Az egyenlőség akkor, és csak akkor áll fenn, ha $\sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, ahol $0^\circ < \alpha \leqslant 120^\circ$, hiszen egy szabályos sokszög külső szögének nagysága. Ekvivalens átalakítások után:

$$\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2},$$

amelynek egyetlen megoldása az adott intervallumban: $\alpha = 45^\circ$.

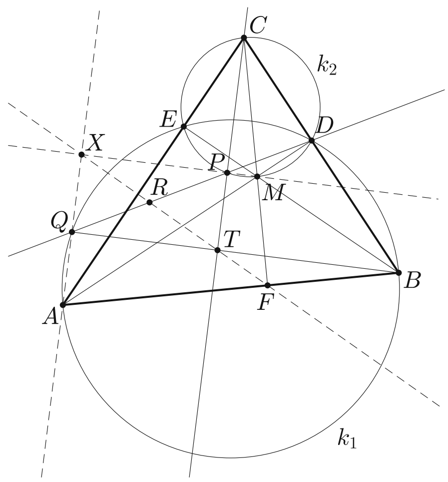
45° nagyságú külső szögei a szabályos nyolcszögnek vannak, tehát a sokszög csúcsainak száma 8.

Kozma Katalin Abigél
Győr

Matematika feladatok megoldása

B. 5005. *Az ABC hegyesszögű háromszög magasságvonalainak talppontja a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E, F, az ABC háromszög magasságpontja M. Jelölje az AB, mint átmérő fölé rajzolt kört k_1, a DEM háromszög körülírt körét k_2. Vegyük föl a k_2 körnek a D pontot nem tartalmazó EM ívén az E, M pontoktól különböző P pontot. Messe a DP egyenes a k_1 kört másodszor a Q pontban, és legyen a PQ szakasz felezőpontja R. Mutassuk meg, hogy az AQ, MP, FR egyenesek egy pontban metszik egymást.*

(*6 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)



I. megoldás. Használjuk az A, B, C csúcsoknál lévő szögek hagyományos jelölését.

Legyen AQ és MP metszéspontja X. Azt akarjuk belátni, hogy X rajta van az FR egyenesen. Az első észrevétel, hogy AB Thalesz-körén (k_1-en) rajta van D és E (mivel ADB és AEB szög derékszög). A második, hogy k_2-n rajta van C, ugyanis CM Thalész-körén is rajta van D és E (a CDM és CEM szög derékszög).

Először azt látjuk be, hogy a QXP szög derékszög.

$QPX\sphericalangle = MPD\sphericalangle = MCD\sphericalangle = FCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, az első egyenlőség a csúcsszögek miatt, a második a kerületi szögek tétele miatt van. $AQD\sphericalangle = 180^\circ - \beta$, mert $AQDB$ húrnégyszög, tehát $PQX\sphericalangle = \beta$ (kiegészítő szögek). Vagyis azt kaptuk, hogy PQX háromszög hasonló ABD-hez, mivel két-két szögük egyenlő, tehát a $QXP\sphericalangle$ derékszög.

A QXP háromszög derékszögű, a köréírt körének középpontja R (az átfogó felezőpontja), vagyis $XR = PR$, tehát

$$RXP\sphericalangle = RPX\sphericalangle = QPX\sphericalangle = 90^\circ - \beta$$

(a QPX szög nagyságát már korábban kiszámoltuk).

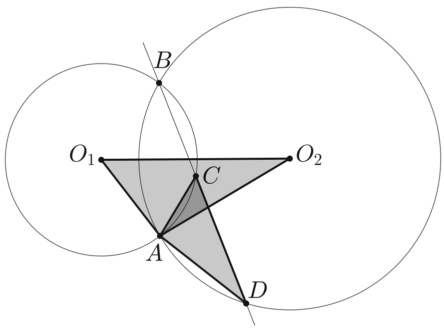
AM Thalész-körén rajta van F, mert az MFA szög 90°-os, de rajta van X is, mivel az AXM szög is derékszög. Tehát $AFMX$ húrnégyszög. Emiatt

$$FXP\sphericalangle = FXM\sphericalangle = FAM\sphericalangle = BAD\sphericalangle = 90^\circ - \beta.$$

