Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány megoldása van az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenségnek?

$$\left|1-\frac{x-1}{x}\right|>\frac{1}{2021}. \qquad (3\ pont)$$

b) Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\log_2 x+\log_4 x-2\log_8 x=\frac{5}{3}. \qquad (3\ pont)$$

c) Határozzuk meg azokat az x, y és z valós számokat, amelyekre:

$$12x^2+15y^2+4z^2-12xy-12yz-8z+16=0. \qquad (6\ pont)$$

2. *a*) Igazoljuk, hogy $\log_{2020} 2021$ irracionális szám. (*4 pont*)

b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\cos 2x+\cos\frac{3}{5}x=2. \qquad (6\ pont)$$

c) A következő két állításról döntsük el, hogy igaz vagy hamis. Válaszunkat indokoljuk. (*4 pont*)

I. Van olyan 6 csúcsú nem összefüggő egyszerű gráf, amelyiknek minden csúcsa másodfokú.

II. Ha egy 6 csúcsú összefüggő egyszerű gráfban a fokszámok 1, 1, 1, 3, 3, 3, akkor a gráfban biztosan van kör.

3. Evelin minden nap iszik egy kávét vagy egy teát. Ha tegnap kávét ivott, akkor 0,3 valószínűséggel iszik ma is. Ha teát ivott tegnap, akkor 0,6 valószínűséggel ma kávét iszik.

a) Ha Evelin tegnap kávét ivott, mekkora a valószínűsége, hogy holnap teát iszik? (*4 pont*)

b) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik kávét? (*7 pont*)

c) Hosszú távon Evelin a napok hány százalékában iszik teát? (*2 pont*)

4. Egy n oldalú szabályos sokszög alapú egyenes hasáb magassága és alaplapjának az oldalai is 1 cm-esek.

a) Ha a hasáb lapátlóinak és testátlóinak összege 6960, akkor hány csúcsa van az alaplapját képező szabályos n-szögnek? (*5 pont*)

b) Mekkora ennek a hasábnak a felszíne és a térfogata? (*7 pont*)

II. rész

5. *a*) Adjuk meg az $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^3+1}}$ hozzárendelési szabállyal megadott függvény legbővebb értelmezési tartományát. (*1 pont*)

b) Mennyi az $f(x)$ függvény határértéke + végtelenben, azaz $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=?$ (*3 pont*)

c) Mennyi az $f(x)$ függvény maximuma a $[0;2]$ intervallumon, és ezt hol veszi fel? (*6 pont*)

d) Számítsuk ki a következő határozott integrál értékét:

$$\int_0^2 (x^3+1)f^2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (3\ pont)$$

e) Mennyi annak a „serleg” alakú testnek a térfogata, mely testet úgy kapjuk meg, hogy az $f(x)$ függvénynek a $[0;2]$ intervallumon vett grafikonját az x tengely körül megforgatjuk? (Természetesen a nyak feletti részről van szó és az egység legyen 1 cm. A kép csak illusztráció.) (*3 pont*)

6. Emeljünk egy merőleges szakaszt az $ABCD$ téglalap síkjára a D pontban úgy, hogy a szakasz másik végpontjára, M-re igazak a következők: $MA=12\sqrt{2}$, $MB=4\sqrt{34}$, $MC=20$.

Ha a hosszúságokat centiméterben mérjük, számítsuk ki:

a) a téglalap oldalainak hosszát; (*7 pont*)

b) az MAB háromszög síkjának az $ABCD$ téglalap síkjával bezárt szögét; (*6 pont*)

c) az $ABCDM$ test térfogatát. (*3 pont*)

7. Képzeljük el, hogy a 2025-ös évben vagyunk. *Pénzügytudatos Patrik* pontosan öt évvel ezelőtt, 2020-ban egy nagyobb összeghez jutott és azzal a céllal vásárolt ebből 10 millió forintért egy államkötvényt (vagyis befektette a pénzét), hogy az öt éves futamidő leteltével, amikor felveszi a kamatokkal megnövelt összeget, azt felhasználja lakásvásárlásra.

