b) A $K(1;3)$ középpontú, 2 egység sugarú kör belsejében melyek azok a pontok, amelyeknek a koordinátái a következő egyenletrendszer gyökei?

$$2^x + 2^{y-\frac{1}{2}} = 3,$$
$$16x^2 - 16xy + 4y^2 = 9.$$
(*8 pont*)

c) Mekkora szöget zár be egymással az a két vektor, amelyek közös kezdőpontja a $K(1;3)$ pont, és az egyik az origóba, a másik pedig a $P(10;0)$ pontba mutat? (*2 pont*)

Mihályi Gyula
Székesfehérvár

Megoldásvázlatok a 2021/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Az f függvény olyan, hogy minden* $x \in \mathbb{R}^+$*-re* $f(x) = \sqrt{2+\sqrt{\log_2^2 x}}$. *Hol veszi fel a függvény a 2 értéket?* (*6 pont*)

b) *Adott egy g függvény úgy, hogy minden* $x \in D_g$*-re* $g(x+1) = \frac{2g(x)+1}{2}$ *és* $g(2021) = 2021$. *Mennyi* $g(2020)$*?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az $f(x) = 2$ feltételből felírhatjuk a $2 = \sqrt{2+\sqrt{\log_2^2 x}}$ egyenletet, amelynek mindkét oldala pozitív, így négyzetre emelhetjük, majd rendezzük.

$$2 = \sqrt{\log_2^2 x} = |\log_2 x|; \quad \log_2 x = \pm 2; \quad x_1 = 4,\ x_2 = \frac{1}{4}.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

b) A $g(x+1) = \frac{2g(x)+1}{2}$ feltételt $x = 2020$-ra felírva, valamint a $g(2021) = 2021$ alapján

$$\frac{2g(2020)+1}{2} = 2021, \quad g(2020) = \frac{4041}{2} = 2020{,}5.$$

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *a*) *Huba a bolhapiacon szeretné eladni az okostelefonját. Tapasztalatból tudja, hogy az ár* $\frac{1}{5}$ *részét lealkudják a vásárlók, ezért a megállapított érték* $\frac{1}{4}$ *részével többet kér, így az alku után éppen annyit kap, amennyit szeretne. Ezúttal azonban a telefon értékének 90%-ával tért haza. Hányadrészét kapta meg Huba a telefon piacon kihirdetett árának?* (*5 pont*)

b) *Vacsora után Huba* $n = 1$*-től 100-ig sorban felírta az n után következő pozitív egész szám négyzetének és n négyzetének a különbségét. Testvére, Luca* *meglátta a számsort és elölről kezdve bekarikázott* 24 *prímszámot. Meglepve látta, hogy az utolsó bekarikázott szám a sorban éppen annyiadik helyen áll, ahány gyertya volt aznap édesanyja születésnapi tortáján. Hány éves Huba anyukája?*

(*8 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az okostelefon ára x. A kihirdetett ár $\frac{5}{4} \cdot x$, a kapott pénz $0{,}9 \cdot x$. Az arányuk:

$$\frac{0{,}9x}{\frac{5}{4}x} = \frac{18}{25}.$$

Huba a kihirdetett ár $\frac{18}{25}$ részét kapta meg.

b) Az n után következő pozitív egész szám négyzetének és n négyzetének a különbsége: $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, tehát Huba az 1-nél nagyobb páratlan számokat írta fel egymás után, növekvő sorrendben. A huszonnegyedik pozitív, páratlan prímszám a 97, így $2n+1 = 97$, $n = 48$.

Huba édesanyja 48 éves.