Azt kaptuk, hogy $FXP\sphericalangle = RXP\sphericalangle$. Az F és R pontok a PX egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, mivel mindkettő a QXP irányított szög által meghatározott tartományba esik: az R azért, mert QP felezőpontja, F pedig az AB szakasz egy pontja, és A és B is a tartományban van. B pedig azért van ott, mert P az EM ív egy belső pontja, és a B akkor kerül éppen a tartomány határára, ha $P \cong E$ (akkor a PM egyenesen éppen rajta van a B pont). Tehát R és F az XP egyenes ugyanazon oldalán vannak, és $FXP\sphericalangle = RXP\sphericalangle$, azaz F, R és X egy egyenesen van. Tehát az AQ, FR, MP egyeneseknek van egy közös pontja, az X, és ezt kellett bizonyítani.

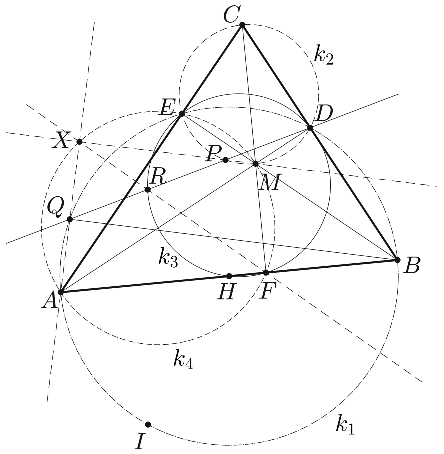
Dobák Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. *Segédállítás:* Ha egy O_1 és egy O_2 középpontú kör az A és B pontokban metszi egymást, és adott egy-egy C és D pontjuk úgy, hogy az ACD háromszög megkapható az AO_1O_2 háromszög A középpontú forgatva nyújtásával, akkor a CD egyenes átmegy a B ponton.



Valóban, a forgatva nyújtás szögtartó transzformáció, így $CDA\sphericalangle = O_1O_2A\sphericalangle$. Tudjuk, hogy $O_1O_2A\sphericalangle = BO_2A\sphericalangle/2$ a szimmetria miatt és $BO_2A\sphericalangle = 2 \cdot BDA\sphericalangle$ a kerületi és középponti szögek tétele alapján, tehát $CDA\sphericalangle = BDA\sphericalangle$, így B, C és D kollineárisak.

A feladat megoldására térve legyen f az az E középpontú forgatva nyújtás, ami a D pontot P-be viszi. Legyen $X = f(A)$, AB felezőpontja H, D pont H-ra vett tükörképe pedig I. A forgatva nyújtás hasonlósági transzformáció, így mivel a P pont mértani helye egy kör, azért $f(A)$, $f(H)$ és $f(I)$ mértani helye is egy-egy kör lesz. A Thalész-tétel megfordításából tudjuk, hogy k_1 középpontja H. Legyen k_3 az ABC háromszög Feuerbach-köre (a H, E, D pontokon átmenő kör) és k_4 az $AEMF$ húrnégyszög köréírt köre.



Ekkor a k_1, k_2, k_3 és k_4 kör is átmegy az E ponton. Tudjuk, hogy a k_2 kört ugyanaz az E középpontú forgatva nyújtás viszi k_3-ba, amelyik D-t H-ba, a k_1 körbe ugyanaz, mint amelyik D-t I-be, k_4-be pedig ugyanaz, mint amelyik D-t A-ba. Tudjuk tehát, hogy mivel a P pont a k_2 körön van, az eddigieket felhasználva $f(H)$ a k_3-on, $f(I)$ a k_1 körön, végül $f(A)$ a k_4 körön található.

