszáma legalább 2000.
5. A Polgár családból többen is szerepelnek a listán. Adjuk meg a családtagok keresztnevét, születési dátumát és Élő-pontszámát táblázatos elrendezésben. A lista legyen a családtagok Élő-pontszáma szerint növekvő sorrendben.
6. Polgár Judit minden idők legkiválóbb női sakkozója, 1989-től 2005-ig vezette a női ranglistát, legmagasabb Élő-pontszáma 2735 volt. Adjuk meg, hogy kik azok a sakkozóink, akik legalább akkora pontszámmal rendelkeznek, mint Polgár Judit jelenleg. A listában a nevek a magyar írásmód szerint szerepeljenek. Tegyünk zárójelek között egy csillagot (*) azoknak a versenyzőknek a neve után, akiknek pontszáma eléri Polgár Judit egykor legmagasabb, 2735-ös pontszámát. A lista elemeit vesszővel és szóközzel válasszuk el egymástól, és zárjuk őket ponttal.

Minta program kimenet:

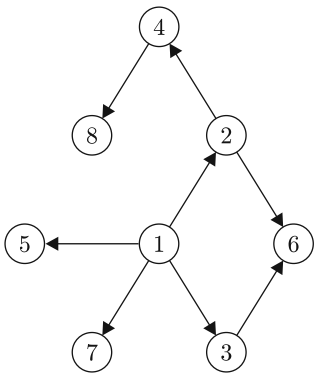
```
1. feladat: az adatok beolvasása
2. feladat:
A listában 5855 férfi és 603 női sakkozónk szerepel
```

3. feladat:
A legmagasabb pontszámú férfi versenyzőnk Rapport, Richard
Pontszáma: 2763
Születési éve: 1996
A legmagasabb pontszámú női versenyzőnk Polgar, Judit
Pontszáma: 2675
Születési éve: 1976
4. feladat:
33 olyan női sakkozónk van, aki 1990-ben vagy az után született, és Élő-pontszáma legalább 2000
5. feladat: A Polgár család tagjai

Szilvia	2010	1052
Janos	1954	1952
Istvan	1944	2425
Sofia	1974	2450
Susan	1969	2577
Judit	1976	2675

6. feladat: Akik elérték Polgár Judit mai pontszámát:
Almasi Zoltan, Rapport Richard(*).

Beküldendő egy `i534.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.



I/S. 52. Bergengóciában N darab város van, melyek 1-től N-ig számozottak. Jelenleg semelyik kettő sincs összekötve autópályával, így a király útépítési projektet hirdet. Pontosan akkor szeretné az x és y sorszámú városokat összekötni autópályával ($x < y$), ha az x szám osztója az y-nak, de nincs olyan z sorszám, amely osztható x-szel és osztója y-nak. Azaz, ha a szabály alapján x összeköthető z-vel és z összeköthető y-nal, akkor x és y között nem lehet út. (A várost saját magával nem kötjük össze.)

A király tanácsadójaként adjuk meg, hogy N város esetén hány autópályát kell építtetnie a királynak a leírt szabályok alapján.

Bemenet: az első és egyetlen sor a városok N számát tartalmazza.

Kimenet: a kimenet első és egyetlen sorába írjuk az építtetendő utak számát.

Példa bemenet	Példa kimenet
8	8

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 1\,000\,000$. *Időkorlát:* 0,4 mp.

Értékelés: A pontok 30%-a kapható, ha $N < 100$. A pontok 60%-a kapható, ha $N < 10\,000$.

Beküldendő egy `is52.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 151. Egy versenyen N diák vett részt, minden versenyzőnek N feladatot kellett megoldana. A diákok minden feladatra egy 1 és K közötti egész számot kaptak értékelésként. A versenybizottság egy N sorból és N oszlopból álló táblázatban összegyűjtötte az összes diák összes feladatának értékelését. Az i-edik sor az i-edik diák megoldásaira kapott pontokat tartalmazza, a j-edik oszlop a j-edik feladatra beküldött megoldások értékelését tartalmazza. Ha egy diák egy feladatra nem küldött be megoldást, akkor ott a 0 szám szerepel.

A versenybizottság észrevette, hogy minden feladathoz találhatunk legalább egy olyan diákot, aki nem oldotta meg a feladatot, és minden diákhoz találhatunk legalább egy olyan feladatot, amelyet az adott diák nem oldott meg. Vagyis a táblázat minden oszlopában és minden sorában szerepel legalább egy 0 érték.

Adjuk meg, hogy hány különböző értékelő táblázat lehet (két táblázat különböző, ha van legalább egy elemük, amelyben különböznek). A táblázatok száma nagyon nagy is lehet, ezért a szám $10^9 + 7$-tel vett osztási maradékát adjuk meg.

Bemenet: az első sor tartalmazza a szóközzel elválasztott N és K számokat.

Kimenet: adjuk meg a lehetséges táblázatok számát modulo $10^9 + 7$.

Példa bemenet	**Példa kimenet**
`2 1`	`7`

Lehetséges táblázatok $N = 2$ és $K = 1$ esetén:

0	0
0	0

1	0
0	0

0	1
0	0

0	0
0	1

0	0
1	0

1	0
0	1

0	1
1	0

Korlátok: $2 \leqslant N \leqslant 10^5$, $2 \leqslant K \leqslant 10^9$. *Időkorlát:* 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 40%-a kapható, ha $N \leqslant 100$. További 40% kapható, ha $N \leqslant 5000$.

Beküldendő egy `s151.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2021. április 15.

❄

Rátz Tanár Úr Életműdíjak átadása 2020 decemberében

Huszadik alkalommal adták át a Rátz Tanár Úr Életműdíjat év végén, a természettudományos oktatás területén kiemelkedő teljesítményt nyújtó pedagógusok munkájának elismeréseként. A három, díjat alapító cég – Ericsson Magyarország, Graphisoft SE és Richter Gedeon Nyrt. – gondozásában így összesen 152, az iskolák 5–12. évfolyamain matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanár nyerte el a 1,5 millió forinttal járó elismerést.

A Fasori Gimnázium legendás matematikatanára, Rátz László, maradandót alkotott a természettudományok tanításában. Olyan híres tudósokat indított el pályájukon, mint Wigner Jenő, Harsányi János vagy Neumann János. Rátz tanár úr ma is követendő példa minden pedagógus számára, a róla elnevezett Életműdíj pedig a legnagyobb hazai szakmai elismerés, amelyet a természettudományos tárgyat oktató pedagógusok elnyerhetnek.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanárok a példái annak, hogy ma is nevelnek szakmájuk iránt elhivatott magyar pedagógusok nemzetközi szinten is elismert tudósokat. A 2015-ben Életműdíjat nyert Dr. Tóth Albert József, a kisújszállási Móricz Zsigmond Gimnázium kiváló tanára fontos szerepet játszott abban, hogy egykori diákja, Karikó Katalin, a világszerte elismert biokémikus professzor, akit ma a Nobel-díj várományosaként is emlegetnek, a biológiát választotta hivatásaként. Az ő szabadalma alapján készült el a világon elsőként, a 2020-ban klinikailag is bizonyítottan hatásos Pfizer-BioNTech COVID-19-vakcina. A Magyar Kémikusok Lapjának adott interjújában* is kiemelte, hogy középiskolai tanárai csináltak neki kedvet a kémiához és a biológiához.

A díjra – amelyet minden évben tantárgyanként két-két pedagógus kap meg – bárki jelölhet tanárokat, a nyertesek személyéről pedig a három alapító vállalat által létrehozott Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriuma dönt.

„A díj létrehozásakor célkitűzésünk volt, hogy ne csak a tanári közösség és egy szűkebb diákközösség, de az ország megismerje, hogy vannak kiváló tanáraink, akik gyermekeinket nevelik. Olyanok, akik úgy figyelnek a gyermekeinkre, mint Rátz tanár úr is figyelt a diákjaira. Az elmúlt 20 évben a Rátz Tanár Úr Életműdíjnak presztízsértéke lett a tanárok között. Mind a díjazottjaink, mind az ő kollégáik büszkék arra, ha egy Rátz Tanár Úr Életműdíjas tanár van a közösségben." – mondta el Kroó Norbert professzor, akadémikus, az Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriumának elnöke a legutóbbi díjátadón.

Az Ericsson Magyarország, a Graphisoft SE és a Richter Gedeon Nyrt. 20 évvel ezelőtt alapította a Rátz Tanár Úr Életműdíjat és a mögötte álló Alapítványt a Magyar Természettudományos Oktatásért. Egyedülálló módon immár két évtizede közös céljuk, hogy tisztelettel adózzanak azon pedagógusok előtt, akik kiemel-

*http://real-j.mtak.hu/12756/14/MKL_2019.aprilis_1-40.oldal.pdf kedő eredménnyel képezik a jövő tehetségeit, kiveszik részüket a hátrányos helyzetű diákok tehetséggondozásából, valamint hozzájárulnak az új pedagógusgeneráció szakmai pályájának elindításához is. A Rátz Tanár Úr Életműdíjat az ország bármely iskolájában tanító vagy korábban ott tevékenykedő pedagógus megkaphatja.

Az életműdíjat három, a természettudományos oktatás támogatásában elkötelezett vállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. hozta létre 2000-ben Rátz Lászlónak, a múlt század legendás tanáregyéniségének emléket állítva.