a) Öt év elteltével mekkora lett a kamatokkal növelt összeg, ha a kamat számítása a következők szerint történik? Az öt éves futamidőt hat kamatozási periódusra osztották, és az egyes időszakaszokban változó mértékű kamatlábat állapítottak meg. Az első félévben az éves kamat 3,50% (vagyis félévre 1,75%), a második félévre az éves kamat 4,00% (vagyis erre a félévre 2%). A második évtől kezdve már egész évente változik a kamat és ezen belül egész évre vonatkozóan ugyanakkora mértékű: a második évre 4,50%, a harmadikra 5,00%, a negyedikre 5,50%, végül az ötödikre 6,00%. Lényeges továbbá, hogy az egy-egy kamatozási periódus végén létrejött, a névérték kamattal megnövelt összege képezi a következő kamatperiódus során a kamatszámítás alapját (kamatos kamat). (*5 pont*)

b) Pénzügytudatos Patrik házastársa is rendelkezik egy öt éves futamidejű, hasonló névértékű, de fix kamatozású állampapírral, melynek az éves kamata 5% és ez is éppen 2025-ben jár le. Ezen kívül a házaspár kap az államtól 10 millió forint vissza nem térítendő családalapítási támogatást. Ezt a három forrást felhasználva százezresekre kerekítve mekkora összegből tud a házaspár lakást vásárolni? (*5 pont*)

c) Pénzügytudatosék mellett másik három baráti házaspár is lakást vásárol, mégpedig valamennyien egy új építésű lakóparkban, amely a 10 lakásos „Zöld Ház"-ból és a 20 lakásos „Fehér Ház"-ból áll. A beruházó a viták elkerülése végett sorsolással dönt arról, hogy a 30 lakás közül melyiknek melyik család legyen a tulajdonosa. A sorsolásnál ügyelnek arra, hogy bármelyik lakáshoz ugyanakkora eséllyel lehessen hozzájutni. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a négy házaspár közül kettő a „Zöld Ház"-ba, a másik kettő pedig a „Fehér Ház"-ba költözhet? (*6 pont*)

8. *a*) Adott az $\{x_n\}$ valós számsorozat, ahol $x_1=\sqrt{2}$ és $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$, ha $n\geqslant 1$. Igazoljuk, hogy az $\{x_n\}$ sorozat konvergens és határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ értékét. (*7 pont*)

b) Igazoljuk, hogy ha az x és y pozitív számok összege 2, akkor

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 4. \qquad (5\ pont)$$

Forrás:
`https://varlexikon.hu/varpalota`

Egy négyzet alakú várban a csúcsoknál egy-egy torony áll, az Északi Torony (E), a Keleti Torony (K), a Déli Torony (D) és a Nyugati Torony (N). Őrségben a várfal tetején lévő négy falszakaszon sétálnak a várőrök. Az Északi Toronyban lévő őrszobából indulnak és toronytól toronyig haladva az ÉK, KD, DN és NE közül mindig pontosan hat falszakaszon haladnak végig egy őrjárat során. (Értelemszerűen egy falszakasz többször is szerepelhet egy őrjárat során, például akkor, ha a következő toronynál egyből visszafordul a várőr.)

c) Legfeljebb hány tagú a várőrség, ha mindegyikük különböző útvonalon sétált? (Az őrjáratnak nem kell feltétlenül az Északi Toronynál végződnie. Két útvonalat nem tekintünk különbözőnek, ha ugyanazokat a falszakaszokat tartalmazza ugyanabban a sorrendben.) (*4 pont*)

9. *a*) Egy egységoldalú négyzet belsejében és oldalain lévő pontok mindegyikét kiszíneztük két szín valamelyikével. Mutassuk meg, hogy létezik két egyszínű pont, amelyek legalább $\frac{\sqrt{5}}{2}$ távolságra vannak egymástól. (*6 pont*)