# Fizika alapszak az ELTE TTK-n

## Kedves továbbtanuló Fizikabarátok!

A KöMaL évszázados hagyományokat követve vezeti be a középiskolásokat a matematika és a fizika tantárgyak rejtelmeibe. Ez a tudás jól használható az egyetemi fizikatanulás során is. A KöMaL feladatmegoldóinak és olvasóinak egyik természetes továbbtanulási iránya a fizika választása. Akik szeretik a fizikát és ezzel szeretnék felkészültségüket fejleszteni, azoknak hasznos továbbtanulás az egyetemi *fizika alapképzés.* Nemcsak a leendő kutatóknak, de minden kreatív problémamegoldást igénylő munkahelyen elhelyezkedőnek felhasználható tudást nyújt ez a képzés. Azok számára is jó alap, akik később nem a fizikus mesterszakokon folytatják tanulmányaikat, hanem geofizikus, meteorológus, csillagász, környezettudományi vagy anyagtudományi mesterképzésben tanulnak tovább. A KöMaL-ban elmélyített fizikai tárgyi tudás szakmai ismeretei a fizikatanár képzésben is kamatoztathatók azok számára, akik kedvet éreznek életük során diákok tanítására.

A fizika tárgy tudása, amit a fizika alapszakokon el lehet sajátítani, számos munkahelyen ad lehetőséget a karrier építésére. A kutatóintézeteken kívül a pénzügyi, műszaki világ nagyvállalatainak kutatási és fejlesztési projektjein, vagy kisebb cégekben alkalmazott problémamegoldó képességhez társuló fizikai tudást és informatikai készségeket igénylő projekteken lehet elhelyezkedni a fizikatanulás során megszerzett képességek felhasználásával.

Az ELTE TTK fizika alapszakja egyedülálló módon egyesíti a lehetőségeket! Az itt szerzett alapszakos diploma számos mesterképzésben felhasználható egyetemünkön belül és kívül úgy, hogy már az alapképzés során a speciális továbbtanulás alapozó témáiban lehet krediteket szerezni.

Az ELTE TTK további lehetőséget is nyújt a fizika tanulására az osztatlan tanárképzési szakokon. A fizika szak mellett a matematika, kémia a leggyakoribb párosítás, de informatika, történelem vagy nyelvi szakok is elterjedtek második tanári szakként. Az osztatlan tanárképzésben szerzett diploma fizikából egyedülállóan keresett képesítés a munkaerőpiacon. Napjainkban ez egy hiányszakma és biztos elhelyezkedést jelent azok számára, akik szeretnének ezen a társadalmilag is fontos pályán elhelyezkedni.

A fizika alapszak tárgyainak kínálata az ELTE TTK-n kifejezetten széles. A kötelező tárgyak szilárd alapja jelenti a szakma megismerését, de emellett számos részterület bevezető tananyaga elsajátítható. Az ELTE TTK Fizikai Intézetének munkatársai a biológiai fizika, elméleti fizika, anyagtudomány, asztrofizika, komplex rendszerek statisztikus fizikája, kvantummechanikai témakörök – például kvantumszámítógépek leírása –, részecskefizika, nehézionfizika, atommagfizika témákban nemzetközi kutatásokba is bevonják az érdeklődő diákokat. A kutatás iránt is érdeklődő diákok számára bejáratott út vezet a tudományos diákköri projektek felé.

Ezen diákok által végzett kutatási eredmények diákkonferenciákon mutathatók be, melynek országos rendszerében az ELTE TTK hallgatói évek óta kiválóan teljesítenek és sikereket érnek el. A diákköri kutatómunkák kiváló alapot adnak a külföldi egyetemeken történő mesterképzésben vagy doktori iskolában történő továbbtanulásra.

A tanárszakos osztatlan képzés felhasználja az ELTE többi karain oktatott pedagógiai és tanításmódszertani szakmai tudást is. A tanárszakosok többször lehetőséget kapnak a tanítási módszerek kipróbálására és a tapasztalt tanárok mesterség-elemeinek megtanulására. Az ELTE három gyakorlóiskolája kiváló terep a tanári szakma komplex elsajátítására, de számos más középiskolában is lehet gyakorlatokat végezni.