A segédállítást felhasználva tudjuk, hogy az $f(A)f(I)$ egyenes átmegy az A ponton, mivel a k_1-en az I, a k_4-en az A pontot választva az elforgatott egyenes átmegy a k_1 és k_4 körök E-től különböző metszéspontján, az A ponton. Hasonló módon kapjuk, hogy az $f(H)f(A)$ egyenes átmegy az F ponton (a k_3 és k_4 körök E-től különböző metszéspontja F), valamint az $f(D)f(A)$ egyenes átmegy M-en (mivel a k_2 és k_4 körök E-től különböző metszéspontja M). Ezen kívül ismert, hogy az ID szakasz felezőpontja H, így az f forgatva nyújtásról tudjuk, hogy az $f(I)f(D)$ szakasz felezőpontja $f(H)$.

Az eddigiekből egyértelműen következik, hogy $f(I)=Q$, hiszen PD a Q pontban metszi k_1-et, $f(I)$ pedig rajta van a k_1 körön, és $f(I)P$ átmegy D-n; hasonlóan levezethető, hogy $f(H)=R$.

Azt is bizonyítottuk, hogy $f(A)P$ átmegy az M ponton, $f(A)f(I)$ átmegy A-n, $f(A)f(H)$ pedig az F ponton, vagyis az AQ, FR, PM egyenesek mind átmennek $f(A)$-n. Ezzel az állítást igazoltuk: mindhárom egyenes átmegy azon a ponton, amelyiket A-ból kapjuk ugyanazzal az E középpontú forgatva nyújtással, amelyik D-t P-be viszi.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

III. megoldás. Használjuk az első megoldás ábrájának jelöléseit. Legyen ismét az MP és AQ egyenesek metszéspontja X, továbbá legyen a CP és BQ egyenesek metszéspontja T.

Az első megoldásnál leírtak szerint az XQT, XPT, QXP szögek mind derékszögek. A $QTPX$ négyszög három szöge derékszög, így a negyedik is az, a négyszög téglalap.

A téglalap átlói felezik egymást, az X, R és T pontok egy egyenesen fekszenek.

Most pedig alkalmazzuk a Desargues-tételt[1]* a QTP és AFM háromszögekre. A két háromszög egyenesre nézve perspektív, mivel a megfelelő oldalak metszéspontjai mind a BC oldalegyenesen helyezkednek el:

$$QP\cap AM=\{D\},\quad QT\cap AF=\{B\},\quad TP\cap FM=\{C\}.$$

*Ld. pl. Kós Géza: Térbe kilépő bizonyítások I., KöMaL 69. évf. 7. szám 395–396. oldal.

A tétel szerint ekkor a két háromszög pontra nézve is perspektív: az MP, AQ és TF egyenesek egy pontban metszik egymást. Az MP és AQ metszéspontja az X pont, így ez a közös metszéspont csak az X pont lehet.

Tehát az F, T és X pontok egy egyenesen helyezkednek el. Korábban beláttuk, hogy XT felezőpontja R, vagyis az F, T, R és X pontok egy egyenesen vannak, az állítást igazoltuk.

Györffy Ágoston (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az első és második megoldásból is következik, hogy R az ABC háromszög Feuerbach-körének pontja.

Összesen 28 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 26 versenyző, 3 pontos 1, 0 pontos szintén 1 tanuló dolgozata.

B. 5024. *Legyen p egy páratlan prímszám. A $\binom{p-2}{0}, \binom{p-2}{1}, \ldots, \binom{p-2}{p-2}$ számok mindegyikét maradékosan elosztjuk p-vel. Hányféle különböző maradékot kapunk?*

(*4 pont*) Javasolta: *Gyenes Zoltán* és *Hujter Bálint* (Budapest)

I. megoldás. A $\binom{p-2}{0}, \binom{p-2}{1}, \ldots, \binom{p-2}{p-2}$ számsornak $p-1$ darab eleme van (ami a feladat szerint páros szám). Mivel $\binom{p-2}{i} = \binom{p-2}{p-2-i}$, így bármilyen számmal osztva is ugyanazt a maradékot adják, speciálisan p-vel osztva is. Párba lehet rendezni a számsort úgy, hogy egy párban a maradékok ugyanazok (i párja $p-2-i$, és ezek nem lesznek ugyanazok a binomiális együtthatók, mert ha $i = p-2-i$, akkor $2i = p-2$ lenne, de a bal oldal páros, míg a jobb oldal páratlan). Látjuk, tehát, hogy legfeljebb $\frac{p-1}{2}$-féle maradékot kaphatunk csak. Azt állítjuk, hogy ennyit kapunk is, azaz a fenti párokon kívül nem lesz két olyan együttható, amely ugyanazt a maradékot adja p-vel osztva.

