Fizika gyakorlat megoldása

G. 722. *Felül nyitott edényben gázlángon vizet forralunk. Közvetlenül a gáz elzárása és a láng kialvása után fehér gőzfelhőt figyelhetünk meg az edény felett. Magyarázzuk meg ezt a jelenséget!*

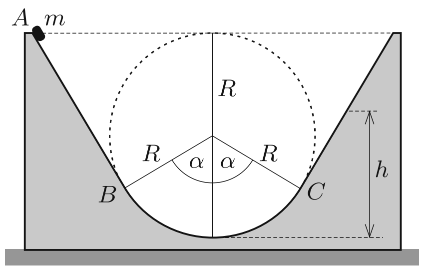
(*3 pont*)

Megoldás. Az edényben lévő víz a melegítés közben erőteljesen párolog, vízpárát juttatva az edény fölötti levegőbe. Ez a folyamat egy áramlás is egyben, hiszen a forró pára mindig felfelé száll, és a korábban képződött rétegek helyét átveszik az újonnan képződöttek. Ez a párolgás nem annyira szembeötlő jelenség, mint amit a feladat leír, hiszen a vízgőz átlátszó, és a levegő a melegítés hőfokán képes ezt a páratartalmat megtartani. Amint a melegítés megszűnik, ez az áramlás is megáll, tehát az intenzív párolgásból adódó páratartalom az edény közelében marad. Ezután – szintén a hőforrás hiánya miatt – gyors lehűlés következik be. A hideg levegő kevesebb párát tud megtartani, aminek következtében a maradék páratartalom ködszerű, fehér gőzfelhő formájában kicsapódik. A gőzfelhőben lévő parányi vízcseppeken szóródik a fény, ezért az jól látható.

Jeszenői Sára (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 14, hibás 3, nem versenyszerű 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



P. 5251. *Az m tömegű, kis méretű testet az* ábrán *látható, rögzített hasáb A pontjában kezdősebesség nélkül elengedjük. A test a bal oldali egyenes szakaszon és az R sugarú köríven súrlódásmentesen csúszik. A jobb oldali egyenes szakasz nem súrlódásmentes, a súrlódási tényező μ.*

a) Mekkora erővel nyomja a test a hasábot a pálya legmélyebb pontján?

b) Mekkora a test sebessége a C pontban?

c) Milyen h magasságba emelkedik fel a test?

Adatok: $m = 0{,}6$ kg, $R = 30$ cm, $\alpha = 60^\circ$, $\mu = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) A mozgás azon szakaszán, ahol nincs súrlódás, alkalmazható a mechanikai energiamegmaradás tétele. A test helyzeti energiája az A pont és a pálya legmélyebb pontja között $\Delta E_\mathrm{h} = mg\cdot 2R$ értékkel csökken. Ez akkor egyezik meg a v sebességgel haladó test $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiájával, ha

$$v = \sqrt{4gR} = \sqrt{4\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}3\ \mathrm{m}} \approx 3{,}43\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

ekkora tehát a pálya alsó részénél körmozgást végző test kerületi sebessége. A pálya legmélyebb pontján a körmozgást végző test centripetális gyorsulását a testre ható mg nagyságú nehézségi erő és a pálya által kifejtett N nagyságú nyomóerő előjeles összege biztosítja:

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg,$$

ahonnan

$$N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = 5\,mg = 5\cdot 0{,}6\ \mathrm{kg}\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \approx 29{,}4\ \mathrm{N}$$

adódik. Ekkora erővel nyomja a hasáb a testet függőlegesen felfelé, tehát (a hatás-ellenhatás törvénye szerint) ugyanekkora erőt fejt ki a test a hasábra függőlegesen lefelé.

b) A test a C pontban $R + R\cos\alpha = \frac{3}{2}R = 0{,}45$ méterrel alacsonyabban van, mint az A pontban volt. Az energiamegmaradás tétele szerint

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = mg\cdot\frac{3}{2}R,$$

vagyis a test sebessége a C pontban

$$v_C = \sqrt{3gR} = \sqrt{3\cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot 0{,}3\ \mathrm{m}} = 2{,}97\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

nagyságú lesz.

c) Miután a test letér a körpályáról, egy $\alpha = 60^\circ$-os meredekségű lejtőn halad tovább. A test mozgását egyrészt a nehézségi erő lejtő irányú komponense, másrészt a súrlódási erő lassítja. Ezek eredője:

$$F = mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha = mg\sin\alpha + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\cdot mg\cos\alpha = \frac{3}{2}mg\sin\alpha,$$

és ennek megfelelően a test lassulása

$$|a| = \frac{3}{2}\,g\sin\alpha = 12{,}74\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Ekkora lassulással a lejtő aljánál v_C sebességgel rendelkező test

$$\Delta t = \frac{v_C}{|a|} = 0{,}233\ \mathrm{s}$$

idő múlva áll meg. Mivel az egyenletesen lassuló test átlagsebessége

$$\overline{v} = \frac{1}{2} v_C = 1{,}485\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

a megállásig megtett út hossza: $s = \overline{v} \cdot \Delta t = 0{,}346$ m. Ennek megfelelően a lejtőn mozgó test függőleges emelkedési magassága

$$h_1 = s \cdot \sin\alpha = 0{,}30\ \mathrm{m},$$

amihez hozzáadva a C pontnak a pálya legalsó pontjához viszonyított

$$h_2 = R(1 - \cos\alpha) = \frac{1}{2} R = 0{,}15\ \text{m-es}$$

magasságát, az emelkedés teljes magasságára a $h = h_1 + h_2 = 0{,}45$ m eredményt kapjuk.