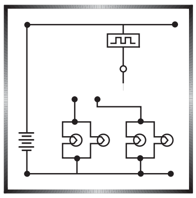
Az ELTE TTK fizikaképzése nemzetközi szintű, amit az is jelez, hogy számos alapszakos diplomával rendelkező diákunk folytatta már rangos angol, svájci vagy német egyetemen a fizikatanulását. Ezekre az egyetemekre az ELTE-n a legjobb eredménnyel végző diákoknak jó esélye van bejutni az elmúlt évek statisztikái alapján.

Az ELTE-n végzett fizikusok nemzetközi léptékben is versenyképesek. A mesterképzésben diplomát szerzők nagy része sikeresen jut be doktori iskolába vagy itthon vagy külföldön, az Egyesült Államoktól kezdve Japánig számos nívós egyetemen. Az ELTE TTK-n folyó fizikai témájú kutatások sok esetben világszínvonalú kutatóhelyekkel történő együttműködésben valósulnak meg. Diákjaink eljuthatnak a svájci CERN részecskefizikai kutatócentrumba, vagy a LIGO amerikai gravitációshullám-detektor eredményeit elemezhetik. Számos további európai, kiemelkedő centrumba lehet Erasmus ösztöndíjat nyerni, ami az ELTE-s diákok felkészültségét jelentősen növeli és az itt elvégzett képzések jó alapot biztosítanak a kutatási kérdések sikeres megoldására, a komplex problémamegoldási képességek fejlesztésére és a későbbi kutatási vagy ipari fejlesztési állások elnyerésére.

A képzés további részleteiről az alábbi weblapon lehet információkat szerezni: `https://physics.elte.hu`.

Az ELTE TTK hallgatói élete vidám és szerteágazó. A Magyar Fizikus Hallgatók Egyesülete számos programot szervez a hallgatóinknak. Külföldi diákkonferenciákon vagy cseregyakorlatokon lehet részt venni, szabadidős programok és a fizika tárgyakban felkészítő programok szerepelnek a palettán. A fizika népszerűsítésében is jártasságot lehet szerezni, a közösségi programok is gyakran népszerűek. A fizika szakokhoz jól szervezett mentorprogram társul. Minden évfolyamon több kiképzett mentor segít a tárgyak felvétele körüli kérdésekben, az optimális egyetemi stratégiák megtalálásában, és átadják a felsőbb éves diákok által összegyűjtött tapasztalatokat. Az ELTE TTK fizika alapszakja jól szervezett, barátságos képzés. Diákjaink nagy százalékban választják az ELTE TTK-t a továbbtanulásra.

Az ELTE TTK fizika képzéseiről személyesen is tapasztalatot lehet szerezni a kari online nyílt hét keretében a Fizikai Intézet által szervezett programon: `https://ttk.elte.hu/nyilthet2021`.



# Fizika gyakorlatok megoldása

**G. 714.** *A Föld jégsapkái és gleccserei jelenleg mintegy* 30 000 000 km$^3$ *jeget tartalmaznak. Becsüljük meg, hogy nagyjából mennyivel emelkedne a tengerek és az óceánok vízszintje, ha ez a hatalmas mennyiségű jég mind elolvadna!*

(*3 pont*)

**Megoldás.** A jégsapkák és gleccserek a talajon vannak, tehát nem szorítanak ki vizet. A víz sűrűsége: 1 kg/dm$^3$, a jégé 0,9 kg/dm$^3$, tehát a megolvadt jég vizének térfogata a jéggel azonos tömegű víz térfogatának csak 90%-a. A Föld közelítőleg gömb alakú, sugara kb. 6400 km, és a felszínének 0,71 része tenger, illetve óceán.

A gömb felszíne: $A = 4r^2\pi$, ami itt körülbelül 510 millió km$^2$, ennek 71%-a, 360 millió km$^2$ a tengerek és óceánok felszínének nagysága. (Hasonló értéket kapunk, ha összeadjuk az óceánoknak a Négyjegyű függvénytáblázatokban is megtalálható méreteit.)

A 30 millió km$^3$ jégből 27 millió km$^3$ víz keletkezik. Ez összesen

$$\frac{27\ \text{millió km}^3}{360\ \ \text{millió km}^2} = 0{,}075\ \text{km} = 75\ \text{m}$$

vízszintemelkedésnek felel meg.

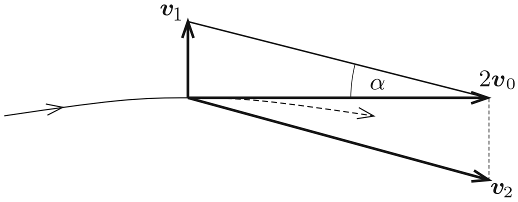
*Dancsák Dénes* (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 9. évf.)