A 2020-ban Rátz Tanár Úr Életműdíjban részesült tanárok:

Kémiából **Dobóné Dr. Tarai Éva** (Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium) és **Sebő Péter** (Budapest, ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium);
Biológiából **Gadóné Kézdy Edit** (Budapest, Deák Téri Evangélikus Gimnázium) és **Dr. Franyó István** (Budapest, Sashegyi Arany János Általános Iskola és Gimnázium);
Matematikából **Dr. Horváth Eszter** (Budapest, Kempelen Farkas Gimnázium) és **Dr. Kiss Géza** (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium);
Fizikából **Lévainé Kovács Róza** (Karcagi Általános Iskola és Alapfokú Művészeti Iskola) és **Farkas László** (Keszthelyi Vajda János Gimnázium).

Idézünk a matematika, illetve a fizika területén díjazott tanárokról készített rövidfilmekből.

Matematika

Dr. Horváth Eszter (Budapest): *Akkor, amikor egy tízéves gyerek bejön az iskolába, akkor borzasztóan nyitott. Addig, amíg az ember diákként, még egyetemistaként is feladatot megold, addig az agyában elindul valami és számolja, gondolja, összerakja. És mikor tanár, akkor nem így kell menni. Úgy kell menni, hogy: „Mit is gondolt a gyerek? Mit is mondott? Az a félmodata az hogyan folytatható?” Most nyugdíjasként, óraadóként tanítok. Egy évvel ezelőtt úgy gondoltam, hogy hátradőlök a fotelben és én már mindent tudok és ez nekem már megy, ezt az évet én már rutinból végig fogom tudni csinálni. És mikor jött a tavasz, akkor tulajdonképpen mindent változtatnom kellett. De én nagy örömmel tekintek erre vissza. Ugyanis ez a helyzet azt hozta, hogy nekem azt kellett tenni, hogy ha én bízom a gyerekben, akkor mit tudok vele elérni. És ebbe én úgy érzem, hogy a tanítványaimnak a döntő része nagyon partner volt. És azt mondom, hogy most ebben a világban egy kicsikét nagyobb bizalmat kell a gyerekeknek adni.*

A tanárnőről szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=N4X_C-9WU-E`.

Dr. Kiss Géza (Budapest): … *az elköteleződés nagyjából szerintem olyan 2. gimnázium környékén megvolt, amikor kizárásos alapon rájöttem, hogy én nem akarok mérnök lenni, én nem akarok közgazdász lenni, de mindig ezzel szeretnék foglalkozni. Az édesapám óvatosan próbált ettől elterelni. Kedvenc szlogenje volt, hogy „Kisfiam, hát nézd meg, a tanítónak mindig kopott a nadrágja. Hát te olyan* *jó tanuló vagy, hogy bármi mást is választhatnál, gondold már meg!" És én mindig mondtam, hogy nem-nem, nekem ez jó lesz. … A kapcsolat tanár és diák között rengeteget számít. Tehát az, hogy ő elhiszi nekem, hogy ő ezt meg fogja tudni csinálni, az már fél siker. Ez a féle hozzáállás, hogy én azért vagyok, hogy őt segítsem, és ő az első, ez kell hozzá. Tehát ha ez nincs meg, akkor lesz ez a tekintélyelvű izé, hogy „Én majd megmondom neked, hogy te mit csinálhatsz, és ide mész, oda mész." … Aki most kezdi a pályát az már ne kezdjen hozzá, hogyha így gondolja. Szerintem.*

A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=-WZjae50r3s`.

A teljes kisfilm a matematika díjazottakról:

`https://www.youtube.com/watch?v=bkJnDbex91Q`.

Fizika

Lévainé Kovács Róza (Karcag): *Hatodikban a fizikaoktatásnak végül is a varázslat a célja. Nem az a lényeg, hogy definíciókat tanuljon, hogy törvényeket bemagoljon, egyébként se igazából azt szeretem. Itt az lenne a jó, hogyha rácsodálkozna a környezetére, hogy: „De szép! De jó!" A kísérlet mindenképppen kell, legjobb akkor, ha maguk a gyerekek kísérletezhetnek. Természetesen a tanári kísérlet is izgatja őket, de leginkább az marad meg bennük, amit ők maguk kipróbálnak. … Igyekszem a feladatokat például az állatvilág rekordjaira építeni, onnan veszek ötleteket, vagy háztartásból, otthon amiket találok. Megkeressük, hogy amit tanulunk, annak hol van a hétköznapi életben haszna, miért is jó, ha ezekről a dolgokról tudnak és akkor egy kicsit már úgy érzem, hogy elfogadóbbak.*

A tanárnőről szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=ZP_BA-p5wps`.

Farkas László (Keszthely): *Én azt gondolom, a legeslegfontosabb a lelkesedés. Hogy a gyerek lássa azt, hogy amit én csinálok, az nagyon fontos számomra és ezt ő is fogja követni. A fizika nem könnyű tantárgy. Egyrészt elég komoly matematikai háttér kell hozzá, kell tudni elég komolyan elvontan gondolkodni, és ez nem magától jön, ez nincs a gyerekbe beépítve. Ezt ki kell fejleszteni. … A tudománytörténet hozzátartozik a fizika megismeréséhez. Hogy honnét indultunk, mik voltak azok a jelenségek, amik megváltoztatták azt a világképet, vagy éppenséggel azt a modellt, és folyamatában látni azt a fejlődést, amit a technika meg a fizika segítségével átéltünk. Sokkal inkább közelebb hozza a gyerekeket ehhez a tudományhoz és a tudománytörténetet szeretik és izgalmasnak tartják. Szeretik a sztorikat. A mai világban szinte minden a tudomány és a fizikai vívmányokat használja fel. Ehhez olyan szakemberek kellenek, akik ezt a hajót tovább tudják vinni.*

A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://www.youtube.com/watch?v=FSiYfsbjIlg`.

A teljes kisfilm a fizika díjazottakról:

`https://www.youtube.com/watch?v=47Y0GTqPeH4`.

Tichy Géza
(1945–2021)

Február 2-án 76 éves korában váratlanul elhunyt Tichy Géza, az ELTE Professor Emeritusa. Kiemelkedő kutató fizikus, tanár, versenyszervező, de mindenekelőtt kiváló ember volt. Tevékenysége sok-sok szálon kötődik a KöMaL-hoz, a tehetséggondozáshoz és általában a fizika tanításához.

Egyetemista korában, az 1960-as években nagyon aktív szereplője volt az akkor virágkorát élő Ifjúsági Fizikai Körnek, ott „mentortanárként" vonzotta maga köré az érdeklődő középiskolásokat. Jónéhányan az ő hatására lettek fizikusok. Amikor 1967-ben Kunfalvi Rezső útjára indította a Nemzetközi Fizikai Diákolimpiát, néhány éven át a magyar csapat felkészítője és az egyik vezetője volt. Az ő kezdeményezésére indult el 1970-ben az Ortvay Rudolf problémamegoldó verseny, amely azóta is az egyetemisták (és mostanában a középiskolások) egyik legrangosabb, 1 hetes otthoni munkát igénylő versenye. A KöMaL Ifjúsági Ankétok rendszeres előadója volt, emlékezetes előadásokat tartott a kvázikristályokról, a kerékpár és az anyagtudomány kapcsolatáról. A 2020. évi (a járvány miatt elmaradt) Ankéton a villanyautók fizikájáról akart beszélni. Tagja volt az Eötvös-verseny bizottságának, szinte minden évben voltak saját feladatai is.

Megalakulása óta tagja a KöMaL kiadását, versenyeit támogató Matfund Alapítvány kuratóriumának. Folyamatosan figyelemmel kísérte a Lapot, 69 kitűzött (mérési és elméleti) feladata is megjelent.

Kollégái, tanítványai, barátai meghatottan emlékeznek vissza rá. A teljesség igénye nélkül néhányat idézünk.*

Emlékszem hallgató voltam, amikor vizsgázni mentünk Gézához. Kijött a szobából egy „szakadt" pulóverben és megkérdezte: „Vizsgázni jöttetek?". Mondtuk, igen, mire ő: „Rendben, egy pillanat, és felveszem az öltönyömet." A stílus maga az ember.

Lenyűgöző volt Gézában, hogy ahányszor csak valami problémával fordultam hozzá, hogy ez hogyan is van, vagy azonnal tudta a választ, vagy számolt egy kicsit a táblánál és azután mondta meg. Közben látszott rajta, hogy ez az egész számára olyan, mint egy játék, amit ő nagy élvezettel játszik. Azt hiszem, ez csak a legkiválóbbak privilégiuma.

(*Groma István*)

1963 őszén Tichy Géza megnyerte az Eötvös-versenyt. Olyan megoldást adott egy váltóáramú, rezgőkörös feladatra, amellyel lenyűgözte a versenybizottságot – Vermes Miklós mint második megoldást közölte is ezt az Eötvös-versenyek feladatairól kiadott könyvében. Vektorábrás megoldás volt, Géza hasonló háromszö-

*Lásd még a `https://physics.elte.hu/content/tichy-geza-emlekere.t.17920` honlapot és a Fizikai Szemle 2021. évi 2. számát.

geket fedezett fel a felrajzolt vektorábrán, így sikerült bizonyítania a feladatban megfogalmazott meglepő állítást. A KöMaL-on felnőtt versenyzők mind analitikus megoldásokkal próbálkoztak, ahogyan a versenybizottság is – viszont Géza nem volt KöMaL-os versenyző. Ha ma felkeressük a KöMaL Arcképcsarnokot és beírjuk a keresőbe a Tichy nevet, egyetlen diák neve bukkan csak fel: Tichy Eszteré 1991/92-ből. Ő Géza egyik lánya ... Középiskolás korában Géza nem KöMaL feladatok megoldásán törte a fejét szabad idejében, hanem sportolt: vízilabdázott, edzésekre járt az uszodába.