Kovács Kinga (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

91 dolgozat érkezett. Helyes 43 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 16, hiányos (1–3 pont) 26, hibás 5, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5253. *Az Orfűn található Pécsi-tó átlagos vízmélysége* 3,3 *méter. A* 25 °C-*os víz hőmérsékletének mekkora változása okozná a vízszint fél centiméteres süllyedését?*

(*4 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Legyen a tó kezdeti hőmérséklete $t_0 = 25$ °C, kezdeti átlagos mélysége $d_0 = 3{,}3$ m, kezdeti térfogata V_0, a térfogatváltozás ΔV, a tó átlagos mélységének megváltozása $\Delta d = -0{,}5\ \mathrm{cm} = -5 \cdot 10^{-3}$ m, a keresett hőmérséklet-változás Δt, $t_0 + \Delta t = t_1$, és a víz sűrűsége t_1 hőmérsékleten ϱ_1.

Az egyszerűség kedvéért tekintsük úgy, hogy a tó medrének fala függőleges az adott fél centiméteren. (Ez nyilván nem igaz, de a meder falának ferdeségéből adódó térfogatkülönbség az egész tó fél centiméter vastag rétegének térfogatához képest elhanyagolhatóan kicsi.) Megállapíthatjuk, hogy

$$\Delta V = \frac{\Delta d}{d_0} V_0 = -\frac{0{,}5}{330} V_0.$$

A függvénytáblázat szerint

$$\varrho_{25\,^\circ\mathrm{C}} = 997{,}07\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Számítsuk ki, hogy mekkora a víz sűrűsége a keresett t_1 hőmérsékleten! Mivel a víz tömege (m) állandó,

$$\varrho_{t_1} = \frac{m}{V_0 + \Delta V} = \frac{m}{\left(1 - \frac{0{,}5}{330}\right) \cdot V_0} = \varrho_{25\,^\circ\mathrm{C}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}5}{330}} =$$

$$= 997{,}07\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{0{,}5}{330}} \approx 998{,}58\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}.$$

Ugyancsak a függvénytáblázat adatai szerint:

$$\varrho_{15\ ^\circ\mathrm{C}} = 999{,}126\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

és

$$\varrho_{20\ ^\circ\mathrm{C}} = 998{,}23\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3},$$

tehát a keresett t_1 hőmérséklet 15 °C és 20 °C közé esik.

Közelítsük a víz sűrűség–hőmérséklet függvényét a [15 °C; 20 °C]-os intervallumon egy lineáris függvénnyel, mely értéke 15 °C-nál $\varrho_{15\ ^\circ\mathrm{C}} = 999{,}126\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, 20 °C-nál $\varrho_{20\ ^\circ\mathrm{C}} = 998{,}23\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$. Ennek a lineáris függvénynek a meredeksége:

$$\frac{\varrho_{20\ ^\circ\mathrm{C}} - \varrho_{15\ ^\circ\mathrm{C}}}{20\ ^\circ\mathrm{C} - 15\ ^\circ\mathrm{C}} \approx -0{,}179\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3(^\circ\mathrm{C})}.$$

Lineáris interpolációnál ugyanezt a meredekséget adja a $\frac{\varrho_{t_1} - \varrho_{15\ ^\circ\mathrm{C}}}{t_1 - 15\ ^\circ\mathrm{C}}$ hányados, azaz felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{\varrho_{t_1} - \varrho_{15\ ^\circ\mathrm{C}}}{t_1 - 15\ ^\circ\mathrm{C}} = -0{,}179 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3\ (^\circ\mathrm{C})}.$$

Innen

$$t_1 = \frac{\varrho_{t_1} - \varrho_{15\ ^\circ\mathrm{C}}}{-0{,}179\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3 \cdot {}^\circ\mathrm{C}}} + 15\ ^\circ\mathrm{C} = \frac{998{,}58 - 999{,}126}{-0{,}179}\ ^\circ\mathrm{C} + 15\ ^\circ\mathrm{C} \approx 18\ ^\circ\mathrm{C}.$$

A tó hőmérséklete tehát 18 °C-ra változik, azaz a víz lehűlése:

$$\Delta t = t_1 - t_0 = 18\ ^\circ\mathrm{C} - 25\ ^\circ\mathrm{C} = -7\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Barta Gergely (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés. A legtöbb versenyző a víz térfogatváltozását a víz valamilyen hőmérséklethez tartozó hőtágulási együtthatójának segítségével próbálta meghatározni. Ez meglehetősen pontatlan eljárás, hiszen a víz sűrűség–hőmérséklet összefüggése csak nagyon kicsiny szakaszokon tekinthető lineáris függvénynek. (Ezt a tulajdonságot úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a víz hőtágulási együtthatója erősen hőmérsékletfüggő.) Pontosabb eredményt kapunk, ha a sűrűség–hőmérséklet kapcsolatot táblázatból keressük ki. Az interneten megtalálható táblázatok (vagy sűrűségkalkulátorok) használatával még a lineáris interpoláció fáradságos munkáját is elkerülhetjük.

94 dolgozat érkezett. Helyes 35 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 16, hiányos (1–2 pont) 25, hibás 13, nem versenyszerű 5 dolgozat.

P. 5256. *Hogyan változik meg egy síkkondenzátor kapacitása, ha a fegyverzetek közötti térrész két felét két különböző dielektromos állandójú, homogén, elektromosan szigetelő anyaggal töltjük ki, és a két réteget elválasztó felület*

a) a fegyverzetekre merőleges sík;

b) a fegyverzetekkel párhuzamos sík?