3. *a*) *Mennyi az alábbi táblázatban szereplő számok összege?* (*8 pont*)

1	2	3	...	n
2	3	4	...	$n+1$
3	4	5	...	$n+2$
...	...	...	...	...
n	$n+1$	$n+2$	...	$2n-1$

b) *Hétfőn Gabi vett néhány részvényt, másnap* 10 *százalékot veszítettek értékükből, ám szerdán nőtt az értékük* 10 *százalékkal. Ez így folytatódott azon a héten és még a következő héten is. Hogyan változott Gabi részvényeinek értéke a második hét utolsó napjára?* (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A táblázat első sorában egy $d = 1$ differenciájú számtani sorozat első n tagja szerepel, az első tag 1, így a számok összege: $S_{n_1} = \frac{n(n+1)}{2}$. Minden szám 1-gyel nagyobb a felette lévő számnál, és egy sorban n darab szám van, ezért a sorok közötti differencia n.

A sorokban lévő számok összegei is számtani sorozatot alkotnak, így az n darab sor, azaz a táblázatban szereplő számok összege:

$$S_n = \frac{2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n-1) \cdot n}{2} \cdot n = n^3.$$

b) A részvények eredeti árát x-szel jelölve, másnap az értékük $x \cdot 0{,}9$ lesz, harmadnap $x \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}1 = x \cdot 0{,}99$. Ez kétnaponta ismétlődik, így 12 nap alatt hatszor következik be. Összesen 13 nap telik el, így az érték a második vasárnapon:

$$x \cdot 0{,}99^6 \cdot 0{,}9 = 0{,}8473x.$$

A részvények értéke 84,73 százaléka az eredeti értéknek, tehát 15,27 százalékkal csökkent.

4. *Adott az $A(2020;2021)$, $B(2027;2025)$, $C(2022;2027)$ és a $D(2026;2022)$ pont a Descartes-féle koordinátarendszerben. Legyen az E pont az AB és a CD szakasz metszéspontja.*

a) Határozzuk meg az AE és az EB szakaszhosszak arányát. *(7 pont)*

b) Számítsuk ki a négy adott pont által meghatározott négyszög kerületét és területét. *(8 pont)*

Megoldás. *a) 1. megoldás.* $\overrightarrow{AC}=(2;6)$ és $\overrightarrow{DB}=(1;3)$, így $\overrightarrow{AC}=2\cdot\overrightarrow{DB}$. Az $\overrightarrow{AC}$ párhuzamos a $\overrightarrow{DB}$ vektorral, és $|\overrightarrow{AC}|=2\cdot|\overrightarrow{DB}|$. A párhuzamos szelőszakaszok tétele alapján $\frac{AC}{DB}=\frac{AE}{EB}=2$.

Az AE és az EB szakaszhosszak aránya $2:1$.

2. megoldás.

$$AB: 4x-7y=-6067,$$
$$CD: 5x+4y=18\,218.$$

Az egyenletrendszer megoldása a két egyenes metszéspontja: $E\left(\frac{6074}{3};\frac{6071}{3}\right)$. A kérdéses arány:

$$AE:EB=\left(\frac{6074}{3}-2020\right):\left(2027-\frac{6074}{3}\right)=\frac{14}{3}:\frac{7}{3}=2:1.$$

b) Az $ADBC$ négyszög kerülete:

$$K=AD+DB+BC+CA=$$
$$=\sqrt{6^2+1^2}+\sqrt{1^2+3^2}+\sqrt{(-5)^2+2^2}+\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=$$
$$=\sqrt{37}+\sqrt{10}+\sqrt{29}+\sqrt{40}\approx 20{,}95 \text{ egység.}$$

Az AB szakasz hossza $\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$. Ebből és a fent kapott szakaszhosszakból

$$\cos ACB\sphericalangle=\frac{2}{\sqrt{40\cdot 29}} \quad \text{és} \quad \cos ADB\sphericalangle=-\frac{9}{\sqrt{37\cdot 10}},$$

tehát

$$\sin ACB\sphericalangle=\sqrt{\frac{1156}{40\cdot 29}} \quad \text{és} \quad \sin ADB\sphericalangle=\sqrt{\frac{289}{37\cdot 10}}.$$