A maradékok a fentiek szerint szimmetrikusak lesznek (azaz az első $\frac{p-1}{2}$ maradék ugyanaz, mint a második $\frac{p-1}{2}$), így elég ezt az állítást belátni: Ha $0 \leqslant i < j < \frac{p-2}{2}$, akkor $\binom{p-2}{i} - \binom{p-2}{j}$ nem osztható p-vel.

$$\binom{p-2}{i} - \binom{p-2}{j} = \frac{(p-2)!}{i! \cdot (p-2-i)!} - \frac{(p-2)!}{j! \cdot (p-2-j)!}.$$

Szorozzuk meg a különbséget $j! \cdot (p-2-i)!$-sal. Mivel ebben a szorzatban minden tényező kisebb, mint p, és a p prím, így ez nem változtat azon, hogy a különbség osztható-e p-vel vagy sem; kapjuk:

$$(p-2)! \cdot \big[(i+1) \cdot \ldots \cdot j - (p-2-j+1) \cdot \ldots \cdot (p-2-i)\big].$$

Azt tudjuk, hogy $z \equiv (-1) \cdot (p-z) \pmod{p}$. Azaz a különbség p-vel vett maradéka nem változik, ha $(p-2-j+1)$ helyett $(-1)(2+j-1) = -(j+1)$-et írunk stb.

Ezt elvégezve és átrendezve kapjuk a fenti különbségre azt, hogy annak maradéka p-vel osztva ugyanannyi, mint

$$(p-2)! \cdot \big[(i+1) \cdot \ldots \cdot j - (-1)^{j-i} \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot (j+1)\big]$$

maradéka. Ezt viszont kiemeléssel átírhatjuk erre a formára:

$$(p-2)! \cdot (i+2) \cdot \ldots \cdot j \cdot \big[(i+1) - (-1)^{j-i} \cdot (j+1)\big].$$

Itt a szögletes zárójel előtti tényezők mind kisebbek, mint p – megjegyezve, hogy $j = i+1$ esetén az $(i+2) \cdot \ldots \cdot j$ rész-szorzat üres, ezért értéke 1 –, így ez a rész biztosan nem osztható p-vel; az oszthatóságot az dönti el, hogy a szögletes zárójelben lévő rész osztható-e p-vel vagy sem.

A szögletes zárójelben lévő rész viszont csak akkor lehetne osztható p-vel, ha $(i+1) = (j+1)$ (ami nyilván nem fordulhat elő, hiszen $i < j$), vagy ha $(j+1) + (i+1) = p$ és $j - i$ páratlan (de ez sem fordulhat elő, mert akkor $i + j = p - 2$ lenne, viszont ez nem teljesülhet az $i < j < \frac{p-2}{2}$ feltétel miatt).

Azaz a kapott szám biztosan nem osztható p-vel, így az eredeti különbség sem osztható. Ez azt jelenti, hogy igazoltuk az állításunkat, mely szerint ha $0 \leqslant i < j < \frac{p-2}{2}$, akkor $\binom{p-2}{i} - \binom{p-2}{j}$ nem osztható p-vel.

A feladat kérdésére a válasz: $\frac{p-1}{2}$.

Sebestyén Pál Botond (Budapest, Baár-Madas Református Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Indukcióval azt fogjuk belátni, hogy $k \leqslant p-2$ esetén $\binom{p-2}{k}$ maradéka p-vel osztva $(-1)^k(k+1)$.

Elsőként vizsgáljuk meg a $k = 0$ és $k = 1$ eseteket:

$\binom{p-2}{0} = 1$, tehát $(-1)^0 \cdot 1 = 1$ maradékot ad p-vel osztva, $\binom{p-2}{1} = p-2$, tehát $(-1)^1 \cdot (1+1) = -2$ maradékot ad.