(*Radnai Gyula*)

Úgy emlékszem, hogy 25 év alatt egyetlen Matfund kuratóriumi ülésről sem maradt távol. Sokat beszélgettünk, szerettük vidám, optimista lényét, logikus érvelését, a KöMaL matematika-fizika tehetséggondozásáért érzett felelősségét. Az alapítvány és a KöMaL szerkesztőség megőrzi emlékét.

(*Oláh Vera*)

Soha nem felejtem el az örökös derűjét, kedvességét, a hallgatók iránti lelkesedését. Tőle nem csak fizikát, hanem emberséget is tanultam. Ezt nagyon köszönöm neki. Hiányozni fognak nekem azok a beszélgetések, amikor fizikával kapcsolatos kérdéseimre sziporkázó válaszokat adott.

(*Cserti József*)

Az egyetemi évek alatt három tárgyat hallgattam Gézánál, közelebbről pedig az Eötvös-verseny bizottságában ismerhettem meg őt. Minden percét élveztem az együtt töltött időnek, nem volt olyan alkalom, amikor ne tanultam volna tőle valami újat. Legutóbb októberben a termodinamikai potenciálok Legendre-transzformációját magyarázta el a kérésemre, csak úgy futólag, egy papírfecnire rögtönözve, kristálytisztán, érthetően. Úgy, hogy azt elfelejteni soha nem fogom.

Géza rendkívül fontosnak tartotta a fizika népszerűsítését a legfiatalabb generáció tagjai között: diákolimpiai csapatvezetőként, versenyszervezőként, feladatkitűzőként, valamint a KöMaL kuratóriumának tagjaként végzett tevékenysége felbecsülhetetlen.

(*Vigh Máté*)

Csak jó emlékeim vannak Tichy Gézával kapcsolatban. Az egyik legkedvesebb talán az, amikor néhány éve valamelyik egyetemi folyosón ebédelve hirtelen odalépett hozzám, jó étvágyat kívánt, megkérdezte, hogy vagyok; majd néhány perccel később már a kvantummechanika mélyén rejlő matematikai struktúrákról mesélt nekem. Számomra minden előadását ugyanez a hangulat hatotta át: egyértelmű volt, hogy lehengerlő és szerteágazó tudás birtokában van, azt mégis olyan természetességgel és főként végtelen alázattal tudta átadni nekünk, amire kevesen képesek. Kivételes fizikus és kivételes ember volt, bőven lenne még mit tanulnom tőle.

(*Németh Róbert*)

A fizika szinte valamennyi területén otthon érezte magát. Lehetett vele beszélgetni a szilárdtestfizikáról, anyagtudományról, elektrodinamikáról, termodinamikáról, optikáról, kvantumelméletről, szinte mindenről. Ha valaki egy fizikai problémával fordult hozzá, gyakran azt mondta: „Könnyű az okosoknak, azok fejből tudják a megoldást. Én buta vagyok, nekem mindent ki kell számítanom matematikával.”

(*Gnädig Péter*)

Valamikor ötven évvel ezelőtt Géza befejezett a táblánál egy levezetést, felénk lépett, égnek emelte mindkét kezét, és lelkesen, átszellemült arccal felkiáltott: Ugye látjátok, hogy ez milyen szép!

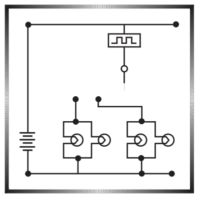
És mi láttuk, hogy szép. Ahogy ő mondta, ahogy átérezte, ahogy mindenkinek át akarta adni azt az élményt, azt a szinte gyermeki örömöt, ami eltöltötte egy-egy jól sikerült ötlet, levezetés, magyarázat után, azt a lelkesedést, ami a fizika, a világ megértése iránt áthatotta. Akkor egy pillanatra az ő szemével láttunk mi is.

Néha, jobb pillanatainkban ma is így látunk. Mától már Géza nélkül, de az ő szemével, az ő örömével, az ő lelkesedésével.

(*Dávid Gyula*)

Sokunknak hiányozni fog színes egyénisége, nagy tudása, embersége.

A KöMaL Szerkesztősége
és a MATFUND Alapítvány kuratóriuma

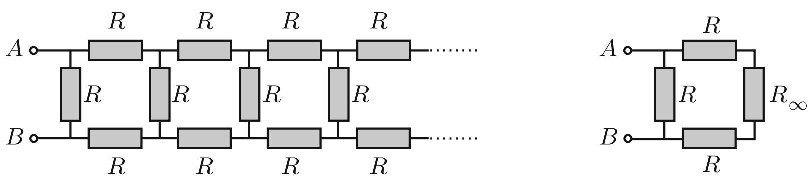


Ellenállásszalagok

Bevezetés

1967-ben a Varsóban megrendezett első Nemzetközi Fizika Diákolimpián (IPhO) a második elméleti feladatban egy végtelen ellenálláslánc eredő ellenállását kellett meghatározni. A probléma az akkori középiskolai versenyfeladatok között újszerűnek számított. Azóta a hazai versenyeken és a KöMaL hasábjain is rengeteg változata tűnt fel a feladatnak, a problémakör standarddá vált a versenyzők körében.

Bevezetésként tekintsük az *1. ábra* bal oldalán látható, csupa R ellenállásból álló, végtelen ellenállásláncot és határozzuk meg az A és B kivezetések között mérhető R_∞ eredő ellenállást!



1. ábra

Az ilyen típusú feladatoknál a szokásos megoldási módszer a következő. Vegyük észre, hogy az ellenálláslánc A és B-hez legközelebbi fokozatához egy ugyanolyan végtelen, R_∞ eredő ellenállású lánc csatlakozik, mint amilyen az eredeti lánc, ezért az *1. ábra* jobb oldalán látható helyettesítő képnek megfelelően a lánc eredő ellenállására a következő egyenletet tudjuk felírni:

$$R_\infty = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R + R_\infty}\right)^{-1},$$

ebből az

$$R_\infty^2 + 2R_\infty R - 2R^2 = 0$$

másodfokú egyenletre jutunk, amelynek egyetlen pozitív megoldása

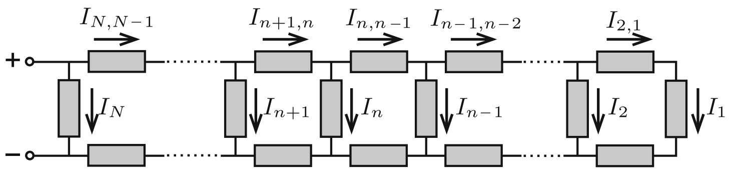
$$R_\infty = \left(\sqrt{3} - 1\right)R \approx 0{,}7321R.$$

Végtelen ellenállásláncot a valóságban nem tudunk készíteni. A fizikában a „végtelen" lánc valójában „nagyon hosszút" jelent, azaz olyan hosszú, de véges ellenállásláncot, amelynek eredő ellenállása lényegében nem függ attól, hogy pontosan hány fokozatból áll a lánc. Felmerül a kérdés, hogy az eredő ellenállás szempontjából milyen hosszú ellenálláslánc tekinthető végtelennek, azaz az ellenálláslánc fokozatainak növelésével milyen gyorsan konvergál az eredő ellenállás az R_∞ értékhez?

A véges ellenálláslánc áramerősség-viszonyai

A véges ellenállásláncokról általában kevés szó esik, érdekességük azonban nem marad el a végtelen láncok esetétől. Most is a végtelen ellenállásláncnál bemutatott konkrét példához nyúlunk, az ettől eltérő konfigurációjú, véges láncok eredő ellenállásának meghatározásánál is a következőkben bemutatott gondolatmenettel lehet célt érni.

Tekintsük a *2. ábrán* látható N fokozatú láncot, amely összesen $3N - 2$ darab egyforma R ellenállásból áll!



2. ábra

Ha a kivezetésekre az ábra szerinti polaritású feszültséget kapcsolunk, a körben a nyilak által jelzett irányban áram indul meg. Az egyes ágakban folyó áramok ismeretében meg tudnánk mondani a lánc eredő ellenállását, hiszen a kivezetésekre kapcsolt feszültség RI_N alakba írható, az áramforráson átfolyó áram erőssége pedig $I_N + I_{N,N-1}$, így az Ohm-törvény szerint

$$R_N^{\text{lánc}} = \frac{I_N}{I_N + I_{N,N-1}} R. \tag{1}$$

A következőkben ennek meghatározását tűzzük ki célul.