Az $ADBC$ négyszög területe:

$$T_{ADBC}=T_{ABC_\triangle}+T_{ABD_\triangle}=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin(ACB\sphericalangle)}{2}+\frac{AD\cdot DB\cdot\sin(ADB\sphericalangle)}{2}=$$
$$=17+8{,}5=25{,}5 \text{ területegység.}$$

II. rész

5. *a) Az A halmaz az* $ax^2-bx+c=0$ *egyenlet* $\big(a,b,c\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *és* $b^2-4ac\geqslant 0\big)$ *összes valós gyökének reciprokát tartalmazza. Fejezzük ki az A halmaz elemeinek összegét az a, b, c paraméterek segítségével.* (*6 pont*)

b) Öten beszélgetnek a pozitív egész számokat tartalmazó B halmazról. Tudják, hogy B-ben van legalább egy olyan elem, ami nagyobb 1*-nél és ha a B halmaz tartalmaz egy n számot, akkor az összes n-nél nagyobb számot is tartalmazza, kivéve esetleg az n néhány többszörösét. A következő állítások hangzanak el a beszélgetés során:*

Andi: „B számossága véges.”

Bulcsú: „Végtelen sok olyan pozitív egész szám van, ami nincs benne B-ben, és végtelen sok olyan, ami benne van.”

Cecília: „Szerintem az összes pozitív prímszám benne van a B halmazban.”

Dani: „$B=\mathbb{Z}^+$*.”*

Emőke: „Létezik egy olyan m pozitív egész szám, hogy B tartalmazza az összes m-nél nagyobb egész számot.”

Ki(k)nek van biztosan igaza? Indokoljuk válaszunkat. (*6 pont*)

c) Később az intervallumok is szóba kerülnek. Adott két valós szám: x és y, amelyekre igaz, hogy $0<x<y<1$. *Melyik intervallumban van* $x\sqrt{y}$*?*

Andi: „$]0;x[$*.”*
Bulcsú: „$]x;y[$*.”*
Cecília: „$]x;1[$*.”*
Dani: „$]y;1[$*.”*
Emőke: „$]1;\infty[$*.”*

Ki(k)nek van igaza és miért? (*4 pont*)

Megoldás. *a) 1. eset.* Ha $b^2-4ac=0$, akkor A-nak egy eleme van, a $\frac{b}{2a}$ reciproka, ami $\frac{2a}{b}$. A kérdéses összeg értéke $\frac{2a}{b}$.

2. eset. Ha $b^2-4ac>0$, akkor A-nak két eleme van: $\frac{1}{x_1}$ és $\frac{1}{x_2}$.

$$S=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1\cdot x_2}.$$

A Viéte-formulákat alkalmazva a szóban forgó összeg

$$S=\frac{-\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c}{a}}=\frac{b}{c}.$$

b) Egy lehetséges B halmaz például a pozitív egész számok halmaza, emiatt Andi és Bulcsú állítása hamis. Cecíliának, illetve Daninak sincs igaza, hiszen a $B=\mathbb{Z}^+\setminus\{1;2\}$ is megfelel az összes feltételnek.

Legyen $m=n$, ahol n az az 1-nél nagyobb pozitív egész szám, amiről tudjuk, hogy B-nek eleme. Ekkor m és $m+1$ relatív prímek, azaz $m+1$ nem többszöröse

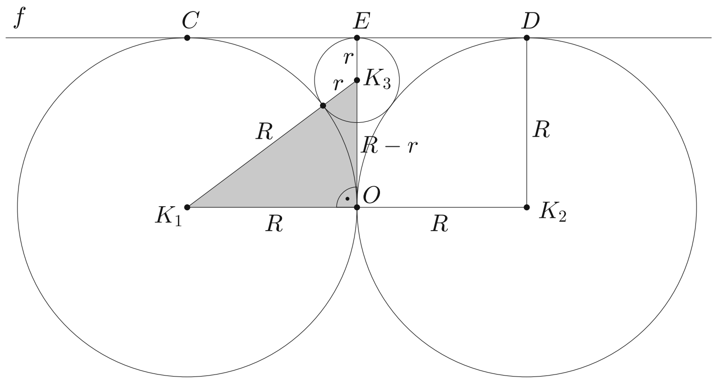
m-nek, így biztosan eleme B-nek. Ugyanezen gondolatmenet mentén haladva, ha $m+1 \in B$, akkor $m+2 \in B$, amiből következik, hogy $m+3 \in B$, és így tovább. B tehát tartalmazza az összes m-nél nagyobb pozitív egész számot, így Emőkének igaza van.