Az indukciós lépésben tegyük fel, hogy $\binom{p-2}{k}$ maradéka p-vel osztva $(-1)^k(k+1)$. Ekkor egyrészt a binomiális együttható kifejtése alapján

$$\binom{p-2}{k+1} = \binom{p-2}{k} \cdot \frac{p-k-2}{k+1},$$

másrészt tudjuk, hogy $\binom{p-2}{k} - (-1)^k(k+1)$ osztható p-vel. Szorozzuk meg ezt a különbséget egy p-nél kisebb számmal, $(p-k-2)$-vel és osszuk el egy szintén p-nél kisebb számmal, $(k+1)$-gyel. A kapott szám biztosan egész lesz, mert

$$\left[\binom{p-2}{k} - (-1)^k(k+1)\right]\frac{p-k-2}{k+1} =$$

$$= \binom{p-2}{k+1} - (-1)^k(p-k-2) \equiv \binom{p-2}{k+1} - (-1)^{k+1}(k+2) \pmod{p},$$

és mivel p-nél kisebb számmal osztottunk és szoroztunk a kapott egész szám továbbra is osztható lesz p-vel, azaz $\binom{p-2}{k+1}$-nek a p-vel való osztási maradéka $(-1)^{k+1}(k+2)$.

A belátott összefüggést (a binomiális együtthatók szimmetriája miatt) elegendő a $0 \leqslant k < \frac{p-2}{2}$ esetekre alkalmazni. Ekkor viszont a kapott maradékok mind különbözőek, hiszen $0 \leqslant k < t < \frac{p-2}{2}$ esetén

$$1 \leqslant \left|(-1)^k(k+1) - (-1)^t(t+1)\right| < 2 \cdot \frac{p-2}{2} + 2 = p.$$

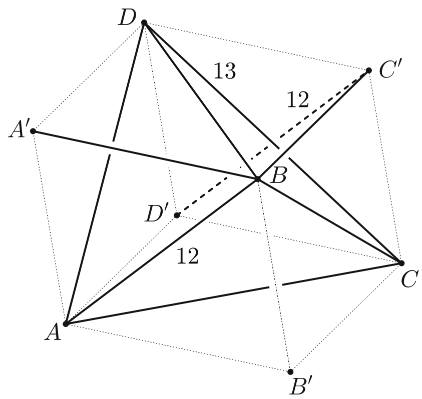
Kovács Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Összesen 51 dolgozat érkezett. 4 pontos 38, 3 pontos 8 dolgozat. 2 pontot és 1 pontot 2–2 tanuló, 0 pontot 1 tanuló kapott.

B. 5089. *Egy tetraéder két kitérő éle egymásra merőleges, hosszuk* 12 *és* 13*, egyeneseik távolsága* 14 *egység. Határozzuk meg a tetraéder térfogatát.*

(*3 pont*)

Megoldás. Minden tetraéder köré pontosan egy paralelepipedon írható oly módon, hogy a tetraéder mindegyik éléhez odatoljuk a vele szemköztes élt, és az ilyen – most már közös ponton átmenő – élpárok által meghatározott síkok lesznek a paralelepipedon lapjainak síkjai. Ennek a paralelepipedonnak a kitérő lapátlói a tetraéder élei. Ezt a paralelepipedont a tetraéder bennfoglaló paralelepipedonjának nevezzük. Könnyen igazolható, ismert tény, hogy a tetraéder térfogata egyharmada a bennfoglaló paralelepipedon térfogatának.



A 12 cm-es és 13 cm-es élek a tetraéder kitérő élei, így a bennfoglaló paralelepipedon egyik paralelogramma lapjának átlói az egymásra merőleges $C'D'$ és CD élek. A paralelepipedon e lapjának területe az átlók alapján $\frac{12\cdot 13}{2} = 78$ területegység. A paralelepipedon ehhez a laphoz tartozó magassága éppen a két kitérő él távolsága, tehát a megadott 14 egység. A paralelepipedon térfogata így $V = 78 \cdot 14$ térfogategység. Az eddigiek alapján a tetraéder térfogata ennek harmadrésze, vagyis $\frac{78\cdot 14}{3} = 364$ térfogategység.