A csomópontokra $n \geqslant 2$ esetén teljesülnie kell az

$$I_{n+1,n} = I_n + I_{n,n-1} \tag{2}$$

Kirchhoff-féle első törvénynek, az áramhurkokra pedig fenn kell állnia az

$$RI_{n+1} - 2RI_{n+1,n} - RI_n = 0 \tag{3}$$

Kirchhoff-féle második törvénynek. A (3) egyenletből R-rel való egyszerűsítés után az

$$I_{n+1,n} = (I_{n+1} - I_n)/2$$

összefüggést kapjuk, ebből $n \to n-1$ változócserével az

$$I_{n,n-1} = (I_n - I_{n-1})/2$$

kifejezést kapjuk. Az utóbbi két egyenletet (2)-be helyettesítve, rendezés után az ellenálláslánc fokozataiban folyó áramok között az

$$I_{n+1} = 4I_n - I_{n-1} \tag{4}$$

összefüggésre jutunk ($n \geqslant 2$). Az $n = 1$ sorszámú ágban folyó áram I_1 erősségét adottnak tekintve, majd a huroktörvényt alkalmazva az $I_2 = 3I_1$ eredményt kapjuk. Az I_1 és I_2 értékekből kiindulva (4) segítségével az n-edik ág áramerőssége is meghatározható, ehhez azonban egy $n-2$ egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldani. Ehelyett szeretnénk az I_n-et n függvényében explicit módon kifejezni.

A lineáris rekurzió megoldása

A matematikai sorozatok olyan képzési szabályát, melyben a sorozat n-edik elemét az azt megelőző néhány elem lineáris függvényeként állítjuk elő, lineáris rekurziónak nevezzük. Az ilyen szabályok szerint képzett sorozatok esetén mindig megtalálható a sorozat n-edik elemét előállító explicit képlet. A leghíresebb, rekurzív módon megadott sorozat a Fibonacci-sorozat, melynek első két eleme a 0 és 1, a sorozat következő elemei pedig mindig az előző két elem összegeként állnak elő: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$.

Tekintsük most a (4) rekurzióval megadott sorozatot, melynek első két eleme I_1 és $I_2 = 3I_1$! Tűzzük ki célul az $I_n = f(n)$ explicit összefüggés megtalálását!

A (4) rekurzió az első két elem megválasztásától függően sokféle sorozatot definiálhat. Vajon választható-e úgy az első két elem, hogy a sorozat elemei mértani sorozatot alkossanak? Másképpen mondva: létezik-e olyan q valós szám, melyre az $n = 1$ és $n = 2$ sorszámú elemeket 1 és q értékűnek választva a (4) rekurzióval előállított sorozat $n = k$ sorszámú eleme q^{k-1} alakba írható? Ennek eldöntéséhez helyettesítsük be a q^{n-1} explicit képletet a (4) rekurziós összefüggésbe!

$$q^n = 4q^{n-1} - q^{n-2},$$

majd a nemtriviális megoldást keresve, q^{n-2}-vel való egyszerűsítés és rendezés után a

$$q^2 - 4q + 1 = 0$$

másodfokú egyenletre jutunk. Ennek két megoldása:

$$q_1 = 2 - \sqrt{3}\,, \qquad q_2 = 2 + \sqrt{3}\,.$$

Tehát két olyan mértani sorozat is létezik, amely kielégíti a (4) rekurziós összefüggést: az $1, q_1, q_1^2, q_1^3, \ldots$; valamint az $1, q_2, q_2^2, q_2^3, \ldots$ sorozat. Vegyük észre, hogy ekkor e két mértani sorozat elemeiből a tetszőleges c_1 és c_2 valós számokkal képzett

$$a_{n+1} = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$$

sorozat is kielégíti a (4) rekurziót, hiszen:

$$\underbrace{c_1 q_1^n + c_2 q_2^n}_{a_{n+1}} = c_1\big(4q_1^{n-1} - q_1^{n-2}\big) + c_2\big(4q_2^{n-1} - q_2^{n-2}\big) =$$

$$= 4\underbrace{\big(c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}\big)}_{a_n} - c_2\underbrace{\big(c_1 q_1^{n-2} + c_2 q_2^{n-2}\big)}_{a_{n-1}}.$$

Megválaszthatjuk-e úgy a c_1 és c_2 együtthatókat, hogy az a_n sorozat éppen az áramerősségeket megadó I_n sorozat legyen? Ennek semmi akadálya, csupán az $a_1 = I_1$ és $a_2 = 3I_1$ egyenlőségeket kell megkövetelnünk:

$$c_1 + c_2 = I_1,$$
$$c_1 q_1 + c_2 q_2 = 3I_1.$$

Az egyenletrendszert megoldva a

$$c_1 = \frac{3 - q_2}{q_1 - q_2} I_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}} I_1, \qquad c_2 = \frac{q_1 - 3}{q_1 - q_2} I_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}} I_1$$

eredményeket kapjuk. Ezeket az $I_n = c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1}$ kifejezésbe helyettesítve már elő tudjuk állítani az egyes ágakban folyó áramok erősségét megadó explicit összefüggést:

$$(*) \qquad I_n = \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{3}}\big(2 - \sqrt{3}\,\big)^{n-1} + \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}\big(2 + \sqrt{3}\,\big)^{n-1}\right) I_1.$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a $(*)$ formula valóban visszaadja $n = 1, 2$ esetén az I_1, $3I_1$ értékeket.

A véges ellenálláslánc eredő ellenállása

Miután sikerült meghatároznunk a 2. ábrán látható láncban folyó áramokat, az eredő ellenállást (1) alapján már könnyen kiszámíthatjuk. Felhasználva a korábban kapott $I_{N,N-1} = (I_N - I_{N-1})/2$ összefüggést az (1) kifejezés a következő alakot ölti:

$$R_N^{\text{lánc}} = \frac{2I_N}{3I_N - I_{N-1}} R.$$

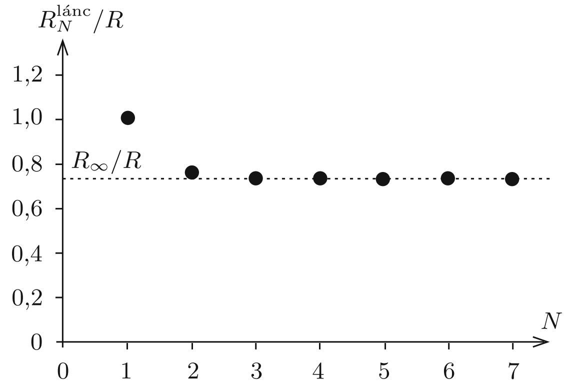
Behelyettesítve az áramerősségeket megadó (∗) explicit képletet, majd egyszerűsítve:

$$R_N^{\text{lánc}} = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^N + \left(\sqrt{3}+1\right)\left(2-\sqrt{3}\right)^N}{\left(2+\sqrt{3}\right)^N - \left(2-\sqrt{3}\right)^N} R.$$

Ez tehát a *2. ábrán* látható, $3N-2$ egyforma ellenállásból álló véges lánc eredő ellenállása. A kapott eredmény tovább alakítható:

$$R_N^{\text{lánc}} = \underbrace{\left(\sqrt{3}-1\right)R}_{R_\infty} + \frac{2\sqrt{3}}{\left(7+4\sqrt{3}\right)^N - 1} R,$$

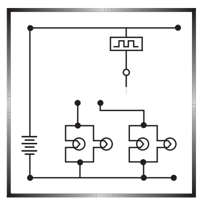
itt az első tag a végtelen ellenállásláncnál kapott kifejezés, a második pedig a véges korrekciót írja le. Könnyen ellenőrizhető, hogy $N=1$-re visszakapjuk az R ellenállást, $N=2$-re pedig a $3R/4$ értéket. Nagy N-ekre a korrekciós tag N-nel exponenciálisan tűnik el, a konvergencia pedig meglepően gyors, ahogy az a *3. ábrán* is látható. $N=3$ esetén az eredő ellenállás R_∞-től való eltérése kevesebb, mint 2%,



3. ábra

$N=4$-re pedig 2 ezreléknél is kevesebb. Az eredő ellenállás szempontjából tehát már néhány, 4-5 fokozatból álló véges lánc is „nagyon hosszú”-nak számít.

Vigh Máté



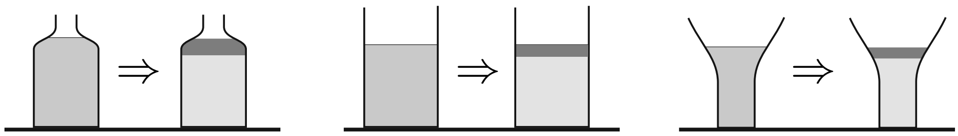
Fizika gyakorlat megoldása

G. 728. *Vannak olyan folyadékok, például a nyers tej vagy az olívaolajos-balzsamecetes salátaöntet, melyeket ha állni hagyunk, akkor a folyadék két alkotóelemére válik szét. Az olaj kerül az öntet tetejére, illetve zsíros tejszín lesz a tej tetején, miközben a teljes térfogat nem változik. Ha az ilyen folyadékokat* *a) felfelé keskenyedő üvegben tartjuk;*

b) hengeres mérőpohárba töltjük;

c) felfelé szélesedő pohárba öntjük,

majd megvárjuk az alkotóelemek szétválását, akkor a folyadék aljánál a hidrosztatikai nyomás megnő, lecsökken vagy változatlan marad?



a) *b)* *c)*

(*4 pont*)