c) Ha $y \in \mathbb{R}$ és $0 < y < 1$, akkor $0 < \sqrt{y} < 1$. Ekkor $0 < x \cdot \sqrt{y} < x < y < 1$, ami azt jelenti, hogy ezúttal Andinak van igaza és a többiek tévednek.

6. *a*) *Győr idén ünnepli várossá válásának* 750. *évfordulóját. Erre az alkalomra egy építész három kör alakú szökőkutat tervezett úgy, hogy közülük kettő egybevágó, sugaruk hossza* 12 *méter, kívülről érintik egymást és egy fasort is, amely egy egyenest határoz meg. Milyen hosszú a harmadik szökőkút sugara, ha az kívülről érinti a másik kettőt és a fasor egyenesét is? (A szökőkutak a fasornak ugyanazon az oldalán vannak.)* (*8 pont*)

b) *Egy másik építész egy hatalmas teret álmodott meg, amelyet tíz, egymást kívülről érintő kör határol. A körök középpontjai egy* 121 *méter kerületű tízszöget alkotnak. Számítsuk ki a legnagyobb kör* r_1 *sugarát, ha tudjuk, hogy két-két darab* $r_2 = \frac{1}{3}r_1$; $r_3 = \frac{1}{3}r_2$; $r_4 = \frac{1}{3}r_3$ *és* $r_5 = \frac{1}{3}r_4$ *sugarú kör van, a tizedik kör sugara pedig* $r_6 = \frac{1}{3}r_5$. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük a két egybevágó kör középpontját K_1-gyel és K_2-vel, sugaruk hosszát R-rel, egyetlen közös pontjukat O-val. Legyen a harmadik (kisebb) kör középpontja K_3, sugarának hossza r, amely a közös f érintőegyenest az E pontban érinti.



A K_1OK_3 háromszög derékszögű, befogóinak hossza: $K_1O = R$ és $K_3O = OE - K_3E = R - r$, átfogója $K_1K_3 = R + r$. Ekkor Pitagorasz tétele alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(R+r)^2 = R^2 + (R-r)^2.$$

Rendezés után $r = \frac{R}{4}$, amelybe $R = 12$-t helyettesítve $r = 3$.

A harmadik szökőkút sugarának hossza 3 méter.

b) A feltételek alapján $r_5 = 3r_6$; amit felhasználva $r_4 = 3r_5 = 9r_6$. Hasonlóképpen kapjuk, hogy $r_3 = 27r_6$, $r_2 = 81r_6$ és $r_1 = 243r_6$.

A körök átmérőhosszainak összege egyenlő a tízszög kerületével:

$$2\big[r_1 + 2(r_2 + r_3 + r_4 + r_5) + r_6\big] = 121.$$

Alkalmazva a fenti összefüggéseket:

$$2\big[243r_6 + 2(81r_6 + 27r_6 + 9r_6 + 3r_6) + r_6\big] = 121,$$

$$r_6 = \frac{1}{8}, \qquad r_1 = 243r_6 = \frac{243}{8}.$$

A legnagyobb kör sugara 30,375 méter hosszúságú.