Wiener Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 8. évf.) dolgozata alapján

Összesen 67 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 14, 2 pontot 32 tanuló. 1 pontos 17, 0 pontos 4 versenyző dolgozata.

B. 5116. *Legyen* $a, b, c > 0$ *és* $x, y, z \geqslant 0$. *Igazoljuk, hogy ha* $x + aby \leqslant a(y+z)$, $y + bcz \leqslant b(z+x)$, *és* $z + cax \leqslant c(x+y)$, *akkor* $x = y = z = 0$ *vagy* $a = b = c = 1$.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Kanada)

Megoldás. Az a, b és c pozitív számok, így az egyenlőtlenségekben oszthatunk velük:

$$\frac{x}{a} + by \leqslant y + z,$$

$$\frac{y}{b} + cz \leqslant z + x,$$

$$\frac{z}{c} + ax \leqslant x + y.$$

Ezeket összeadva:

$$\frac{x}{a} + by + \frac{y}{b} + cz + \frac{z}{c} + ax \leqslant 2x + 2y + 2z,$$

$$x\left(\frac{1}{a} + a\right) + y\left(\frac{1}{b} + b\right) + z\left(\frac{1}{c} + c\right) \leqslant 2(x + y + z).$$

Vizsgáljuk a bal oldal egy-egy tagját; például

$$(1) \qquad x\left(\frac{1}{a} + a\right) \geqslant 2x,$$

hiszen a pozitív a-val szorozva, majd rendezve:

$$x + xa^2 \geqslant 2xa,$$

$$x(a^2 - 2a + 1) \geqslant 0,$$

$$x(a-1)^2 \geqslant 0.$$

Ez a feladat feltételei alapján teljesül ($x \geqslant 0$). Egyenlőség akkor és csak akkor áll fönn, ha $x = 0$ vagy $a = 1$. Mivel ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az (1) egyenlőtlenség is fennáll, és $x = 0$, illetve $a = 1$ esetén teljesül (1)-ben is az egyenlőség.

Logikai szimmetria miatt a bal oldal minden tagját hasonlóan becsülve:

$$x\left(\frac{1}{a} + a\right) + y\left(\frac{1}{b} + b\right) + z\left(\frac{1}{c} + c\right) \geqslant 2(x + y + z).$$

Mivel korábban az ezzel ellenkező irányú egyenlőtlenséget igazoltuk, egyenlőség áll fenn, aminek szükséges és elégséges feltétele: $x = 0$ vagy $a = 1$; és $y = 0$ vagy $b = 1$; és $z = 0$ vagy $c = 1$ teljesülése. Vegyük sorra ennek lehetséges eseteit – figyelembe véve, hogy az x, y, z ismeretlenek és a, b, c ismeretlenek szimmetrikus szerepet töltenek be.

1. eset: $x=y=z=0$; teljesül a feladat állítása.

2. eset: $x=y=0$ és $c=1$ (felhasználva a szimmetriát, ugyanez lesz $x=z=0$ és $b=1$; valamint az $y=z=0$ és $a=1$ esetén is). Ekkor a feladat feltételei alapján: $z+cax \leqslant c(x+y)$, azaz $z \leqslant 0$, így z is 0; teljesül az állítás.

3. eset: $x=0$ és $b=c=1$ (ugyanez a gondolatmenet érvényes a szimmetria miatt az $y=0$ és $a=c=1$; valamint a $z=0$ és $a=b=1$ esetben is). Ekkor $y+bcz \leqslant b(z+x)$ miatt: $y+z \leqslant z$, azaz $y \leqslant 0$, amiből $y=0$. Az $x=y=0$ és $c=1$ esetről pedig a 2. esetnél már láttuk, hogy teljesíti az állítást.

4. eset: $a=b=c=1$; teljesíti a feladat állítását.

Ezzel az összes lehetőséget végignéztük, tehát a feladat állítását beláttuk.

