Három versenyző oldott meg helyesen két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 25 000 Ft pénzjutalomban részesül

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Varga Mária* és *Szűcs Gábor*) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Tóth Balázs, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Dobos Sándor* és *Nikházy László*) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*) az első és a harmadik feladat megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Füredi Erik, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter* és *Dobos Sándor*), mert az első feladatban a megoldás közelébe jutott és félig megoldotta a harmadik feladatot,

Szabó Kornél, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Surányi László* és *Pósa Lajos*) a harmadik feladat helyes megoldásáért,

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*) a második feladat helyes megoldásáért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.*

Megoldás. Legyen $k \geqslant 1$ rögzített. Az állítást $10k$ helyett $9k$-ra bizonyítjuk, n szerinti teljes indukcióval.

Az állítás $n=1$-re triviális, hiszen $9k \geqslant 9 > 1$. Tegyük fel, hogy $n>1$ és kisebb értékekre már beláttuk az állítást. Legyen $\mathcal{D}$ az n darab zárt körlap halmaza, amelyek között nincs k-nál több páronként metsző. (Vagyis bármely $k+1$ között van két diszjunkt.) Tegyük fel, hogy $D \in \mathcal{D}$ a körlapjaink közül egy minimális sugarú. Feltehetjük, hogy D sugara 1 és középpontja O. Legyenek $D_1, \ldots, D_\ell \in \mathcal{D}$ a D-t metsző körlapok. Minden i-re $(1 \leqslant i \leqslant \ell)$ D_i sugara legalább 1. Legyen $x_i \in D \cap D_i$. Kicsinyítsük le D_i-t x_i-ből 1 sugarúra, D_i' a kapott körlap.

Legyen C az O középpontú 3 sugarú körlap. Mivel D_i' metszi D-t, $D_i' \subseteq C$. Ugyanakkor, mivel $D_i' \subseteq D_i$, a $D, D_1', \ldots, D_\ell'$ egységsugarú körlapok között nincs k-nál több páronként metsző. Speciálisan, egy pontot sem tartalmaz közülük több, mint k. Ezért

$$\sum_{i=1}^{\ell} t(D_i') + t(D) \leqslant kt(C),$$

tehát $(\ell+1)\pi \leqslant 9k\pi$, vagyis $\ell \leqslant 9k-1$. ($t(X)$ az X területét jelöli.)

Az indukciós feltevés alapján osszuk be a $\mathcal{D} \setminus D$ halmazba tartozó körlapokat a feltételeknek megfelelően legfeljebb $9k$ osztályba. Mivel a D körlapot legfeljebb $9k-1$ körlap metszi, a $9k$ osztály közül valamelyikben nincs a D-t metsző körök közül egy sem. Tegyük D-t ebbe az osztályba és ez egy megfelelő beosztását adja $\mathcal{D}$ körlapjainak. Ezzel beláttuk az állítást. □

2. *Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra*

- $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$,
- $f(xy) = f(x)f(y)$,
- $f(2) = 1/2$.

I. megoldás. Először vegyük észre, hogy

$$f(1) = f(1^2) = f(1)^2,$$

így $f(1) \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor

$$1/2 = f(2) = f(1+1) \leqslant f(1) + f(1) = 2f(1),$$

így $f(1) \geqslant 1/4$, ennélfogva $f(1) = 1$.

Vegyük azt is észre, hogy

$$f(-1)^2 = f\big((-1)^2\big) = f(1) = 1,$$

és mivel $f(-1) \geqslant 0$, ezért $f(-1) = 1$. Ebből az is következik, hogy minden a racionális számra $f(-a) = f(-1)f(a) = f(a)$.

Továbbá az 1-hez hasonlóan a 0-ra is

$$f(0) = f(0^2) = f(0)^2,$$

így $f(0) \in \{0, 1\}$. Ugyanakkor

$$f(0) \leqslant f(4) + f(-4) = 2f(2 \cdot 2) = 2f(2)f(2) = 1/2,$$

tehát $f(0) = 0$.