7. *a*) *Nevesincs-sziget lakói minden számot kétféle kavics sorozatával ábrázolnak. A* $\triangle$ *alakú kavics* 1*-gyel növeli az előtte álló kavicsok által meghatározott számot, a* $\otimes$ *pedig* 7*-tel való szorzást jelent. Például a* $\triangle\triangle\triangle\otimes\triangle\otimes\triangle\triangle$ *a* 156*-os számot jelenti. Legalább hány kavics kell a* 2021 *kirakásához?* (*5 pont*)

b) *Janka összegyűjtötte a* 2021 *kirakásához minimálisan szükséges számú kavicsot, és véletlenszerűen lerakta sorban egymás mellé az összeset. Hány különböző módon történhetett ez meg, ha csak az számít, hogy az adott helyen milyen formájú kavics áll?* (*5 pont*)

c) *Ezután Janka találomra kivett egy kavicsot a* 20*-ból, megmutatta barátnőjének, majd visszatette. Ezt még kétszer megismételte. Írjuk fel a* $\triangle$ *alakú kavicsok számának eloszlását és határozzuk meg a várható értéket.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A 2021 hetes számrendszerbeli alakja:

$$2021 = 5 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 1 \cdot 7 + 5.$$

Ez alapján állapítjuk meg a kavicsok minimális számát. A kirakáshoz kell

$$5 + 6 + 1 + 5 = 17 \text{ darab}$$

$\triangle$ alakú kavics, és annyi $\otimes$ kavics, ahány összeadásjel van a fenti felírásban, azaz 3 darab.

Összesen legalább 20 kavics kell.

b) A sorrendek száma például az ismétléses permutáció segítségével számolható ki:

$$P_{20}^{\{3;17\}} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140.$$

c) Legyen X a $\triangle$ alakú kavicsok száma, ekkor $X \in \{0;1;2;3\}$. Ez egy binomiális eloszlás, amelynek paraméterei: $n = 3$ és $p = \frac{17}{20}$. A keresett eloszlás:

$$P(X=0) = \binom{3}{0}\left(\frac{17}{20}\right)^0\left(\frac{3}{20}\right)^3 = \frac{27}{8000},$$

$$P(X=1) = \binom{3}{1}\left(\frac{17}{20}\right)^1\left(\frac{3}{20}\right)^2 = \frac{459}{8000},$$

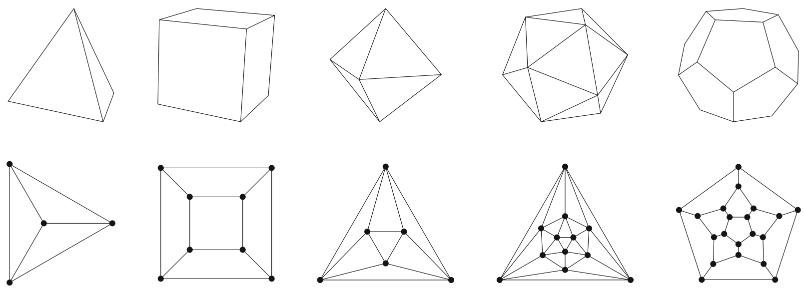
$$P(X=2) = \binom{3}{2}\left(\frac{17}{20}\right)^2\left(\frac{3}{20}\right)^1 = \frac{2601}{8000},$$

$$P(X=3) = \binom{3}{3}\left(\frac{17}{20}\right)^3\left(\frac{3}{20}\right)^0 = \frac{4913}{8000}.$$

A várható érték:

$$E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{17}{20} = \frac{51}{20}.$$

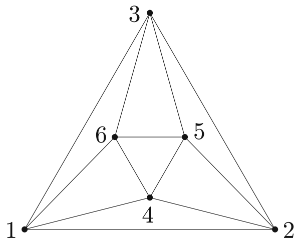
8. *a*) *Az öt szabályos testet a következő síkbeli gráfok segítségével ábrázoltuk. Lehetséges-e bármelyiket a ceruzánk felemelése nélkül megrajzolni úgy, hogy minden élen pontosan egyszer húzzuk át a ceruzát?* (*6 pont*)



b) *Marika egységnyi élhosszúságú, pirosra festett kockákból szeretne összeragasztani egy* $5 \times 5 \times 5$*-ös nagyobb kockát. Hány gramm ragasztóra van szüksége összesen, ha két kis kocka 1-1 lapját* 250 *milligramm ragasztóval lehet stabilan összeragasztani?* (*4 pont*)