Megoldás. Jelöljük a homogén keverék adatait 0-s indexekkel, az alsó folyadékrétegét 1-es, a felső réteg adatait pedig 2-es indexekkel. Mivel a folyadék teljes térfogata nem változik, igaz hogy

$$V_0 = V_1 + V_2, \tag{1}$$

a magasságokra pedig

$$h_0 = h_1 + h_2. \tag{2}$$

Tekintve, hogy a folyadék tömege sem változik a szétválási folyamat során, fennáll, hogy

$$\varrho_0 V_0 = \varrho_1 V_1 + \varrho_2 V_2. \tag{3}$$

A sűrűségekre

$$\varrho_2 < \varrho_0 < \varrho_1$$

teljesül, mert (1) és (2) alapján a homogén folyadék ϱ_0 sűrűsége a szétvált folyadékok sűrűségének súlyozott átlaga:

$$\varrho_0 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}\varrho_1 + \frac{V_2}{V_1 + V_2}\varrho_2.$$

Írjuk fel az edény aljára ható hidrosztatikai nyomást a szétválás előtt (p), és a szétválás után (p'):

$$p = \varrho_0 g h_0, \qquad \text{illetve} \qquad p' = \varrho_1 g h_1 + \varrho_2 g h_2.$$

Hasonlítsuk össze ezt a két nyomást:

$$p \lesseqgtr p'.$$

Mivel most még nem ismerjük, hogy a nyomások közötti reláció a kisebb, az egyenlő vagy a nagyobb közül melyik, ezért a relációjelet kérdőjellel helyettesítjük:

$$\varrho_0 g h_0 \quad ? \quad \varrho_1 g h_1 + \varrho_2 g h_2.$$

Egyszerűsítve g-vel ($g > 0$) és (2)-t felhasználva kapjuk:

$$\varrho_0 h_0 = \varrho_0(h_1 + h_2) \quad ? \quad \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2. \tag{4}$$

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor az egyenes falú edénybe (mérőpohárba) öntjük a folyadékot. Ilyenkor a folyadékoszlopok térfogata egyenesen arányos a rétegek magasságával, vagyis $V_i = Ah_i$ ($i = 0, 1, 2$). Az A keresztmetszettel osztva (3) mindkét oldalát azt kapjuk, hogy

$$\varrho_0 h_0 = \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2,$$

vagyis a (4) kifejezésben a reláció *egyenlőség.* Ezek szerint $p' = p$, vagyis az egyenes falú edényben az alkotórészek szétválása során *nem változik* a nyomás.

Ha az edény fala nem egyenes, akkor a folyadékrétegek magassága és térfogata közötti összefüggést a folyadék helyzetétől és az edény alakjától függő *átlagos* keresztmetszet adja meg:

$$V_i = A_i h_i \quad (i = 0, 1, 2).$$

Felfelé szűkülő edényre $A_1 > A_2$, míg a felfelé szélesedő pohár esetében $A_1 < A_2$ teljesül. Ezek segítségével a (3) összefüggés:

$$\varrho_0(h_1 A_1 + h_2 A_2) = \varrho_1 h_1 A_1 + \varrho_2 h_2 A_2,$$

ahonnan A_1-gyel osztva

$$\varrho_0 \left(h_1 + h_2 \frac{A_2}{A_1} \right) = \varrho_1 h_1 + \varrho_2 h_2 \frac{A_2}{A_1}. \tag{5}$$

A nyomások viszonyát meghatározó (4) kifejezésből kivonva az (5) egyenletet, majd $h_2 > 0$-val osztva kapjuk, hogy

$$\varrho_0 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right) \quad ? \quad \varrho_2 \left(1 - \frac{A_2}{A_1} \right).$$

Mivel $\varrho_2 < \varrho_0$, az edény aljára ható nyomás megváltozásának jellege $1 - \frac{A_2}{A_1}$ előjelétől függ.

a) Ha $A_2 < A_1$, akkor $1 - \frac{A_2}{A_1} > 0$, tehát a ? reláció a „$>$”-bal egyezik meg, tehát $p > p'$, a szétválás során *lecsökken* a nyomás.

c) Amennyiben $A_2 > A_1$, akkor $1 - \frac{A_2}{A_1} < 0$, tehát a ? reláció a „$<$”-bel egyezik meg, vagyis $p < p'$, a szétválás során *növekszik* a nyomás.

b) Végül $A_1 = A_2$ esetén a nyomás – mint azt korábban már beláttuk – *nem változik.*

Czirók Tamás (Budapest, Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 6, nem versenyszerű 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5259. *Egy gyorsítócsőben* 200 keV *energiájú deuteronokból álló nyaláb érkezik a céltárgyra, az áramerősség* 0,3 mA. *A deuteronok lefékeződnek a céltárgyban.*

a) Másodpercenként mennyi hőt kell elvezetni a céltárgyról, hogy az ne melegedjék?

b) Változik-e az eredmény, ha a deuteronok helyett ugyanekkora energiájú és ugyanekkora áramerősséget adó elektronok, illetve α-részecskék csapódnak be a céltárgyba?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

Megoldás. Jelöljük egy-egy részecske energiáját $\mathcal{E}$-vel, a töltését pedig q-val. Δt idő alatt $\Delta Q = I\,\Delta t$ töltés, tehát $\Delta N = \Delta Q/q$ részecske érkezik a céltárgyhoz. Ezek mozgási energiája

$$\Delta E = \Delta N \cdot \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E} I \Delta t}{q},$$

tehát az elszállítandó hőteljesítmény

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\mathcal{E} I}{q}.$$

A megadott számadatok szerint $\mathcal{E} = 2 \cdot 10^5$ eV és $I = 3 \cdot 10^{-4}$ A, tehát

$$P = \frac{e}{q} \cdot 60\ \text{W},$$

(ahol e az elemi töltést, vagyis az elektron töltésének abszolút értékét jelöli).

a) Deuteronokra $q = +e$, tehát $P = 60$ W, vagyis másodpercenként 60 J hőt kell elvezetni ahhoz, hogy a céltárgy ne melegedjék.

b) Az elektronok töltése $q = -e$, tehát $|q| = e$, így a hűtőteljesítmény ugyanannyi kell legyen, mint a deuteronoknál.

Az α-részecskék töltése $q = +2e$, a másodpercenként elvezetendő hő 30 J.

Sas Mór (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. Az elektron töltésének nagysága megegyezik a deuteronéval, csak ellentétes előjelű. Ez nyilván nem azt jelenti, hogy $P < 0$ lenne, vagyis hogy hőt kellene bevezetni a céltárgy melegedésének elkerülésére! A

$$P = \frac{\mathcal{E} I}{q} = \frac{\mathcal{E} I}{(-e)}$$

összefüggésben az áram iránya is megváltozik (ami definíció szerint a *pozitív* töltéshordozók mozgásának iránya). Tehát az elvezetendő hőteljesítmény elektronok esetén

$$P = \frac{200\ \mathrm{keV} \cdot (-0{,}3\ \mathrm{mA})}{(-e)} = +60\ \mathrm{W} > 0.$$

A negatív elektronok gyorsításánál természetesen a gyorsítófeszültség előjele is ellentétes azzal, amit a pozitív töltésű deuteronok vagy α-részecskék gyorsításánál alkalmaznak.

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 6 dolgozat.

P. 5277. *Egy fényképezőgép lencséjének fókusztávolsága* 50 mm, *a lencse átmérője* 20 mm. *A lencsét úgy állítottuk be, hogy* 5 m *távoli tárgyat képez le élesen. Mekkora az a legnagyobb és legkisebb távolság, amelyen belül egy pontnak a képe még kisebb, mint egy* 0,05 mm *átmérőjű folt a filmen? Hogyan változik ez az intervallum, ha a lencse átmérőjét leszűkítjük* 10 mm-*re?*

(*5 pont*) **Tichy Géza** (1945–2021) feladata

Megoldás. Számítsuk ki az ernyő és a lencse k távolságát! A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t} + \frac{1}{k},$$

ahol $f = 50$ mm, $t = 5$ m. Innen adódik:

$$k = \frac{tf}{t-f} = 50{,}505\ \mathrm{mm}.$$

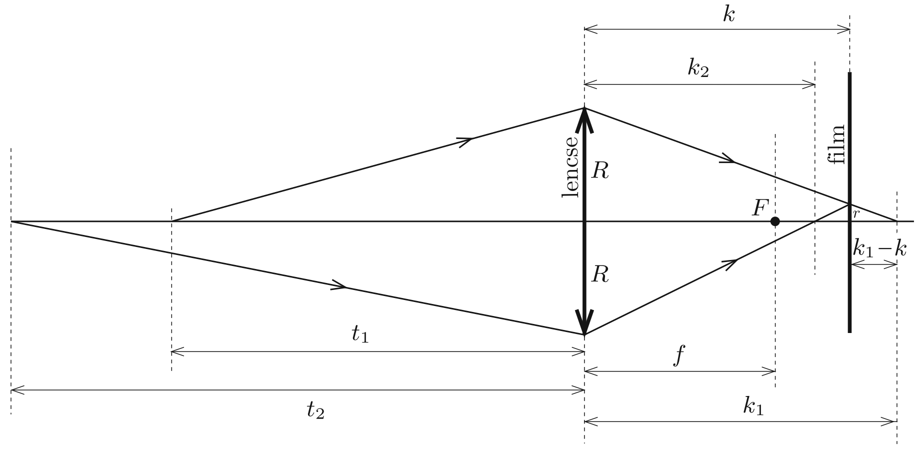
Legyen a legmesszebb lévő pont, aminek még 0,05 mm-nél kisebb átmérőjű folt a képe t_2 távolságra a lencsétől, a legközelebb lévő ilyen pont pedig t_1 távolságra a lencsétől. Ezeket a pontokat a lencse k_2 és k_1 távolságra képezi le. A lencse sugara $R = 10$ mm, a foltok sugara $r = 0{,}025$ mm. Vizsgáljuk azokat a fénysugarakat, amiket a lencse még éppen begyűjt, ezek okozzák a legnagyobb foltot.