Legyen most $p \geqslant 3$ tetszőleges prímszám, belátjuk, hogy $f(p) \leqslant 1$. Legyen ugyanis indirekte $f(p) = \alpha > 1$. Tegyük fel, hogy p-nek a 2-es számrendszerben m jegye van, ekkor minden k-ra p^k-nak a 2-es számrendszerben legfeljebb mk jegye van. Ekkor p^k felírható legfeljebb mk darab 2-hatvány összegeként, a 2-hatványokon f legfeljebb 1, így azt kapjuk, hogy

$$\alpha^k = f(p^k) \leqslant mk.$$

Megmutatjuk, hogy ez elegendően nagy k-ra nem teljesülhet, ez az ellentmondás mutatja majd, hogy $f(p) \leqslant 1$. Legyen ugyanis $h > 0$ olyan, hogy $1 + h < \alpha$. Ekkor $k \geqslant 2$-re

$$\alpha^k > (1+h)^k \geqslant 1 + \binom{k}{2} h^2 \geqslant 1 + k^2h^2/4$$

(hiszen $\binom{k}{2} = (k^2 - k)/2$, és mivel $k \geqslant 2$, a kivonandó k-t $k^2/2$-vel felülről becsülve $\binom{k}{2} \geqslant (k^2 - k^2/2)/2 = k^2/4$). Ha most $k > 4m/h^2$, akkor $k^2h^2/4 > mk$, tehát $\alpha^k > mk$, ami valóban ellentmondás. Tehát $f(p) \leqslant 1$.

Ekkor, mivel minden egész szám prímek szorzata, azt is megkaptuk, hogy $f(n) \leqslant 1$, ha n egész szám.

A következő lépésben ugyanerre a $p \geqslant 3$ prímre azt is belátjuk, hogy $f(p) < 1$ is ellentmondásra vezet. Tegyük fel ugyanis, hogy $f(p) = \beta < 1$. Válasszuk meg most k-t olyan nagynak, hogy $\beta^k < 1/2$. (Ezt megtehetjük, hiszen az előző részben látottak alapján $1/\beta > 1$-nek van olyan hatványa, ami 2-nél nagyobb, és ezen hatvány reciproka β egy 1/2-nél kisebb hatványa.) Mivel p^k páratlan szám, alkalmas n egész számra $p^k + 2n = 1$, és így a feltételek alapján

$$f(1) \leqslant f(p^k) + f(2n) = \beta^k + f(2)f(n) < 1/2 + 1/2 = 1,$$

ami ellentmondás.

Tehát az f függvény minden páratlan prímen az 1 értéket veszi fel.

A számelmélet alaptételének egyszerű következménye, hogy minden 0-tól különböző racionális szám egyértelműen írható fel $2^k \cdot \frac{m}{n}$ alakban, ahol m és $0 < n$ egymáshoz relatív prím, páratlan számok, k pedig egész (negatív is lehet). Az eddigiek alapján világos, hogy f értéke ezen racionális számnál 2^{-k} kell legyen.

Be kell még látnunk, hogy ez az f megfelel a feltételeknek. A szorzási feltétel világos, az összeadásihoz pedig vegyük észre, hogy ha $a_1 = 2^{k_1} \cdot \frac{m_1}{n_1}$ és $a_2 = 2^{k_2} \cdot \frac{m_2}{n_2}$ egymás ellentettje, akkor az állítás triviális, hiszen $f(0) = 0$. Ha pedig a_1 és a_2 nem egymás ellentettje, akkor az összegükben a 2-es kitevője legalább $\min(k_1, k_2)$, hiszen az összegük

$$\frac{2^{k_1}m_1n_2 + 2^{k_2}m_2n_1}{n_1n_2} = 2^{\min(k_1,k_2)} \cdot \frac{2^{k_1 - \min(k_1,k_2)}m_1n_2 + 2^{k_2 - \min(k_1,k_2)}m_2n_1}{n_1n_2},$$

ahol a nevező páratlan, a számláló pedig egy egész szám, mely esetleg még tartalmazhat 2-eseket pozitív kitevővel, de negatívval biztosan nem. Ekkor

$$f(a_1 + a_2) \leqslant 2^{\min(k_1,k_2)} = \max(f(a_1), f(a_2)) \leqslant f(a_1) + f(a_2),$$

így a bizonyítás kész. □

II. megoldás. Először vegyük észre, hogy

$$f(1)/2 = f(1)f(2) = f(1 \cdot 2) = f(2) = 1/2,$$

így $f(1) = 1$.