(*4 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

Megoldás. Legyen a kétféle anyag relatív dielektromos állandója $\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}$ és $\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}$. Tudjuk, hogy ha egy C kapacitású kondenzátort egyenletesen kitöltünk $\varepsilon^{(\mathrm{rel})}$ relatív dielektromos állandójú anyaggal, akkor a kapacitás $C'=\varepsilon^{(\mathrm{rel})}C$-re változik.

a) Ebben az esetben az elrendezés felfogható két *párhuzamosan* kapcsolt kondenzátorként, melyek egyike $\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}$, másika $\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}$ relatív dielektromos állandójú anyaggal van kitöltve, hiszen ott is az egyik és másik oldalon lévő fegyverzetek külön-külön össze vannak kötve egymással, és így ekvipotenciálisak, éppen úgy, mint a mi esetünkben. Az így kapott két kondenzátor fegyverzetének területe feleakkora, mint az eredetié, és a kitöltő szigetelőanyagot is figyelembe véve kapacitásaik

$$C_1=\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}\frac{C}{2},\qquad \text{illetve}\qquad C_2=\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}\frac{C}{2}.$$

Az eredő kapacitás párhuzamos kapcsolásnál ezek összege:

$$C'=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}+\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}{2}C.$$

Ezek szerint a relatív dielektromos állandók *számtani* közepével szorzódik meg az eredeti kapacitás. Az is könnyen belátható, hogy ha más arányban osztják fel az egyes szigetelők a kondenzátor térfogatát, akkor szorzótényezőnek a *súlyozott* számtani közepet kapjuk.

b) Ebben az esetben a kétféle szigetelőanyagot elválasztó felület pontjai ekvipotenciálisak, hiszen a határfelület síkja párhuzamos a fegyverzetekkel. Ha ide két, vezetékkel összekötött, vékony fémlapot rakunk, attól nem változik meg az elektromos tér szerkezete, így sem a töltéselrendeződés, sem az eredő kapacitás nem változhat meg. Így két, különböző szigetelővel kitöltött kondenzátor *soros* kapcsolását kapjuk. A két új kondenzátor fegyverzetei közti távolság az eredeti érték fele, így a szigetelőanyagok jelenlétét is figyelembe véve a kapacitásuk

$$C_1=2\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}C\qquad \text{és}\qquad C_2=2\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}C.$$

Az eredő kapacitás soros kapcsolásnál:

$$C''=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}=\frac{2}{\frac{1}{\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}}+\frac{1}{\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}}C=\frac{2\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}{\varepsilon_1^{(\mathrm{rel})}+\varepsilon_2^{(\mathrm{rel})}}C.$$

Ilyenkor tehát a dielektromos állandók *harmonikus* közepével szorzódik meg az eredeti kapacitás. Ha a kétféle szigetelőanyag nem fele-fele arányban osztja fel a kondenzátor térfogatát, akkor súlyozott harmonikus középként kapjuk meg az eredő kapacitást.

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

35 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 9 , hibás 3, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5260. *Vízszintes tengelyű, rögzített hengeren súrlódó fonalat vetünk át. Ha a fonál bal oldali végére* m *tömegű nehezéket, a jobb oldalira pedig* $3m$ *tömegűt akasztunk, akkor az álló helyzetből elengedett testek* $2\ \mathrm{m/s^2}$ *nagyságú gyorsulással mozognak.*

a) Mekkora gyorsulással mozognak a testek, ha mindkét oldalon először megduplázzuk, majd megháromszorozzuk a tömegüket?

b) Mekkora gyorsulással mozognak a testek, ha a jobb oldalon meghagyjuk a $3m$ *nagyságú tömeget, de a bal oldali fonálvégre* $8m$ *tömegű testet akasztunk?*

c) Hogyan válasszuk meg a bal oldali fonálvégre akasztott test tömegét, miközben a jobb oldalon megmarad a $3m$ *tömeg, hogy elengedés után a rendszer nyugalomban maradjon?*

A fonál nagyon könnyű, továbbá a fonál és a henger közötti csúszási súrlódás együtthatója megegyezik a tapadási súrlódás együtthatójával.

(*6 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Az *1. ábra* az alapelrendezést mutatja. A testek gyorsulása $a=2\ \mathrm{m/s^2}$. Az egyes testekre K_1 és K_2 nagyságú fonálerő hat. A fonál súrlódik a hengeren, emiatt $K_1\neq K_2$. A jobb oldali test lefelé mozog, a bal oldali felfelé, ilyenkor $K_1>K_2$.

Jelöljük a fonálerők arányát λ-val:

$$\frac{K_1}{K_2}=\lambda>1.$$

A λ szám nagysága nyilván függ a súrlódási együtthatótól, a geometriai viszonyoktól, és elvben függhetne még a K_1 erő nagyságától is. Mivel λ dimenziótlan, K_1 pedig newton dimenziójú, λ *nem függhet* K_1-től, tehát a további esetekben (ha a fonál csúszik a hengeren) ugyanakkora számnak tekinthető.

Megjegyzés. A λ arányszám és a súrlódási együttható (μ) kapcsolatát felsőbb matematikai módszerekkel, az ún. kötélsúrlódási alapegyenlet megoldásával lehet meghatározni. Az eredmény: $\lambda=\mathrm{e}^{\mu\pi}$. Erre az összefüggésre azonban a feladatban feltett kérdések megválaszolásához nem lesz szükségünk.

Írjuk fel mindkét testre a dinamika alapegyenletét, és fejezzük ki a kötélerők arányát!