A közelebbi pontból induló sugárra a (nem méretarányos) *ábrán* látható hasonló háromszögek miatt a következőt írhatjuk fel:

$$\frac{k_1 - k}{r} = \frac{k_1}{R}, \qquad \text{ahonnan} \qquad k_1 = \frac{R}{R-r}k.$$

A leképzési törvény szerint

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{k_1}, \qquad \text{tehát} \qquad t_1 = \frac{k_1 f}{k_1 - f} = \frac{\frac{R}{R-r}kf}{\frac{R}{R-r}k - f}.$$



A távolabbi pontra hasonló háromszögekből következően ezt írhatjuk fel:

$$\frac{k-k_2}{r}=\frac{k_2}{R},\qquad \text{vagyis}\qquad k_2=\frac{R}{r+R}k.$$

A leképzési törvényt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{t_2}+\frac{1}{k_2}\qquad \text{azaz}\qquad t_2=\frac{k_2 f}{k_2-f}=\frac{\frac{R}{R+r}kf}{\frac{R}{R+r}k-f}.$$

Mindkét keresett távolságra kaptunk egy-egy általános képletet:

$$t_1=\frac{\frac{R}{R-r}kf}{\frac{R}{R-r}k-f},\qquad \text{illetve}\qquad t_2=\frac{\frac{R}{R+r}kf}{\frac{R}{R+r}k-f}.$$

Az adatokat behelyettesítve azt kapjuk, hogy a filmen a lencsétől 4008 mm ≈ ≈ 4,0 m és 6645 mm ≈ 6,6 m közötti távolságban lévő pontok kisebb, mint 0,05 mm átmérőjű foltként jelennek meg, ekkora tehát a $2R=20$ mm átmérőjű lencsénél a fényképezőgép „mélységélessége”.

Ha a lencse átmérőjét leszűkítjük $2R=10$ mm-re, akkor a fenti képleteket alkalmazva azt kapjuk, hogy a lencsétől 3345 mm ≈ 3,3 m és 9903 mm ≈ 10 m közötti távolságban lévő pontok látszanak a filmen „élesen”, ekkor lesznek a pontszerű tárgyak képei 0,05 mm átmérőjű foltnál kisebbnek, vagyis az objektív „blendézése” a mélységélességet megnöveli.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes Gurzó József, Kertész Balázs, Koleszár Benedek, Sas Mór, Szabó Márton, Toronyi András, Téglás Panna, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 3, hibás 1 dolgozat.

Kedves Olvasóink!

Szeretnénk felmérni a KöMaL és pontversenyeinek tartalmáról, ismertségéről alkotott véleményeket. Kérjük, hogy a honlapunk főoldaláról (`www.komal.hu`) elérhető kérdőívet töltsék ki, és biztassák erre a matematika vagy a természettudományok iránt érdeklődő ismerőseiket is.

kérdőív diákok részére

kérdőív nem diákok részére

Felhívás a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóversenyre

A Nemzetközi Fizikai Diákolimpián (IPhO) és az Európai Fizikai Diákolimpián (EuPhO) szereplő magyar csapat tagjait minden évben a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny keretében választjuk ki a budapesti és vidéki diákolimpiai szakkörökre járó diákok közül. A járványhelyzet miatt idén a diákolimpiai szakkörök nem tudtak a szokásos formában működni, ezért a Kunfalvi-verseny első (elméleti) fordulóját online szervezzük meg.

A verseny teljesen nyitott: részt vehet bárki, aki jelenleg középiskolai tanuló. A feladatsor **2021. március 22-én (hétfőn), 15:00 órától** lesz elérhető a `http://ipho.elte.hu` honlapon. A versenyre előzetesen jelentkezni nem kell, elég a feladatsoron található versenyszabályzatnak megfelelően elkészíteni a dolgozatot, és annak szkennelt változatát legkésőbb március 22. 18:30-ig elküldeni az `iphoteamhun@gmail.com` címre.

A feladatok tematikája azonos az IPhO hivatalos tematikájával*, tehát nem szorítkozik csupán a magyar gimnáziumi fizika tananyagra. A versenyen zsebszámológépen kívül semmilyen segédeszköz sem használható (tehát függvénytáblázat, könyvek, füzetek és internet se). Felkészüléshez javasoljuk a korábbi évek feladatsorait és a budapesti szakkör YouTube-csatornáján (IPhO Hungary) található videókat.

A versenybizottság

Fizikából kitűzött feladatok

M. 403. A kereskedelemben kapható néhány szemcsés anyag esetében (pl.: lencse, rizs, tarhonya stb.) méréssel határozzuk meg, hogy tárolási térfogatuk hány százaléka levegő!

(*6 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

*Lásd a `https://www.ipho-new.org/statutes-syllabus` weboldalt.

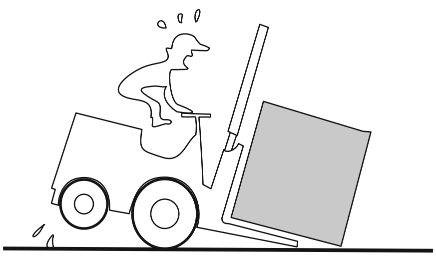
G. 737. Hány egyenlő részre kell vágni a 100 Ω-os ellenálláshuzalt, hogy a részeket párhuzamosan kapcsolva az eredő ellenállásuk 1 Ω legyen?

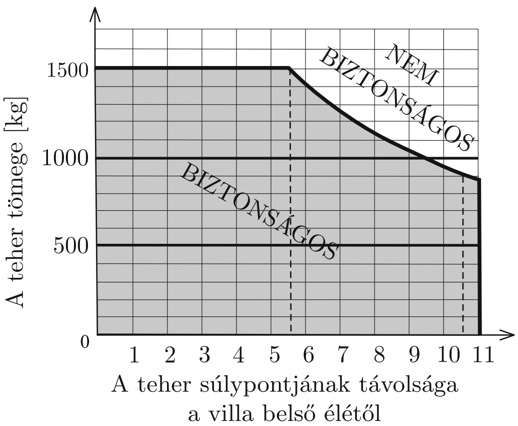
(*3 pont*)

G. 738. A földrengések kipattanásakor többféle hullám indul el a rengés centrumából. Az úgynevezett primer (p) hullámok a leggyorsabbak, esetünkben 5 km/s a terjedési sebességük. A szekunder (s) hullámok lassabbak, 3 km/s sebességgel terjednek. Két szeizmológiai megfigyelőállomás 75 km-re fekszik egymástól. Az egyikben 6 másodpercet, a másikban 8 másodpercet észleltek a p és az s hullámok érkezése között. Legfeljebb milyen mélyen lehetett a földrengés központja?

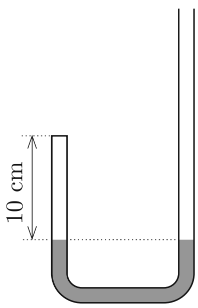
(*4 pont*)

G. 739. A nem megfelelően elhelyezett terhek felboríthatják a villástargoncát. Ezért a targoncákhoz mellékelnek egy úgynevezett villaterhelési diagramot (lásd az *ábrát*). Állapítsuk meg a diagram alapján, hogy milyen vízszintes távolságra van a villa sarokpontjától a targonca első kerekének tengelye, illetve, hogy vízszintes irányban milyen messze van a villa sarkától az 1200 kg-os targonca súlypontja!





(*4 pont*)



G. 740. Az *ábrán* látható aszimmetrikus U alakú cső 2 cm^2 keresztmetszetű, benne higany található. A bal oldali ág tetején a csövet lezárjuk, így ott 10 cm magas, 1 atm nyomású levegőoszlop zárul be. Hány cm^3 higanyt kell lassan és óvatosan a jobb oldali szárba töltenünk, hogy a bal oldali ágban a levegőoszlop magassága felére csökkenjen?

(*3 pont*)

P. 5305. Mari egy forgó körhintában ül, és éppen az Imrétől kapott mézeskalácsban gyönyörködik. A mézeskalács pályájának sugara $R = 5$ m, körmozgásának periódusideje $T_0 = 5$ s, és a pálya síkja $H = 3{,}2$ m magasan van a talaj fölött. Mari olyan óvatlan, hogy egy adott pillanatban véletlenül elejti az ajándékát. Milyen távolságra van Mari mozdulatlanul tartott keze a mézeskalácstól, amikor az földet ér? A mézeskalács méretét és a légellenállást elhanyagolhatjuk.

(*4 pont*) Közli: *Szabó Endre,* Vágfüzes (Szlovákia)

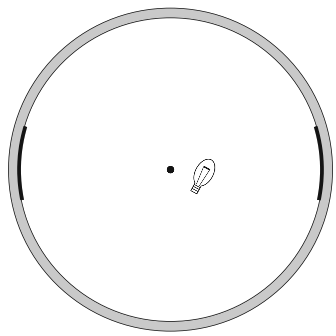
P. 5306. Egy egykerekű „kerékpár" (monocikli) áll instabil helyzetben. Arrébb akarunk menni vele. Ehhez fel kell gyorsulni bizonyos sebességre, majd állandó sebességgel haladni, utána lelassítani, és végül egyensúlyi helyzetben megállni. Hogyan kell ehhez tekerni a pedálokat, hogy ne essünk le?