72 dolgozat érkezett. Helyes 39 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 10, hiányos (1 pont) 20, hibás 3 dolgozat.

**G. 716.** *Egy ágyúból kilőtt gránát pályájának legfelső pontján* 100 m/s *sebességgel haladva két egyforma tömegű darabra robban szét. Az egyik darab* 50 m/s *sebességgel függőlegesen felfelé indul el. Milyen irányba és mekkora sebességgel indul el a másik darab? (A gránátban lévő robbanóanyag tömege elhanyagolható.)*

(*3 pont*)

**Megoldás.** Legyen a gránát tömege $2m$, a szétrobbant részek mindegyikének tömege pedig $m$. A gránát $\boldsymbol{v}_0$ sebességvektora a robbanás pillanatában vízszintes irányú és $v_0 = 100$ m/s nagyságú. A függőlegesen felfelé elinduló darab kezdősebessége: $v_1 = |\boldsymbol{v}_1| = 50$ m/s.



Jelöljük a másik darab kezdősebességét $\boldsymbol{v}_2$-vel, irányát (a vízszinteshez képest lefelé) pedig $\alpha$-val. A lendületmegmaradás törvénye szerint $2m\boldsymbol{v}_0 = m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2$, azaz $2\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$.

Az *ábráról* leolvasható, hogy

$$v_2^2 = (2v_0)^2 + v_1^2 = \left(200\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 + \left(50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 42\,500\ \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2},$$

azaz $v_2 \approx 206$ m/s, és a vízszintessel bezárt szöge:

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{v_1}{2v_0} = \operatorname{arctg}\frac{1}{4} \approx 14^\circ.$$

*Janecskó Patrícia* (Oberursel, Németország,
Frankfurt International School, 9. évf.)

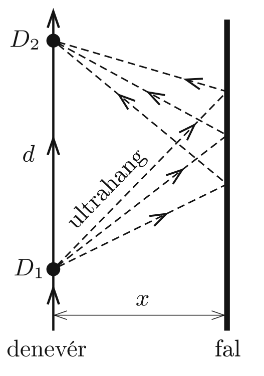
55 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 19, hiányos (1 pont) 7, hibás 8, nem versenyszerű 3 dolgozat.

**G. 717.** *Egy denevér a barlang falával párhuzamosan repül* 45,0 m/s *sebességgel. Egy rövid ultrahang jelet bocsát ki, melynek visszhangját* 0,120 s *múlva hallja meg. Milyen távol repül a denevér a faltól? A barlangban az ultrahang terjedési sebessége* 333 m/s.

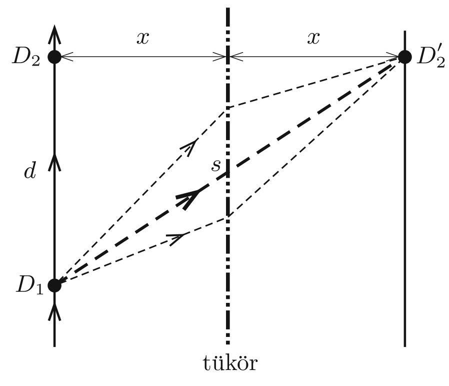
(*4 pont*)

**Megoldás.** Rajzoljuk le a denevér repülési útvonalát és a barlang falát (*1. ábra*). Az ultrahang a $D_1$ pontból indul ki, és a falról visszaverődve a $D_2$ pontban érkezik vissza a denevérhez. Az ábrán látható $d = D_1D_2 = 5{,}4$ m az a távolság, amit a denevér a megadott idő alatt a megadott sebességgel megtesz.

A hang a denevértől kiindulva különböző irányokban terjed, és a barlang faláról különböző irányokban verődik vissza. A denevér azt a hangot hallja meg legelőször, amelyik a legrövidebb idő alatt, tehát a legrövidebb utat megtéve jut vissza hozzá.