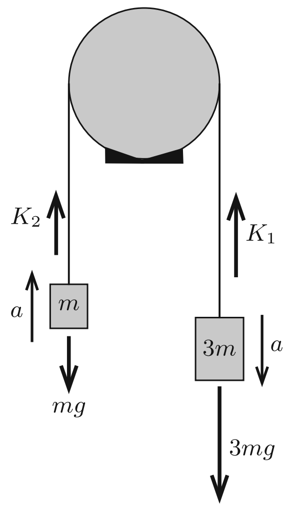
$$\begin{aligned} 3mg-K_1&=3ma &\quad\Rightarrow\quad& K_1=3m(g-a),\\ K_2-mg&=ma &\quad\Rightarrow\quad& K_2=m(g+a),\end{aligned}$$

ahonnan

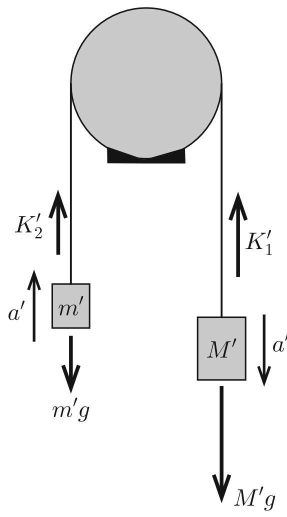
$$\lambda=\frac{K_1}{K_2}=\frac{3(g-a)}{g+a}=1{,}98\approx 2.$$

(A kötélsúrlódási egyenlet szerint ez kb. $\mu=0{,}2$-nek felel meg.)

Írjuk fel a mozgásegyenleteket általánosan, más tömegek esetére is! A fonál jobb oldali végén legyen egy M', a bal oldalin egy m' tömegű test ($M'>m'$), a rájuk



1. ábra



2. ábra

ható fonálerők nagysága pedig K_1' és K_2'. A nagyobb tömegű test a' gyorsulással kezd el mozogni lefelé (*2. ábra*).

A fonál és a henger közötti súrlódási tényező továbbra is μ, tehát a fonálerők aránya ugyanakkora, mint az alapesetben:

$$\frac{K_1'}{K_2'} = \lambda = 1{,}98 \approx 2.$$

A mozgásegyenletek tehát

$$M'g - K_1' = M'a' \qquad \Rightarrow \qquad K_1' = M'(g-a'),$$
$$K_2' - m'g = ma' \qquad \Rightarrow \qquad K_2' = m'(g+a'),$$

valamint $K_1' = \lambda K_2'$. Innen a gyorsulás:

$$a' = \frac{(M'/m') - \lambda}{(M'/m') + \lambda} \cdot g. \tag{1}$$

a) Ha a tömegeket az eredeti értékek kétszeresére, illetve háromszorosára növeljük ($m' = 2m$ és $M' = 6m$, illetve $m' = 3m$ és $M' = 9m$), akkor a tömegek aránya ugyanakkora marad, mint az alapesetben volt ($M'/m' = 3$), tehát a gyorsulás mindegyik esetben

$$a' = \frac{3 - 1{,}98}{3 + 1{,}98} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 2{,}0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

b) Ebben az esetben a bal oldali test a nagyobb tömegű, az fog tehát lefelé mozogni. Cseréljük fel a jobb és a bal oldalt, hogy az (1) összefüggést használhassuk. Most $M' = 8m$ és $m' = 3m$, tehát a testek gyorsulása:

$$a' = \frac{8 - 3 \cdot 1{,}98}{8 + 3 \cdot 1{,}98} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1{,}45\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

c) Milyen tömegarány esetén fordul elő, hogy a nehezebb test még *éppen* nem tudja elhúzni a könnyebbet, vagyis erőegyensúly van, de ha a nagyobb tömegű testet egy nagyon kicsit meglökjük lefelé, akkor egyenletesen ($a' = 0$ gyorsulással) fog mozogni? Az (1) összefüggés szerint ennek feltétele: $M' = \lambda m' \approx 2m'$. (Kihasználtuk, hogy a csúszási súrlódás együtthatója megegyezik a tapadási súrlódás együtthatójával.)

Két esetet kell megkülönböztetnünk. Ha a jobb oldali $M' = 3m$ tömeg a nagyobb, akkor a bal oldali fonálvégen legalább $m' = 1{,}5\,m$ tömegű test kell legyen. Ha viszont a $3m$ tömeg a kisebb, akkor megint fel kell cserélnünk a jobb és a bal oldalt, m' lesz $3m$ nagyságú és M' legfeljebb $\lambda m' \approx 6m$ lehet.

Összefoglalva: ha a jobb oldalon $3m$ tömegű test van, akkor a bal oldali fonálvégre legalább $1{,}5\,m$, de legfeljebb $6m$ tömegű testet kell akasztani ahhoz, hogy a rendszer elengedés után nyugalomban maradjon.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.) és
Kertész Balázs (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

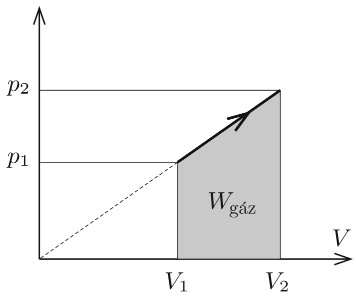
42 dolgozat érkezett. Helyes Fekete András Albert, Toronyi András, Kertész Balázs és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (5 pont) 5, hiányos (1–4 pont) 30, hibás 2, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5266. *Az f szabadsági fokú molekulákból álló ideális gáz valamely egyensúlyi folyamata során úgy tágul ki, hogy közben nyomása a térfogatával egyenes arányban növekszik. A végzett munkánál hányszor több hőt vesz fel ilyenkor a gáz?*

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. A gáz úgy tágul, hogy a nyomása arányos a térfogatával, vagyis

$$\frac{p_1}{V_1} = \frac{p_2}{V_2}, \qquad \text{tehát} \qquad p_1V_2 = p_2V_1. \tag{1}$$