c) *Az összeragasztás során kiderült, hogy összesen* 150 *kiskocka állt Marika rendelkezésére. A kiskockák* 8 *százaléka cinkből készült, a többi alumíniumból. Marika véletlenszerűen válogatta ki a szükséges kockákat. Legyen az A esemény az, hogy a nagyobb kocka nem lett cinkelt (azaz nem tartalmaz cinket), a B esemény pedig az, hogy a nagyobb kocka az összes cinkből készült kiskockát tartalmazza. Az A vagy a B esemény bekövetkezésének valószínűsége a nagyobb?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A ceruza felemelése nélkül úgy megrajzolni a gráfot, hogy minden élen pontosan egyszer haladjunk át akkor, és csak akkor lehet, ha – legfeljebb két csúcspont kivételével – minden csúcs fokszáma páros. Ha egy csúcsba megérke-



zünk, onnan tovább kell indulnunk, ezért páros a fokszám, kivéve esetleg a kezdő és a befejező csúcspontot. A fenti tulajdonsággal kizárólag a középső gráf rendelkezik, ezért az oktaédert ábrázoló gráfot meg lehet rajzolni (minden csúcspont fokszáma páros).

Például ha a mellékelt *ábrán* lévő számozott csúcspontokon a következő sorrendben haladunk át: $1; 2; 3; 1; 4; 5; 6; 4; 2; 5; 3; 6; 1$.

b) A kiskockáknak összesen $6 \cdot 125 = 750$ lapja van, ebből a nagykocka felülete $6 \cdot 5^2 = 150$-et tartalmaz, különbségük $750 - 150 = 600$, ez mind belülre kerül a nagykockában. 600 kiskockalapot kell összeragasztani, ez 300 darab ragasztást jelent, így a szükséges ragasztó tömege: $300 \cdot 0{,}25 = 75$ gramm.

c) *1. megoldás.* $150 \cdot 0{,}08 = 12$ cinkből készült kiskocka van és 138 alumíniumból készült. Marika 150 kiskockából 125-öt választ, így összesen $\binom{150}{125}$ eset van.

Az A esemény akkor, és csak akkor következik be, ha Marika mind a 125 kiskockát a 138 alumíniumkocka közül választja, tehát a kedvező esetek száma ekkor: $\binom{138}{125}$.

A B esemény akkor, és csak akkor következik be, ha Marika mind a 12 cinkkockát kiveszi és a még szükséges 113 kockát a 138 aluminíumkocka közül választja, tehát a kedvező esetek száma ekkor: $\binom{138}{113}$.

A keresett valószínűségek:

$$p(A) \approx 3{,}016 \cdot 10^{-11}, \quad \text{illetve} \quad p(B) \approx 1{,}02 \cdot 10^{-1}.$$

A B esemény bekövetkezésének valószínűsége (nagyságrendekkel) nagyobb.

2. megoldás. $150 \cdot 0{,}08 = 12$ cinkből készült kiskocka van és 138 alumíniumból készült. Most a 150 kiskocka közül a cinkből készülteket tekintjük és megnézzük, hogy bekerültek-e a nagykockába, vagy nem. Így összesen $\binom{150}{12}$ eset van.

Az A esemény akkor, és csak akkor következik be, ha a 25 kimaradó kiskocka közé kerül a 12 cinkkocka, tehát a kedvező esetek száma ekkor: $\binom{25}{12}$.

A B esemény akkor, és csak akkor következik be, ha a nagykockába bekerülő 125 kiskocka tartalmazza mind a 12 cinkkockát, ekkor a kedvező esetek száma: $\binom{125}{12}$.

A keresett valószínűségek:

$$p(A) \approx 3{,}16 \cdot 10^{-11}, \quad \text{illetve} \quad p(B) \approx 1{,}02 \cdot 10^{-1}.$$

A B esemény bekövetkezésének valószínűsége (nagyságrendekkel) nagyobb.