Vegyük azt is észre, hogy

$$f(-1)^2 = f\big((-1)^2\big) = f(1) = 1,$$

és mivel $f(-1) \geqslant 0$, ezért $f(-1) = 1$. Ebből az is következik, hogy minden racionális a-ra $f(-a) = f(-1)f(a) = f(a)$.

Továbbá az 1-hez hasonlóan a 0-ra is

$$f(0)/2 = f(0)f(2) = f(0 \cdot 2) = f(0),$$

tehát $f(0) = 0$.

Vegyük észre, hogy minden természetes k kitevőre $f(2^k) = f(2)^k = 1/2^k$. Mivel minden természetes szám felírható véges sok különböző 2-hatvány összegeként, ezért az f függvény értéke minden természetes helyen kisebb, mint $1 + 1/2 + 1/4 + \dots = 2$. De akkor $f(n) = \sqrt[k]{f(n^k)} < \sqrt[k]{2}$ minden természetes n-re és pozitív egész k-ra, ahonnan $f(n) \leqslant 1$ minden természetes, és így minden egész n-re.

Ugyanakkor minden páratlan egész n-re és természetes k-ra léteznek olyan u és v egész számok, hogy

$$un + v2^k = (n, 2^k) = 1.$$

Ekkor

$$1 = f(1) \leqslant f(un) + f(v2^k) = f(u)f(n) + f(v)f(2^k) \leqslant f(n) + 1/2^k.$$

Ezért minden k-ra $1 - 1/2^k \leqslant f(n)$, és így $f(n) \geqslant 1$. Tehát $f(n) = 1$ minden páratlan egész n-re. Így minden természetes k-ra és páratlan n-re

$$f(2^k n) = f(2^k)f(n) = \frac{1}{2^k}.$$

Az f függvény szorzattartó tulajdonsága miatt tetszőleges egész k-ra és páratlan egész m-re és n-re $f(2^k n/m) = f(2^k n)/f(m) = 1/2^k$.

Még ellenőriznünk kell, hogy ez az f megfelelő, ezt például az I. megoldásban látott módon tehetjük meg. □

Megjegyzés. A 2. feladat Ostrowski nevezetes tételének[1] speciális esete.

3. *Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található* 13 *olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.*

[1] Lásd például a következő linket:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Ostrowski%27s_theorem`

I. megoldás. Ha csupán azt akarjuk belátni, hogy létezik megfelelő N (és nem akarjuk meghatározni a legkisebb ilyen N értékét), akkor a Ramsey-tétel segítségével a következőképpen láthatjuk be gyorsan az állítást. Tekintsük az N csúcsú teljes gráfot, ahol minden csúcs az egyik háznak felel meg. Színezzünk két ház közti élt pirosra / zöldre / kékre, ha Télapó ugyanabban a sorrendben látogatta meg őket az 1. és 2. / 1. és 3. / 2. és 3. évben. Világos, hogy minden él legalább egy színt kap. A Ramsey-tétel szerint elég nagy N-re mindenképpen lesz 13 csúcsú, egyszínű teljes részgráf, ami éppen a feladat állításával ekvivalens.

Ha a legjobb N értéket akarjuk meghatározni, akkor más megközelítésre van szükségünk. Erdős és Szekeres alábbi tételét fogjuk alkalmazni:

Erdős–Szekeres-tétel. Legyen k és ℓ pozitív egész; ekkor minden $k\ell+1$ hosszú, különböző számokból álló sorozatból kiválasztható $k+1$ hosszú monoton növő vagy $\ell+1$ hosszú monoton csökkenő részsorozat.

Legyen $N=12^3+1$ és számozzuk meg a házakat az első év bejárásának sorrendjében 1-től N-ig. A második év bejárási sorrendjére ezen számokból álló sorozatként gondolunk. Alkalmazzuk erre a sorozatra az Erdős–Szekeres-tételt $k=12$, illetve $\ell=12^2$ választással. Ha $k+1=13$ hosszú monoton növő részsorozatot találunk, akkor azonnal kész is vagyunk, mert ekkor az 1. és 2. évben az ezekhez tartozó 13 házat ugyanolyan sorrendben látogatta meg Télapó. Tegyük fel tehát, hogy $\ell+1=12^2+1$ hosszú monoton csökkenő részsorozatot találtunk. Most tekintsük kizárólag ezt a 12^2+1 házat, amelyet ezek szerint Télapó az első két évben éppen fordított sorrendben járt be. Ha most alkalmazzuk az Erdős–Szekeres-tételt $k=\ell=12$ választással arra a 12^2+1 hosszú sorozatra, ahogy a harmadik évben látogatta meg Télapó ezeket a házakat, akkor mindenképpen végeztünk: ha monoton növő sorozatot kapunk, akkor az 1. és 3. évben lesz egyforma sorrend; monoton csökkenő esetben pedig a 2. és 3. évben.