Seres-Szabó Márton (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

57 dolgozat érkezett. 6 pontos 36, 4 pontos 4, 3 pontos 2, 2 pontos 1, 1 pontos 6, 0 pontos 5 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

B. 5118. *Lehet-e x, $\dfrac{14x+5}{9}$ és $\dfrac{17x-5}{12}$ egyszerre egész szám?*

(*3 pont*)

I. megoldás. A feladat alapfeltétele: $x \in \mathbb{Z}$. Mivel $3 \mid 9$ és $3 \mid 12$, ezért $3 \mid 14x+5$ és $3 \mid 17x-5$-nek is teljesülnie kell. Ha $3 \mid a$ és $3 \mid b$, akkor $3 \mid a+b$ is igaz. Tehát ekkor $3 \mid 14x+5+17x-5$. Összevonva: $3 \mid 31x$.

Mivel $(3;31)=1$, ezért $3 \mid x$. Ekkor viszont $3 \mid 14x$, így $14x+5$ 3-as maradéka 2 lesz. Hasonlóan $3 \mid 17x$, így $17x-5$ 3-as maradéka -2, azaz 1 lesz. Ekkor se $14x+5$, se $17x-5$ nem lesz osztható 3-mal, tehát $\frac{14x+5}{9}$ és $\frac{17x-5}{12}$ nem lehetnek egész számok.

Így ellentmondásra jutottunk, tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

II. megoldás. Tételezzük fel, hogy mind a három szám egész. Ekkor a két törtet a következő módon lehet alakítani:

$$\frac{14x+5}{9}=\frac{9x+5x+5}{9}=x+\frac{5(x+1)}{9},$$

$$\frac{17x-5}{12}=\frac{12x+5x-5}{12}=x+\frac{5(x-1)}{12}.$$

Mivel feltettük, hogy mind a három szám egész, így $\frac{5(x+1)}{9}$ és $\frac{5(x-1)}{12}$ is egész, tehát $9 \mid 5(x+1)$ és $12 \mid 5(x-1)$. $(5;9)=1$ és $(5;12)=1$ miatt $9 \mid x+1$ és $12 \mid x-1$.

Mivel 9 és 12 a 3 többszörösei, ezért $3 \mid x+1$-nek és $3 \mid x-1$-nek is igaznak kell lennie. Az első esetben az x szám 3-as maradéka 2, míg a második esetben az x szám 3-as maradéka 1. Ezzel viszont ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Zömbik Barnabás (Budapest V. Ker. Eötvös József Gimn., 9. évf.)
megoldása alapján

III. megoldás. Tegyük fel, hogy x, $\frac{14x+5}{9}$ és $\frac{17x-5}{12}\in\mathbb{Z}$. Vizsgáljuk a maradékosztályokat kongruenciával.

A feltételek alapján:

$$14x+5\equiv 0 \quad (9).$$

Így

$$\begin{aligned} 14x+5&\equiv 0 \quad (3),\\ 17x+5&\equiv 0 \quad (3),\\ 17x-4&\equiv 0 \quad (3). \end{aligned}$$

Mivel $\frac{17x-5}{12}\in\mathbb{Z}$ is igaz kell, hogy legyen, így:

$$\begin{aligned} 17x-5&\equiv 0 \quad (12),\\ 17x-5&\equiv 0 \quad (3). \end{aligned}$$

$17x-5$ és $17x-4$ nem lehet egyszerre 3 többszöröse, így ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Kovács Gábor Benedek (Kiskunhalasi Bibó István Gimn., 12. évf.) megoldása alapján

IV. megoldás. A feladat alapfeltétele: $x\in\mathbb{Z}$. Tegyük fel, hogy $\frac{14x+5}{9}$ és $\frac{17x-5}{12}\in\mathbb{Z}$ is igaz. Legyen $\frac{14x+5}{9}=n$ és $\frac{17x-5}{12}=m$ $(n,m\in\mathbb{Z})$.