(*5 pont*) **Tichy Géza** (1945–2021) feladata

P. 5307. Egy szivattyú szívássebessége 150 $\mathrm{cm^3/s}$. Mennyi időre van szükség ahhoz, hogy egy háromliteres lombikban lévő levegő nyomását szivattyúzással a normál 10^5 Pa-ról ennek ezredrészére csökkentsük izotermikusan?

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

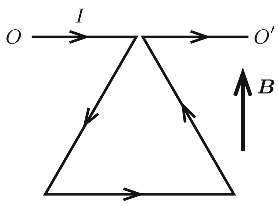
P. 5308. Egy 24 cm átmérőjű, gömb alakú tejüveg lámpabúrában a villanykörte kicsiny izzószála a búra közepétől 3 cm-re tolódott el. Az izzószál közepét a gömb középpontjával összekötő egyenes mentén, azzal kis szöget bezárva terjedő és a búra faláról többszörösen visszaverődő fénysugarak így az izzószálnak olyan két valódi képét is létre tudják hozni, amelyek 2-2 cm-re vannak a gömb középpontjától. Hogyan keletkeznek ezek a képek, és hogyan aránylik egymáshoz e két kép nagysága?



(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5309. Három töltetlen fémgömböt úgy helyezünk el, hogy középpontjuk egy a oldalú szabályos háromszög csúcsaira essen. A gömbök sugara rendre R, R, illetve $r = \frac{1}{3}R$, és sokkal kisebbek a háromszög oldalánál. Először az első gömbre Q töltést viszünk fel. Ezután úgy viszünk át töltést a másik kettőre, hogy egy hosszú fémhuzal végeit hozzáérintjük előbb az első és a harmadik, majd az első és a második gömbhöz. Mekkora és milyen irányú lesz az elektromos térerősség a szabályos háromszög középpontjában?

(*4 pont*) Közli: *Kobzos Ferenc,* Dunaújváros



P. 5310. Szigetelt vezetőhuzalból egy olyan egyenlő oldalú háromszöget készítünk, amely a vízszintes OO' tengely körül súrlódásmentesen foroghat. A huzal merev, hosszegységre eső tömege λ. Kezdetben a háromszög síkja függőleges, és olyan homogén mágneses mezőben van, amelyben a $\boldsymbol{B}$ mágneses indukcióvektor függőlegesen felfelé mutat. Egy adott pillanatban feszültségforrást kapcsolunk a rendszerre, így abban I erősségű áram indul el. (Az induktivitástól eltekinthetünk.)

a) Mekkora gyorsulással indul el a háromszög vízszintes oldala?

b) Mekkora szöget zár be a háromszög síkja a függőleges iránnyal, ha elegendő ideig várunk?

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

P. 5311. Az elektromos térerősség a tengerszinten kb. 100 V/m, és az ionoszféra magassága 10 km. A földi mágneses tér tengerszinten átlagosan 10^{-5} T, és a Föld középpontjától mért távolság köbével fordítottan arányos. Becsüljük meg nagyságrendileg a Föld körüli magnetosztatikus energia és az elektrosztatikus energia arányát!

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5312. Két henger közül az elsőben lévő egyatomos gáz térfogata 3 dm^3, nyomása $2\cdot10^5$ Pa, benne a részecskék száma $5\cdot10^{22}$, a másodikban található kétatomos gáz térfogata 4 dm^3, nyomása $0{,}2\cdot10^5$ Pa, részecskéinek száma $2{,}5\cdot10^{22}$.

a) Melyik gáz melegebb és hányszor nagyobb a hőmérséklete?

b) Mekkora a két gáz energiája?

c) Mennyi energia jut egy részecskére és a gázrészecskék egy szabadsági fokára?

(*3 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5313. Egy protonnyalábot álló céltárgyra ejtünk. Ha a nyalábban lévő protonok mozgási energiája nagyobb egy kritikus E_{krit} értéknél, akkor a beeső protonok a céltárgyban lévő, nyugvónak tekinthető protonokkal ütközve pozitív pionokat (π^+) kelthetnek az alábbi módon:

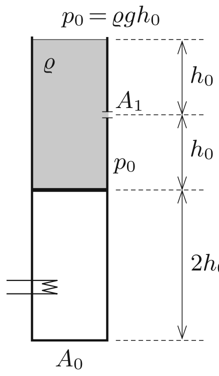
$$\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ \Rightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{n}^0 + \pi^+.$$

Határozzuk meg E_{krit} értékét MeV egységekben!

Felhasználható adatok: a proton nyugalmi energiája 938,27 MeV, a neutron nyugalmi energiája 939,57 MeV, a pion nyugalmi energiája 139,57 MeV.

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

P. 5314. Egy függőleges, jól hőszigetelt, felül nyitott, A_0 keresztmetszetű hengert két részre oszt egy szintén hőszigetelő anyagból készült, elhanyagolható vastagságú és tömegű dugattyú. A dugattyú alatti $2h_0$ magasságú térrészben levegő, míg felette $2h_0$ magasságban ϱ sűrűségű folyadék található. A dugattyú felett h_0 magasságban a folyamat kezdetén megnyitunk egy apró, A_1 keresztmetszetű nyílást, melyen a folyadék elkezd kifolyni a hengerből. A számítások során a légköri nyomás értékét vegyük $p_0 = \varrho g h_0$-nak.



a) Hogyan változtassuk az elzárt levegőt melegítő fűtőszál teljesítményét az idő függvényében, hogy a folyadék állandó sebességgel folyjon ki a nyíláson?

b) Mennyi ideig tudjuk biztosítani a folyadék állandó sebességű kiáramlását, és ezen időpont után ez már miért nem oldható meg a fűtőszállal?

(*6 pont*) Közli: *Olosz Balázs,* Budapest

❄

Beküldési határidő: 2021. április 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 3. March 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 161): **K. 689.** In the 6th, 7th, 8th and 9th games of the season, a basketball player scored 23, 14, 11 and 20 points, respectively. His points average was higher after the 9th game than after the 5th game. With the 10th game, his average rose above 18. What is the lowest possible number of points that he may have scored in the 10th game? **K. 690.** Having a positive integer in mind, Peti formulated twenty-three statements about it. Two consecutive statements are false, but the rest of them are true: 1. It is divisible by 2. 2. It is divisible by 3. 3. It is divisible by 4. ... 23. It is divisible by 24. Peti was thinking about the smallest such number. What is his number? **K. 691.** $ABCDEFGH$ is a regular octagon and its sides are 2 units long. Squares $BCIM$ and $FGKL$ are drawn on sides BC and GF, on the inside. What is the area of the rectangle bounded by lines AH, KL, ED and IM? **K. 692.** A 6×6 square is dissected into lattice rectangles. What is the largest possible number of noncongruent rectangles obtained? Give an example. **K. 693.** Quadrilateral $ABCD$ has an inscribed circle centred at O. Show that the sum of $\angle DOC$ and $\angle BOA$ is 180°.

New exercises for practice – competition C (see page 161): **Exercises up to grade 10: C. 1658.** A circular disc is divided into six congruent sectors. A circle is inscribed in each sector. The circle touches the arc of the sector as well as the two radii. What fraction of the area of the large circle is covered by the six smaller circles? **C. 1659.** Ray a starts from point A of a line segment AB, and encloses an angle $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

with it. Ray b starts from point B, and encloses an angle $0^\circ < \beta < 90^\circ$ with the line segment AB. The two rays lie in two different half planes of a plane containing line AB. The circle of diameter AB intersects a again at A_1, and b at B_1. The circle of diameter A_1B_1 intersects the line containing a again at A_2, and the line containing b at B_2. What is the relationship between α and β if A_1B_1 and A_2B_2 are perpendicular? **Exercises for everyone: C. 1660.** The positive integers 1 to 61^2 are written in the fields of a 61×61 chessboard, starting from the top left corner and proceeding along each row in succession. Then some changes are made as follows. In the first move, the sign of each number is changed to negative. In the second move, the signs of all even numbers are changed. In the third move, the sign of every multiple of 3 is changed, and so on, while the moves are meaningful. When all this is completed, how many 1×2 rectangles will there be on the chessboard in which the sum of the numbers is negative? **C. 1661.** In a lottery game, the player bets 5 numbers out of the positive integers 1 to 90. Otto Lotter insists on increase, and he always keeps the following rules when making his bets: he marks 5 numbers such that every digit may only occur once, and if the five numbers are listed in increasing order, the digits must be ascending, too. For example, 1, 2, 3, 46, 78. How many suitable selections of five numbers are there? (Proposed by *Berkó Erzsébet,* Szolnok) **C. 1662.** For what values of the real parameter $a > 0$ will the equation $x^2 + a = \sqrt{x - a}$ have exactly one solution in the set of real numbers? What is the solution of the equation in that case? **Exercises upwards of grade 11: C. 1663.** The circles k_1 and k_2 touch each other externally at point E. Lines f and g pass through point E. One of the common external tangents touches the circle k_1 and k_2 at points C and D, respectively. Line h is obtained by dropping perpendiculars from point C onto lines f and g, and connecting the feet of the perpendiculars. Line m is obtained in the same way, with perpendiculars from point D. Prove that h and m are perpendicular to each other. **C. 1664.** Each of the diagonals AD, BE and CF of a convex hexagon $ABCDEF$ halves the area of the hexagon. Prove that these diagonals are concurrent.