Végül megmutatjuk, hogy $N=12^3$-ra még nem igaz az állítás (és így ennél kisebb N-ekre sem). A házakat címkézzük meg különböző (a,b,c) hármasokkal, ahol $a,b,c\in\{0,1,2,\dots,11\}$. Legyen $x\geqslant 12$ tetszőlegesen rögzített, és minden (a,b,c) hármashoz rendeljünk három értéket a következő módon:

$$f_1(a,b,c)=ax^2+bx+c,$$
$$f_2(a,b,c)=ax^2-bx-c,$$
$$f_3(a,b,c)=-ax^2-bx+c.$$

Ha az i-edik évben a házakat a címkéik f_i értéke szerinti növekvő sorrendben látogatja meg Télapó ($i\in\{1,2,3\}$), akkor könnyen ellenőrizhető, hogy nem lesz 13 ház, melyek két évben is ugyanabban a sorrendben kerültek sorra. □

II. megoldás. A házak halmazát $\mathcal{S}$-sel fogjuk jelölni. Azt, hogy az s házat Télapó az i-edik évben (ahol $i\in\{1,2,3\}$) nem később látogatja meg, mint az s' házat úgy jelöljük, hogy $s\preceq_i s'$. Ez tehát azt jelenti, hogy vagy $s=s'$, vagy s-et (szigorúan) előbb látogatta meg, mint s'-t.

A házak ezen bejárási sorrendjeire úgy is hivatkozunk majd, mint a házak egy-egy sorbarendezése.

Legyen $n=13$. Először megmutatjuk, hogy $N=(n-1)^3$ még nem elég. (Ebből persze következik, hogy ennél kisebb N értékek sem megfelelők.) Megadjuk az $\mathcal{S}=\{(i,j,k):\ 1\leqslant i,j,k\leqslant n-1\}$ halmaz elemeinek háromféle sorbarendezését úgy, hogy ne létezzen n elem, amelynek kétféle rendezés szerint is ugyanaz a sorrendje. A $\preceq_1$ rendezés legyen az úgynevezett lexikografikus rendezés:

$$(i,j,k)\preceq_1(i',j',k')\iff$$
$$\iff (i<i')\text{ vagy }(i=i'\text{ és }j<j')\text{ vagy }(i=i',j=j'\text{ és }k\leqslant k').$$

A másik két rendezés definíciója hasonló, azzal a különbséggel, hogy bizonyos koordináták esetén '„fordított" sorrendet veszünk. Legyen

$$(i,j,k)\preceq_2(i',j',k')\iff$$
$$\iff (i>i')\text{ vagy }(i=i'\text{ és }j<j')\text{ vagy }(i=i',j=j'\text{ és }k\geqslant k'),$$
$$(i,j,k)\preceq_3(i',j',k')\iff$$
$$\iff (i>i')\text{ vagy }(i=i'\text{ és }j>j')\text{ vagy }(i=i',j=j'\text{ és }k\leqslant k').$$

Megvizsgáljuk, hogy ℓ darab (különböző) hármas milyen feltételek mellett alkothat növekvő sorrendet kétféle rendezés szerint is.

Először tegyük fel, hogy

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_1\dots\preceq_1(i_\ell,j_\ell,k_\ell)$$

és

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_2\dots\preceq_2(i_\ell,j_\ell,k_\ell).$$

A rendezések definíciójából rögtön következik, hogy $i_1=\dots=i_\ell=:i_0$. A hármasok tehát $(i_0,*,*)$ alakúak. Továbbá, egy rögzített j_0 mellett csak egyetlen $(i_0,j_0,*)$ alakú elem lehet a hármasok között, hiszen

$$(i_0,j_0,k)\preceq_1(i_0,j_0,k')\quad\text{és}\quad(i_0,j_0,k)\preceq_2(i_0,j_0,k')$$

esetén $k\leqslant k'$-nek és $k\geqslant k'$-nek is teljesülnie kell. Tehát ebben az esetben $\ell\leqslant n-1$.

