Jelentés a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 2-án, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg – a verseny történetében először – online formában.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság szeptember 3-ai ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.*

2. *Határozzuk meg azokat a racionális számok halmazán értelmezett, nemnegatív valós értékű f függvényeket, melyekre teljesül, hogy tetszőleges x, y racionális számokra*

- $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$,
- $f(xy)=f(x)f(y)$,
- $f(2)=1/2$.

3. *Egy városban N ház van. Télapó minden karácsonykor végigjárja a házakat valamilyen sorrendben. Mutassuk meg, hogy ha N elég nagy, akkor teljesül, hogy három egymást követő évben mindig található 13 olyan ház, amit (a három közül) két évben is ugyanabban a sorrendben látogatott meg. Határozzuk meg a legkisebb N számot, melyre ez fennáll.*

A bizottság a(z elektronikusan) beérkezett dolgozatok átnézése után, november 16-ai ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny rendben zajlott le: a 73 regisztrált versenyzőtől összesen 58 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen a második feladatot 5-en oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen, a harmadik feladatra szintén 5 helyes megoldás érkezett. A legnehezebbnek bizonyult első feladatnál két helyes megoldás mellett egy versenyző jutott a megoldás közelébe.

Egyetlen versenyző oldotta meg lényegében mindhárom feladatot. Ezért

I. díjban és 45 000 Ft pénzjutalomban részesül

Gyimesi Péter, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Varga Mária, Szűcs Gábor* és *Pósa Lajos*).

Három versenyző oldott meg helyesen két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 25 000 Ft pénzjutalomban részesül

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Varga Mária* és *Szűcs Gábor*) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Tóth Balázs, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza, Dobos Sándor* és *Nikházy László*) a második és a harmadik feladat megoldásáért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*) az első és a harmadik feladat megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Füredi Erik, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter* és *Dobos Sándor*), mert az első feladatban a megoldás közelébe jutott és félig megoldotta a harmadik feladatot,

Szabó Kornél, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Dobos Sándor, Gyenes Zoltán, Surányi László* és *Pósa Lajos*) a harmadik feladat helyes megoldásáért,

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*) a második feladat helyes megoldásáért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

A 2020. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Legyenek n és k pozitív egészek. Adott n zárt körlap a síkon úgy, hogy közülük bárhogyan is választunk $k+1$ körlapot, mindig van két olyan kiválasztott körlap, amelyeknek nincs közös pontja. Bizonyítsuk be, hogy az n körlap besorolható legfeljebb $10k$ osztályba úgy, hogy azonos osztályba eső két körlapnak sosincs közös pontja.*

Megoldás. Legyen $k \geqslant 1$ rögzített. Az állítást $10k$ helyett $9k$-ra bizonyítjuk, n szerinti teljes indukcióval.

Az állítás $n=1$-re triviális, hiszen $9k \geqslant 9 > 1$. Tegyük fel, hogy $n>1$ és kisebb értékekre már beláttuk az állítást. Legyen $\mathcal{D}$ az n darab zárt körlap halmaza, amelyek között nincs k-nál több páronként metsző. (Vagyis bármely $k+1$ között