Szemléltessük a folyamatot p–V diagramon. A gáz munkája a sötétebben jelölt trapéz területe:

$$W_{\text{gáz}} = \frac{(p_1+p_2)(V_2-V_1)}{2} =$$

$$= \frac{p_2V_2 - p_1V_1 + (p_1V_2 - p_2V_1)}{2},$$

ami (1) alapján így is felírható:

$$W_{\text{gáz}} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2}.$$

Vizsgáljuk most a gáz belső energiájának megváltozását. Ha a gáz molekuláinak f szabadsági foka van, akkor

$$\Delta E_\mathrm{b} = \frac{f}{2} nR\Delta T = \frac{f}{2}\Delta(pV) = \frac{f}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

A hőtan I. főtétele szerint

$$\Delta E_\mathrm{b} = Q + W_\text{gázon}, \qquad \text{vagyis} \qquad Q = \Delta E_\mathrm{b} + W_\text{gáz} = \frac{f+1}{2}(p_2V_2 - p_1V_1).$$

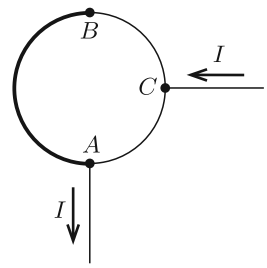
Leolvashatjuk, hogy a keresett arány:

$$\frac{Q}{W_\text{gáz}} = f + 1.$$

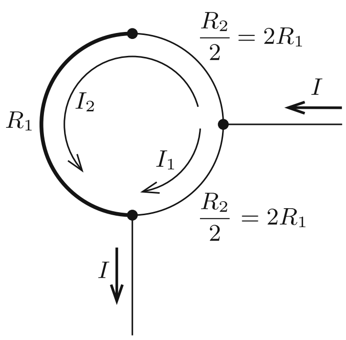
Koszta Benedek (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 11. évf.)

51 dolgozat érkezett. Helyes 28 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 3 dolgozat.

P. 5268. *Egy* $d_1 = 3$ mm *és egy* $d_2 = 1{,}5$ mm *átmérőjű rézvezetéket úgy forrasztunk össze, hogy az egyes vezetékdarabok félköröket alkotva* $r = 4$ cm *sugarú körré egészítsék ki egymást. A zárt kör egyik forrasztási pontjához* (A) *és a vékonyabbik huzalból készült félkör felezőpontjához* (C) *egy-egy igen hosszú egyenes vezeték csatlakozik. Határozzuk meg a körvezető középpontjában a mágneses mező indukcióvektorát, ha a csatlakozó vezetékekben* $I = 25$ A *erősségű áram folyik!*



(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



Megoldás. Legyen a d_1 átmérőjű (tehát a vastagabb) huzal ellenállása R_1. A másik, d_2 átmérőjű (vékonyabb) huzal teljes félkörének ellenállása a keresztmetszetek arányának megfelelően nagyobb:

$$R_2 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 R_1 = 4R_1,$$

a negyedkörök ellenállása pedig $2R_1$ (lásd az *ábrát*).

Ha a főág I erősségű árama a két ágban I_1 és I_2 erősségű áramokra oszlik, akkor az

$$I_1 + I_2 = I \qquad \text{és} \qquad 2R_1 \cdot I_1 = 3R_1 \cdot I_2$$

összefüggéseknek megfelelően

$$I_1 = \frac{3}{5}I, \qquad \text{illetve} \qquad I_2 = \frac{2}{5}I.$$

Ismert, hogy egy r sugarú, I erősségű árammal átjárt körvezető mágneses indukcióvektorának nagysága a kör középpontjában

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r},$$

és a körívek járuléka a mágneses indukcióhoz (a Biot–Savart-törvény szerint) a körívek hosszának megfelelően kisebb. Ezek szerint a negyedkör által létrehozott mágneses indukcióvektor nagysága

$$B_1=\frac{1}{4}\,\frac{\mu_0 I_1}{2r}=\frac{3}{40}\,\frac{\mu_0 I}{r},$$

a háromnegyed kör mentén folyó áram járuléka pedig

$$B_2=\frac{3}{4}\,\frac{\mu_0 I_2}{2r}=\frac{3}{20}\,\frac{\mu_0 I}{r}.$$

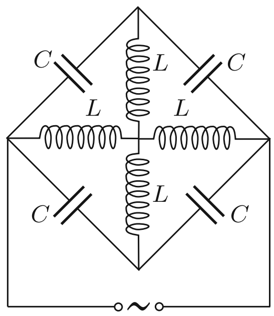
Mindkét indukcióvektor merőleges a kör síkjára, de az irányuk egymással ellentétes ($\boldsymbol{B}_2$ az ábra síkjából kifelé, $\boldsymbol{B}_1$ pedig az ábra síkjába befelé mutat). A két egyenes vezeték árama a kör középpontjában nem hoz létre mágneses indukciót, így az egész elrendezés eredő mágneses indukcióvektorának nagysága

$$|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}_2|-|\boldsymbol{B}_1|=\frac{3}{40}\,\frac{\mu_0 I}{r}=58{,}9\ \mu\mathrm{T},$$

iránya pedig az ábra síkjára merőleges, abból *kifelé* mutat.

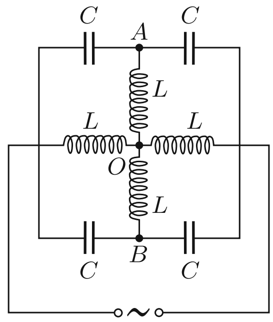
Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 16 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1 pont) 2 dolgozat.