Most tegyük fel, hogy

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_1\dots\preceq_1(i_\ell,j_\ell,k_\ell)$$

és

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_3\dots\preceq_3(i_\ell,j_\ell,k_\ell).$$

Az előző esethez hasonlóan következik, hogy

$$i_1=\dots=i_\ell=:i_0\quad\text{és}\quad j_1=\dots=j_\ell=:j_0,$$

tehát a hármasok $(i_0,j_0,*)$ alakúak, számuk szintén legfeljebb $n-1$ lehet.

Végül tegyük fel, hogy

$$(i_1,j_1,k_1)\preceq_2\dots\preceq_2(i_\ell,j_\ell,k_\ell)\quad\text{és}\quad(i_1,j_1,k_1)\preceq_3\dots\preceq_3(i_\ell,j_\ell,k_\ell).$$

Ekkor a definíció alapján az derül ki, hogy bármely i_0 esetén csak egyetlen $(i_0, *, *)$ alakú hármas lehet, ekkor is $\ell \leqslant n-1$.

Ez azt jelenti, hogy ebben a példában nincs n ház, melyeket két évben is ugyanolyan sorrendben járt be Télapó.

Tehát $(n-1)^3$ még nem feltétlenül elég. Belátjuk, hogy $N=(n-1)^3+1$ már igen. Minden házhoz rendeljünk hozzá egy rendezett hármast a következő módon. Egy házhoz akkor rendeljük az (a,b,c) hármast, ha

- a a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely az első két rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik,
- ehhez hasonlóan, b a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely az első és a harmadik rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik,
- végül c a leghosszabb olyan házsorozat hossza, mely a második és harmadik rendezés szerint is növekvő sorrendben van, és a szóban forgó házzal kezdődik.

Világos, hogy ha egy házhoz az (a,b,c) hármast rendeljük, akkor a,b,c pozitív egész számok, továbbá, ha van köztük olyan, ami legalább n, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát indirekten, hogy nincs köztük olyan, ami legalább n. A lehetséges hármasok száma $(n-1)^3$, így mivel $(n-1)^3+1$ ház van, a skatulyaelv szerint biztosan lesz két ház, s és s', melyekhez ugyanazt, mondjuk az (a,b,c) hármast rendeltük. A két ház közül valamelyiket a három év közül legalább kettőben előbb látogatta meg Télapó, mint a másikat. Az évek (és a házak) közötti logikai szimmetria alapján feltehető, hogy például s-et az első és a második évben előbb látogatta meg, mint s'-t. Tudjuk, hogy van egy a hosszú házsorozat, ami s'-vel kezdődik, és az első két rendezés szerint növekvő sorozatot alkot. Ennek elejére téve s-et egy s-sel kezdődő, $a+1$ hosszú, az első két rendezés szerint is növekvő házsorozatot kapunk, ami ellentmond annak, hogy s-hez is az (a,b,c) hármast rendeltük. Ez az ellentmondás igazolja, hogy valóban lesz megfelelő n hosszú házsorozat, vagyis n olyan ház, amit két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg.

Ezzel megmutattuk, hogy létezik megfelelő N érték, éspedig $N=(n-1)^3+1$. A feladatban $n=13$, vagyis a legkisebb megfelelő N értéke $N=1729$. $\square$

Megjegyzés. A megoldás során nem játszott szerepet, hogy $n=13$. A feladatot azért ezzel a speciális értékkel tűztük ki, mert így a válasz éppen 1729, ami az úgynevezett „taxicab number”[2] (vagy Hardy–Ramanujan szám): a legkisebb olyan szám, ami kétféleképpen is előáll két (pozitív) köbszám összegeként: $1729=10^3+9^3=12^3+1^3$. Ezen tulajdonsága a megoldás során persze nem játszott szerepet, de éppen 2020-ban volt Srinivasa Ramanujan halálának 100-adik évfordulója, így az ő tiszteletére választottuk ezt a speciális értéket.[3]

Pach Péter Pál

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_number

[3] *Turán Pál:* Egy különös életút, Ramanujan. I. rész: *KöMaL* (2020/9), 453–459., II. rész: *KöMaL* (2021/1), 6–16.