New exercises – competition B (see page 163): **B. 5158.** Let A, B, C and D be points in the plane such that $AB < CB$ and $CD < AD$. Prove that the line segments AB and CD do not intersect each other. (*3 points*) **B. 5159.** Solve the equation $\left[\frac{2020-x}{x-1}\right] + \left[\frac{2021+x}{x+1}\right] = 82$ over the set of integers, where $[c]$ denotes the greatest integer not greater than c. (*4 points*) (Proposed by *Zs. M. Tatár,* Esztergom) **B. 5160.** What may be the value of $x+y+z$ if $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} + 3\sqrt{z-9} = \frac{x+y+z}{2}$? (*3 points*) (Proposed by *M. Szalai,* Szeged) **B. 5161.** 800 L-tetrominoes are laid on a 100×100 chesssboard. Prove that it is possible to place another L-tetromino on the board. The tetrominoes do not overlap, and each of them covers exactly 4 fields of the chessboard. An L-tetromino is defined as the shape shown in the *figure,* including any rotated or reflected images. (*6 points*) **B. 5162.** The sides of triangle ABC are 9, 10 and 17 units long. What is the area of the triangle formed by the exterior angle bisectors of triangle ABC? (*5 points*) (Proposed by *Zs. M. Tatár,* Esztergom) **B. 5163.** Triangle ABC is right-angled at C. The right angle is divided $2:1$ by a line such that the smaller part is closer to the shorter leg. This line intersects hypotenuse AB at T, and the circumscribed circle at D. What are the measures of the acute angles of the triangle if the feet of the perpendiculars dropped from D onto the lines of the legs are collinear with T? (*4 points*) **B. 5164.** Two players continue playing rock-paper-scissors games until one of them wins the third time. Assume that each player in each game selects rock, paper or scissors at random (independently of each other and of previous games), with probabilities of $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$. Determine the expected value of the number of games needed. (*5 points*) **B. 5165.** Given a positive integer k, is there a function $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, such that $f(x)+f\big(f(x)\big)=x+k$ for all $x\in\mathbb{N}$? (*6 points*) (Proposed by *M. Lovas,* Budapest)

New problems – competition A (see page 164): **A. 795.** The following game is played with a group of n people: $n+1$ hats are numbered from 1 to $n+1$. The people are blindfolded, and each of them is getting one of the $n+1$ hats on his head (the remaining hat is hidden). Now a line is formed from the n people, and their eyes are uncovered: each of them can see the numbers on the hats of the people standing in front of him. Now starting from the last person (who can see all the other players) the players take turns to guess the number of the hat on their head, but no two players can guess the same number (each player hears all the guesses from the other players). What is the highest number of guaranteed correct guesses, if the n people can discuss a common strategy after learning about the game? (Submitted by *Viktor Kiss,* Budapest) **A. 796.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let lines AB and CD intersect in P, and lines BC and DA intersect in Q. The feet of the perpendiculars from P to BC and DA are K and L, and the feet of the perpendiculars from Q to AB and CD are M and N. The midpoint of diagonal AC is F. Prove that the circumcircles of triangles FKN and FLM, and the line PQ are concurrent. (Based on a problem by *Ádám Péter Balogh,* Szeged)

Problems in Physics

(see page 185)

M. 403. For some commercially available granular matter (e.g. lentils, rice, egg barley, etc.) determine by measurement what percentage of their storage volume is air.

G. 737. To how many equal parts should a piece of wire of resistance 100 Ω be cut, in order to gain an equivalent resistance of 1 Ω when the pieces are connected in parallel? **G. 738.** When an earthquake occurs several waves are generated from the centre of the quake. The so called primary waves (P-waves) are the fastest, in our case their propagation speed is 5 km/s. The secondary waves (S-waves) are slower, they travel at a speed of 3 km/h. Two seismic observatories are at a distance of 75 km from each other. In one of them 6 seconds were measured between the detection of the P and S waves, whilst in the other 8 seconds elapsed. At what maximum depth could the centre of the earthquake be? **G. 739.** Improperly positioned loads can tip over the fork-lift trunk. Therefore a so-called load capacity chart is attached to the truck (see the *figure*). Using the chart determine the horizontal distance from the heel of the fork to the axle of the front wheel of the truck, and the horizontal distance between the heel of the fork and the centre of mass of the truck of mass 1200 kg. **G. 740.** The asymmetrical U-shaped tube shown in the *figure* has a cross-sectional area of 2 cm^2, and it is filled with mercury. The top of the tube at the left is sealed, thus in this arm, there will be an air column of height 10 cm, at a pressure of 1 atm. How many cm^3 of mercury should be filled slowly and carefully into the right arm, in order to decrease the level of mercury in the right arm to half of the original height?

P. 5305. Mary is sitting in a rotating merry-go-round, admiring the gingerbread she has just received from Ian. The radius of the circular path of the gingerbread is $R=5$ m, its period is $T_0=5$ s and the plane of its path is at a height of $H=3.2$ m. Mary is so careless that she accidentally drops her gift. How far is Mary's hand, which she does not move, from the gingerbread at the moment when the gingerbread touches the ground? Neglect the size of the gingerbread and air resistance. **P. 5306.** A bicycle-like vehicle with only one wheel, called unicycle, is at rest in an unstable position. We would like to move further with it. To do this we have to speed up first, then we need to move uniformly and then we have to slow down and leave the unicycle in the original unstable position. How do we need to pedal in order not to fall from the unicycle? **P. 5307.** The pumping rate of a pump is 150 cm^3/s. How long does it take to decrease the pressure of the air in a 3-litre container from the normal atmospheric pressure of 10^5 Pa to one-thousands of this value by pumping out the air isothermally? **P. 5308.** In a 24 cm diameter spherical milk glass lampshade, the small filament of the light bulb is 3 cm from the centre of the sphere. Two real images of the filament, each at a distance of 2 cm from the filament can be formed by the light rays which are reflected several times from the surface of the glass, and which originally travelled along the line which nearly coincides with the line joining the centre of the sphere and the filament, enclosing a small angle with it. How are these images formed and what is the ratio of the size of these images? **P. 5309.** Three uncharged metal spheres are placed to the vertices of an equilateral triangle of sides a. The radius of the first, the second and the third sphere are R, R, and $r = \frac{1}{3}R$, respectively. Each radius is much smaller than the side of the triangle. First the first sphere is charged to Q, and then the other two spheres are also charged, by connecting the two ends of a long wire to the first and the third spheres and then connecting to the first and the second spheres. What will the direction of the electric field be at the centre of the equilateral triangle? **P. 5310.** An equilateral triangle is formed from a piece of insulated wire such that it can be rotated frictionlessly along the horizontal axis of OO'. The wire is rigid and its mass per unit length is λ. Initially the plane of the triangle is vertical, and it is in uniform vertical upward magnetic field of induction $\boldsymbol{B}$. At a certain moment a voltage supply is connected to the system thus a current of I starts to flow in the wire. (Neglect the inductance of the wire.) *a*) At what acceleration does the horizontal side of the triangle begin to move? *b*) After a long enough time what will the angle between the plane of the triangle and the vertical be? **P. 5311.** The electric field at sea level is approximately 100 V/m, and the height of ionosphere is 10 km. The average magnetic induction of the Earth at sea level is 10^{-5} T, and its value is approximately indirectly proportional to the cube of the distance measured from the centre of the Earth. Estimate the order of the ratio of the magnetostatic and electrostatic energy around the Earth. **P. 5312.** We have two cylinder-shaped containers, the first contains a sample of monatomic gas of volume 3 dm^3, at a pressure of $2 \cdot 10^5$ Pa, and the number of particles in it is $5 \cdot 10^{22}$. The second has a volume of 4 dm^3 and contains a sample of diatomic gas of $2.5 \cdot 10^{22}$ particles at a pressure of $0.2 \cdot 10^5$ Pa. *a*) Which gas is warmer, and by what factor is the temperature of the warmer gas greater than that of the colder? *b*) What is the energy of each sample of gas? *c*) How much energy can be related to a gas particle and to one degree of freedom of a particle? **P. 5313.** A beam of protons is aimed at a target, which is at rest. If the kinetic energy of the protons in the beam is greater than a critical value of E_{crit}, then the incident protons may generate positive pions (π^+) by colliding the protons of the target, which can be considered being at rest, accordingly the following equation: $\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ \Rightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{n}^0 + \pi^+$. Determine the value of E_{crit} in MeV. Available data: the rest energy of a proton is 938.27 MeV, the rest energy of a neutron is 939.57 MeV and the rest energy of a pion is 139.57 MeV. **P. 5314.** A vertical thermally insulated cylinder of cross sectional area A_0 is open at its top and is divided into two parts by a thermally insulated piston of negligible width and mass. The part below the piston has a height of $2h_0$ and contains air. Above the piston there is some liquid of density ϱ and of height $2h_0$. Above the piston at a height of h_0 a small hole of cross section A_1 is opened at the beginning of the process, through which the liquid begins to flow out. The ambient atmospheric pressure is $p_0 = \varrho g h_0$. *a*) How should we change the power of the electric heating element which can heat the air below the piston in order that the fluid flow out at a constant rate? *b*) For how long can we use the heating element to maintain the constant flow rate of the fluid, and after this time has elapsed why can't this be done with operating the heating element?