P. 5269. *Mekkora frekvenciájú szinuszos váltóárammal szemben képvisel az ábrán látható összeállítás végtelen nagy ellenállást?*

(*5 pont*) *Példatári feladat nyomán*



Megoldás. A kapcsolás szimmetriájából következik, hogy az A, O és B pontok ekvipotenciálisak, közöttük nincs feszültség. Így a közöttük lévő két tekercsen nem folyik áram, ezek a tekercsek az áramkörből eltávolíthatók. A négy (páronként sorosan, majd párhuzamosan kapcsolt) kondenzátor eredő kapacitása C, a maradék két (sorosan kapcsolt) tekercs eredő induktivitása pedig $2L$. Tehát a megadott kapcsolás ekvivalens egy párhuzamosan kapcsolt C kapacitású kondenzátorral és $2L$ induktivitású tekerccsel.

Az áramkör akkor képvisel végtelen nagy ellenállást (akkor lesz a főág áramerőssége nulla), ha a kapacitív ellenállás megegyezik az induktív ellenállással:

$$X_C = \frac{1}{2\pi f C} = X_L = 2\pi f \cdot 2L,$$

vagyis ha a váltóáram frekvenciája:

$$f = \sqrt{\frac{1}{8\pi^2 LC}}.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

14 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 5 dolgozat.

P. 5271. *Egy pontszerű test az* ábrán *látható kétféle útvonalon juthat el az A pontból az ℓ távolságban lévő B pontig. Az a) esetben a test vízszintes egyenes pályán mozog, a b) esetben pedig egy függőleges síkban elhelyezkedő, h mélységű körív mentén. Mindkét mozgás kezdősebessége v_0. Melyik mozgás tart hosszabb ideig? (A súrlódás és a légellenállás elhanyagolható.)*

Adatok: $v_0 = 1$ m/s, $\ell = 1$ m, $h = 2{,}5$ cm.

(*6 pont*) Közli: *Berke Martin,* Budapest

Megoldás. Az *a*) esetben az AB út megtételéhez szükséges idő

$$T_a = \frac{\ell}{v_0} = 1 \text{ s}.$$

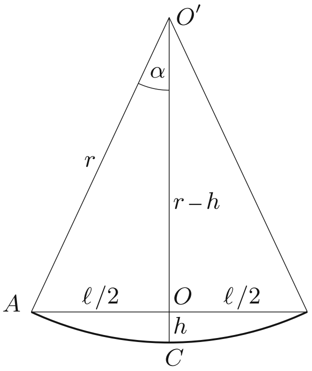
A *b*) esethez (a köríven történő mozgáshoz) tartozó idő legyen T_b. A körív hossza ugyan nagyobb, mint ℓ, de mivel a test sebessége mindvégig nagyobb v_0-nál, a mozgás idejének T_a-val való összehasonlítása nem nyilvánvaló feladat. Az a sejtésünk, hogy $T_b < T_a$. Ha tudunk olyan becslést adni, amely szerint $T_b < T$ és $T < T_a$, ebből már következik, hogy a sejtésünk helyes, vagyis $T_b < T_a$.

Legyen a körív sugara r. Az *1. ábrán* látható derékszögű háromszög oldalai: $AO = \ell/2$, $OO' = r - h$ és $AO' = r$. A Pitagorasz-tétel szerint

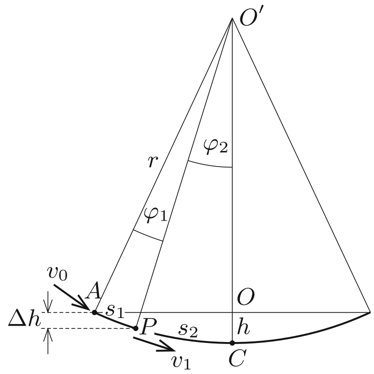
$$r^2 = \frac{\ell^2}{4} + (r - h)^2,$$

ahonnan

$$r = \frac{h}{2} + \frac{\ell^2}{8h} = 5{,}0125 \text{ m}.$$



1. ábra



2. ábra

Az ábrán látható α szöget is meghatározhatjuk:

$$\alpha = \arcsin \frac{\ell}{2r} = 0{,}0999 \text{ (radián).}$$

Megjegyzés. A szokásosnál nagyobb pontosságú számolást az indokolja, hogy egymástól csak kicsit különböző mennyiségeket fogunk összehasonlítani.

Válasszunk a körív mentén egy olyan P pontot, amely az α szöget

$$\varphi_1 = 0{,}1\,\alpha = 0{,}0100 \qquad \text{és} \qquad \varphi_2 = 0{,}9\,\alpha = 0{,}0899$$

nagyságú részre osztja (*2. ábra*). Az egyes ívdarabok hossza:

$$s_1 = r\varphi_1 = 0{,}0501 \text{ m}, \qquad \text{illetve} \qquad s_2 = r\varphi_2 = 0{,}4506 \text{ m}.$$

Megjegyzés. A teljes körív hossza: $2(s_1 + s_2) = r\alpha = 1{,}0015$ m, vagyis mindössze másfél milliméterrel nagyobb, mint az AB egyenes szakasz hossza.

A P pont és az A pont közötti magasságkülönbség

$$\Delta h = r(\cos\varphi_2 - \cos\alpha) = 0{,}0047 \text{ m},$$

emiatt a köríven mozgó pontszerű test sebessége a P pontban (a munkatétel szerint)

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g\Delta h} = 1{,}045 \ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Adjunk felső korlátot a köríven történő mozgás T_b idejére! A test sebessége az AP ív mentén (a kezdőpontot leszámítva) mindenhol nagyobb, mint v_0, tehát ezt a pályát rövidebb, mint

$$t_1 < \frac{s_1}{v_0} = 0{,}050 \text{ s}$$

idő alatt futja be a test. Hasonló megfontolással adódik, hogy a PC ív mentén a test sebessége mindenhol nagyobb, mint v_1, tehát a mozgás ideje ezen a részen

$$t_2 < \frac{s_2}{v_1} = 0{,}431 \text{ s}.$$

Látható, hogy az AB íven történő mozgás teljes időtartama:

$$T_b = 2(t_1 + t_2) < 0{,}962\ \mathrm{s} < 1{,}00\ \mathrm{s} = T_a.$$

Sejtésünk tehát helyes volt: a test a b) esetben jut el hamarabb A-ból B-be.