9. *a*) *Fricinek* 14 *nap múlva lesz a szalagavatója, és addigra minél hosszabb szakállat szeretne növeszteni. Most naponta fél millimétert nő a szakálla és éppen ma borotválkozott. A boltban vásárolt egy olyan balzsamot, amelyet közvetlenül borotválkozás után a teljesen sima bőrre kenve, a szakállnövekedés sebessége az előző napi másfélszeresére nő. Legfeljebb milyen hosszú lehet Frici szakálla a szalagavató napján, ha egyik napon sem borotválkozik* 1*-nél többször?* (*7 pont*) *b) Legyen α egy szabályos sokszög külső szögének nagysága és tudjuk, hogy az $\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$ kifejezés értéke a lehető legkisebb. Határozzuk meg a szabályos sokszög csúcsainak számát.* *(9 pont)*

Megoldás. *a)* Fricinek 14 nap áll rendelkezésére. Minden nap választhat, hogy borotválkozik vagy nem. Tegyük fel, hogy legalább egyszer megborotválkozik, ekkor lenullázza az előtte esetlegesen meglévő szakállát, amit úgy növeszthetett, hogy nem borotválkozott. Ebből következik, hogy a maximális szakállhosszt úgy érheti el, ha az első néhány napban borotválkozik, utána pedig már nem.

Legyen n (14-nél kisebb természetes szám) azon napok száma, amíg Frici naponta egyszer borotválkozik, utána pedig $14-n$ napig nem. Ekkor a szakáll hossza n függvényében:

$$l(n) = 0{,}5\cdot 1{,}5^n\cdot(14-n) = 7\cdot 1{,}5^n - 0{,}5\cdot 1{,}5^n\cdot n.$$

Tekintsük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7\cdot 1{,}5^x - 0{,}5\cdot 1{,}5^x\cdot x$ függvényt. Az f deriváltfüggvénye:

$$f'(x) = 7\cdot\ln 1{,}5\cdot 1{,}5^x - 0{,}5\cdot 1{,}5^x - 0{,}5\cdot 1{,}5^x\cdot\ln 1{,}5\cdot x.$$

A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a derivált nulla:

$$7\cdot\ln 1{,}5\cdot 1{,}5^x - 0{,}5\cdot 1{,}5^x - 0{,}5\cdot 1{,}5^x\cdot\ln 1{,}5\cdot x = 0,$$

$$x = \frac{7\cdot\ln 1{,}5 - 0{,}5}{0{,}5\cdot\ln 1{,}5}\approx 11{,}53.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy itt tényleg lokális maximuma van az f függvénynek, ami azt jelenti, hogy az $l(n)$ függvénynek $n=11$ vagy $n=12$ lehet a maximumhelye. $l(11)=129{,}75$; $l(12)=129{,}75$, így ez a maximális szakállhossz.

Frici szakálla legfeljebb 129,75 milliméter hosszú lehet a szalagavató napján.

b) A műveletek elvégzésével, összevonással, majd a pitagoraszi azonosság alkalmazásával a kifejezést a következő alakra hozzuk:

$$\left(1+\frac{1}{\sin^2\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) = 1+\frac{2}{\sin\alpha^2\cdot\cos^2\alpha} = 1+\frac{2}{\sin\alpha^2\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}.$$

Alkalmazzuk $\sin^2\alpha$-ra és $\left(1-\sin^2\alpha\right)$-ra a számtani és mértani közép közötti összefüggést:

$$\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}\leqslant\frac{1}{2},$$

amelyből négyzetre emelve (megtehetjük, hiszen mindkét oldal nemnegatív):

$$\sin^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)\leqslant\frac{1}{4},$$

$$1+\frac{2}{\sin\alpha^2\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}\geqslant 1+\frac{2}{\frac{1}{4}} = 9,$$

a kifejezés minimális értéke 9, amely egyenlőség esetén teljesül.