Fejezzük ki mindkét egyenletből x-et:

$$x=\frac{9n-5}{14}=\frac{12m+5}{17}.$$

Rendezzük n-re az egyenletet:

$$153n-85=168m+70,$$

$$n=\frac{168m+155}{153}.$$

Mivel $n\in\mathbb{Z}$, így $\frac{168m+155}{153}\in\mathbb{Z}$. Alakítsuk át a törtet:

$$\frac{168m+155}{153}=m+1+\frac{15m+2}{153}.$$

Mivel $m\in\mathbb{Z}$, így $\frac{15m+2}{153}\in\mathbb{Z}$. $3\mid 153$, ezért $3\mid 15m+2$ is igaz kell, hogy legyen. Mivel $3\mid 15$, így $3\mid 15m$. Viszont $3\nmid 2$, így ellentmondásra jutottunk. Tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Ungár Éva (Budapest, Lauder Javne Gimn., 11. évf.) megoldása alapján

V. megoldás. A feladat alapfeltétele: $x \in \mathbb{Z}$. Mivel $3 \mid 9$ és $3 \mid 12$, így próbálkozzunk a 3-as maradékok vizsgálatával. Az x szám 3-as maradéka 0, 1 vagy 2 lehet. Vizsgáljuk meg az egyes eseteket.

1. eset: $x = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor:

$$\frac{14x+5}{9} = \frac{14 \cdot 3k + 3 + 2}{9} = \frac{3 \cdot (14k+1) + 2}{9}$$

és

$$\frac{17x-5}{12} = \frac{17 \cdot 3k - 6 + 1}{12} = \frac{3 \cdot (17k-2) + 1}{12}.$$

Az első tört számlálójának 3-as maradéka 2, a második tört számlálójának pedig 1, így egyik tört sem lesz egész.

2. eset: $x = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor:

$$\frac{14x+5}{9} = \frac{14 \cdot (3k+1) + 5}{9} = \frac{14 \cdot 3k + 14 + 5}{9} = \frac{3 \cdot (14k+6) + 1}{9}$$

és

$$\frac{17x-5}{12} = \frac{17 \cdot (3k+1) - 5}{12} = \frac{17 \cdot 3k + 17 - 5}{12} = \frac{3 \cdot (17k+4)}{12}.$$

Ebben az esetben a második tört számlálója osztható lesz 3-mal, ugyanakkor az első törté 1-et ad maradékul 3-mal osztva, tehát így sem lehet mindegyik tört egész.

3. eset: $x = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Ekkor:

$$\frac{14x+5}{9} = \frac{14 \cdot (3k+2) + 5}{9} = \frac{14 \cdot 3k + 28 + 5}{9} = \frac{3 \cdot (14k+11)}{9}$$

és

$$\frac{17x-5}{12} = \frac{17 \cdot (3k+2) - 5}{12} = \frac{17 \cdot 3k + 34 - 5}{12} = \frac{3 \cdot (17k+9) + 2}{12}.$$

Ebben az esetben az első tört számlálója osztható 3-mal, a második tört számlálója azonban 2-t ad maradékul 3-mal osztva. Tehát így sem lehet mindkét tört egész.

Az összes esetet megvizsgálva ellentmondásra jutottunk, tehát a három szám nem lehet egyszerre egész.

Hajdú Bálint (Szekszárdi Garay János Gimn., 12. évf.)
megoldása alapján

VI. megoldás. Tegyük fel, hogy mindhárom szám egész. Legyen ekkor

$$\frac{14x+5}{9} = n \quad \text{és} \quad \frac{17x-5}{12} = m.$$

Vizsgáljuk meg az $s = 3n + 8m - 16x$ számot. Mivel $x, n, m \in \mathbb{Z}$, így $s \in \mathbb{Z}$ is igaz kell, hogy legyen.

$$s = 3n + 8m - 16x = 3 \cdot \frac{14x+5}{9} + 8 \cdot \frac{17x-5}{12} - 16x =$$

$$= \frac{14x+5}{3} + \frac{2 \cdot (17x-5)}{3} - 16x = \frac{14x + 5 + 34x - 10 - 48x}{3} = -\frac{5}{3}.$$