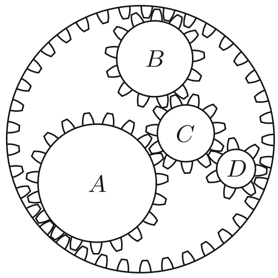
Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

40 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 4, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 1 dolgozat.

P. 5272. *Az* ábrán *látható négy belső fogaskerék körbejár, a külső pedig áll. (A fogaskerekek mozgása a honlapon megtekinthető.)*

Mekkora az A*,* B *és* C *jelű fogaskerék fordulatszáma, ha a legkisebb,* D *jelű fogaskerék másodpercenként egyszer fordul körbe?*

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház



Megoldás. Vizsgáljuk a mozgást egy olyan forgó vonatkoztatási rendszerben, amely a K-val jelölt külső, valamint az A és B kerekek középpontja által meghatározott háromszöghöz van rögzítve. (Ebben a rendszerben az összes kerék egyhelyben forog).

Csúszásmentesen érintkező, forgó kerekek kerületi sebessége megegyezik, tehát a fordulatszámuk fordítottan arányos sugaraikkal, ami viszont a kerületükkel és így a fogaik számával arányos.

Vegyük figyelembe, hogy az új viszonyítási rendszerünk forog, így ebben a D kerék fordulatszáma már nem $1\ \mathrm{s}^{-1}$, hanem egy ismeretlen érték. Jelöljük a forgó rendszerbeli fordulatszámokat a kerék kis betűvel írt jelével (vagyis a D kerék fordulatszáma d), majd számoljuk ki a többi kerék (új vonatkoztatási rendszerbeli) fordulatszámát d-vel kifejezve. A *feladat ábrájáról* leolvasható, hogy a fogak száma rendre 19, 13, 11 és 7, a külső keréké pedig 37. Ezek szerint

$$c = \frac{7}{11}d, \qquad b = \frac{7}{13}d, \qquad a = \frac{7}{19}d \quad \text{és} \quad k = \frac{7}{37}d.$$

A külső kerék $k = \frac{7}{37}d$ fordulatszámmal forog a forgó rendszerünkben, ami azt jelenti, hogy a vonatkoztatási rendszerünk (a fogaskerekek együttes rendszere) a valóságban k fordulatszámmal mozog az álló külső kerékhez képest. A többi fogaskerék valós fordulatszámához meg kell állapítanunk a forgásirányukat. Az a kerék, amelyik azonos irányba forog a vonatkoztatási rendszerünkkel, ahhoz hozzá kell adni k-t (ilyen a C kerék), a többi fordulatszámából pedig ki kell vonnunk k-t. A valós fordulatszámokat n-nel jelölve (és a kerék betűjelével indexelve) ezeket az összefüggéseket kapjuk:

$$n_D = 1\ \frac{1}{\mathrm{s}} = d - k = d - \frac{7}{37}d = \frac{30}{37}d, \quad \text{vagyis} \quad d = \frac{37}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

továbbá

$$k=\frac{7}{37}d=\frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Az A, B és C fogaskerekek tényleges fordulatszámának nagysága:

$$n_A=\frac{7}{19}d-k=\frac{259}{570}\ \frac{1}{\mathrm{s}}-\frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}}=\frac{21}{95}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

$$n_B=\frac{7}{13}d-k=\frac{259}{390}\frac{1}{s}-\frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}}=\frac{28}{65}\ \frac{1}{\mathrm{s}},$$

$$n_C=\frac{7}{11}d+k=\frac{259}{330}\frac{1}{s}+\frac{7}{30}\ \frac{1}{\mathrm{s}}=\frac{56}{55}\ \frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Megjegyzés. A C kerék forgásiránya *ellentétes* a többiével.

Kozaróczy Csaba (Miskolci Herman O. Gimn., 12. évf.)

58 dolgozat érkezett. Helyes 5 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 7, hiányos (1–3 pont) 44, hibás 2 dolgozat.

P. 5275. *Az egyik kaposvári szökőkútból* 1 *perc alatt* 1 *köbméter víz szökik fel függőlegesen* 5 m *magasra.*

a) Mekkora a villanymotor felvett teljesítménye, ha a szivattyúzás hatásfoka 75%?

b) Mekkora sebességgel áramlik ki a víz a csőből?

c) Mekkora a kilépő vízáram átmérője?

d) Mekkora a vízsugár átmérője 2,5 m *magasságban?*

A légellenállástól és a vízsugár cseppekre szakadásától tekintsünk el.

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. Ismert adatok:
a megfigyelt időtartam: $t=1$ perc $=60$ s;
a vízsugár magassága $h=5$ m;
a t idő alatt kiáramló víz mennyisége: $V=1\ \mathrm{m}^3$;
a víz sűrűsége: $\varrho=1000\ \mathrm{kg/m}^3$;
és végül a nehézségi gyorsulás: $g=9{,}81\ \mathrm{m/s}^2$.

a) A szivattyúzás hatásfoka: $\eta=0{,}75$. A megadott idő alatt végzett hasznos munka a víz emelésére fordított munka: $W_\mathrm{h}=mgh=\varrho Vgh$, így a hasznos teljesítmény:

$$P_\mathrm{h}=\frac{\varrho Vgh}{t}.$$

A hatásfok a hasznos és a felvett P_f teljesítmény hányadosa, így

$$P_\mathrm{f}=\frac{P_\mathrm{h}}{\eta}=\frac{\varrho Vgh}{t\,\eta}\approx 1{,}1\ \mathrm{kW}.$$

A villanymotor felvett teljesítménye tehát kb. 1,1 kW.

b) A munkatétel szerint egy m tömegű, v_0 kezdősebességű vízdarabon végzett $-mgh$ munka a mozgási energia megváltozásával egyezik meg:

$$W=-mgh=\Delta E_{\mathrm{m}}=-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

vagyis a kiáramló víz sebessége:

$$v_0=\sqrt{2gh}=9{,}9\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

A vízsugár tehát kb. 10 m/s sebességgel áramlik ki a szökőkút csövéből.

c) Egységnyi idő alatt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{V}{t}=\frac{1}{60}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$$

térfogatú víz áramlik ki a csőből. Ez így is felírható:

$$\frac{V}{t}=A_0\frac{\Delta s}{\Delta t}=A_0v_0,$$

ahol A_0 a cső keresztmetszete, Δs pedig a víz elmozdulása egy kicsiny Δt idő alatt.

A vízsugár keresztmetszete d_0 átmérőjű kör, így fennáll, hogy

$$\frac{V}{tv_0}=\frac{d_0^2}{4}\pi,$$

ahonnan $d_0=4{,}6$ cm. A kilépő vízáram átmérője tehát 4,6 cm.

d) A megadott magasság: $h_1=2{,}5$ m. A munkatétel szerint:

$$-mgh_1=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2,$$

ahonnan a vízsugár sebessége h_1 magasságban

$$v_1=\sqrt{v_0^2-2gh_1}=7{,}0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Az anyagmegmaradást kifejező kontinuitási egyenlet szerint

$$A_0v_0=A_1v_1,\qquad \frac{d_0^2\pi}{4}v_0=\frac{d_1^2\pi}{4}v_1,$$

ahonnan a némileg lelassuló vízsugár átmérője

$$d_1=d_0\sqrt{\frac{v_0}{v_1}}=0,055\ \mathrm{m}=5{,}5\ \mathrm{cm}.$$

Horváth Anikó (Szeged, Radnóti M. Kísérleti Gimn., 12. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 37 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 21, hiányos (1–2 pont) 14, hibás 1, nem versenyszerű 4 dolgozat.

P. 5276. *Egy* 25 cm-*es átmérőre felfújt, gömb alakú lufival beszállunk Európa legnagyobb emelkedésű drótkötélpályájának kabinjába, és a hegytetőig utazunk. A kabin nem zár légmentesen, de a belső hőmérsékletét mindvégig a beszállóhely hőmérsékletén tartják. A kabin a tengerszint feletti* 1000 m-*es magasságból indul, és majdnem* 3000 m *magasba viszi fel a turistákat a Zugspitze csúcsáig. A lufin belüli nyomás mindvégig alig nagyobb a külső légnyomásnál.*

Becsüljük meg, mekkora lesz a lufi átmérője, amikor kiszállunk a kabinból!

(*4 pont*) Közli: *Miklós Ildikó,* Tésa

Megoldás. Izotermikus folyamatról van szó, tehát érvényes, hogy $p_1V_1 = p_2V_2$, ahol p a lufiban lévő nyomást jelöli (ami jó közelítéssel a külső légkör aktuális nyomásával egyezik meg), V pedig a lufiban lévő levegő térfogata. (Az 1-es index a beszállóhelyhez, a 2-es a felső állomáshoz tartozó adatokra utal.)

Táblázati adatokból a légnyomás 1000 m magasságban $p_1 \approx 900$ hPa, 3000 m magasságban pedig $p_2 \approx 700$ hPa. Másrészt a V térfogat a (gömb alakúnak tekintett) lufi d ármérője közötti kapcsolat

$$V = \frac{4\pi}{3}\frac{d^3}{8}, \quad \text{ahonnan} \quad \frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^3.$$

A táblázati adatok (vagy a barometrikus magasságformula) felhasználásával

$$\frac{p_1}{p_2} \approx \frac{900}{700} \approx 1{,}29, \quad \text{vagyis} \quad d_2 = d_1\sqrt[3]{\frac{V_2}{V_1}} = d_1\sqrt[3]{\frac{p_1}{p_2}} \approx 27\ \text{cm}.$$

A lufi átmérője tehát mintegy 2 centiméternyit nő, mialatt a kabin az alsó állomástól a Zugspitze csúcsáig emelkedik.

Beke Zsolt (Révkomárom, Selye János Gimn., 12. Gimn., 12. évf.)

75 dolgozat érkezett. Helyes 58 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 5, nem versenyszerű 3 dolgozat.

Köszöntő

Holics László a KöMaL Fizika Rovatának 1959. szeptemberi megindulásától kezdve mind a mai napig a Fizika Szerkesztőbizottság folyamatosan aktív tagja. Eddig 468 feladata, 7 cikke és 12 OKTV beszámolója jelent meg. 2021 februárjában a 90. születésnapján azzal a meglepetéssel köszöntjük, hogy jelen számunk *mindegyik* fizika feladatát az ő kitűzésre javasolt problémái alapján állítottuk össze.

Ugyancsak idén februárban tölti be 90. életévét **Wiedemann László,** a KöMaL fizika pontversenyének ma is aktív feladatkitűzője, akinek 1960 áprilisa és 2020 októbere között 43 feladata jelent meg a Lapunkban.

Mindkettőjüknek jó egészséget és további aktív éveket kíván

a Szerkesztőbizottság