*1. ábra*




*2. ábra*

Tükrözzük a $D_2$ pontot a barlang falának síkjára (*2. ábra*). A különböző irányban haladó hanghullámok teljes útjának hossza megegyezik a $D_1$-et $D_2'$-vel összekötő, a fal (a tükör) síkjánál esetleg megtörő szakaszok együttes hosszával. Ezek közül a $D_1D_2'$ *egyenes* szakasz a legrövidebb, és ennek hossza az a távolság, amennyit az ultrahang a megadott $t$ idő alatt megtesz:

$$s = v_{\text{hang}} \cdot t = 333\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0{,}120\ \text{s} = 39{,}96\ \text{m}.$$

A $D_1D_2D_2'$ derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tétel alapján

$$2x = \sqrt{s^2 - d^2} \approx 39{,}6\ \text{m},$$

a denevér és a barlang falának távolsága tehát $x \approx 19{,}8$ m.

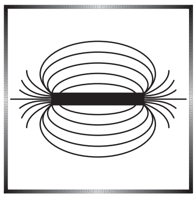
*Schneider Dávid* (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 10. évf.)

*Megjegyzések.* 1. Ugyanezt az eredményt úgy is megkaphatjuk, ha feltételezzük, hogy az ultrahang a síktükörhöz érkező fényhez hasonlóan verődik vissza, vagyis a beesési szög megegyezik a visszaverődés szögével. Ez akkor igaz, ha a barlang fala elegendően „sima", a sík felülettől legfeljebb az ultrahang hullámhosszának megfelelő mértékben tér csak el.

2. Sok versenyző indokolatlan pontossággal (pl. $x = 19{,}813\,344$ m-nek) adta meg a denevér útvonalának és a barlang falának távolságát. Ennek nem sok értelme van, hiszen a denevér fülének mérete és a barlang falának göcsörtössége sok-sok nagyságrenddel felülmúlja a megadott szám utolsó számjegyeinek megfelelő távolságokat. A fizikai mennyiségek kiszámított értékét annyi számjegy pontossággal szabad csak megadni, amennyit komolyan vehetünk. Ez a pontosság nem haladhatja meg a feladat szövegében megadott „bemenő adatok" pontosságát. (A szerk.)

81 dolgozat érkezett. Helyes 47 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 2, nem versenyszerű 18(!) dolgozat.
*Figyelem!* A KöMaL pontversenyei (a mérési verseny kivételével) *egyéni* versenyek!

## Fizika feladatok megoldása



**P. 5229.** *A súlytalanság állapotában egymástól $2L$ távolságra két, egyenként $Q$ nagyságú ponttöltést rögzítünk. A töltések között, a szimmetriatengely körül, a felezőmerőleges síkban $R$ sugarú körpályán kering egy $m$ tömegű, $Q$-val ellentétes előjelű $q$ ponttöltés.*

*a) Adjuk meg a keringési időt a pályasugár függvényében!*

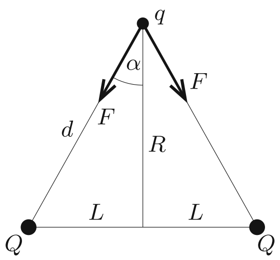
*b) Elemezzük az $R \ll L$ és az $R \gg L$ határeseteket!*

*c) Állapítsuk meg, melyik a nagyobb: a körpályán keringésnek, vagy ugyanezen testnek a körpálya egyik átmérője mentén történő, $R$ amplitúdójú rezgésének az ideje!*

*(A gyorsuló töltés sugárzásából és a légellenállásból adódó fékeződéstől eltekinthetünk.)*

(*6 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

**Megoldás.** *a*) Az *ábra* jelöléseit használva kiszámíthatjuk, hogy az $F$ erő nagysága:




$$F = k\frac{Qq}{d^2} = k\frac{Qq}{R^2+L^2}.$$

Az erők „vízszintes" komponensei kiejtik egymást, a „függőlegesek" pedig összeadódnak. Az ábrán $\alpha$-val jelölt szög koszinusza:

$$\cos\alpha = \frac{R}{d} = \frac{R}{\sqrt{R^2+L^2}}.$$

A körpályán egyenletesen keringő test mozgásegyenlete:

$$ma = F_{\text{eredő}} = 2F\cos\alpha = 2k\frac{QqR}{\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mivel az $m$ tömegű test állandó $v$ nagyságú sebességgel körpályán mozog, a keringési ideje kiszámolható a gyorsulásából:

$$T = \frac{2\pi R}{v} \qquad \text{és} \qquad a = \frac{v^2}{R},$$

ahonnan a keringési idő:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{4}}.$$

*b*) $R \ll L$ esetben a keringési idő kifejezése így közelíthető:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,L^{\frac{3}{2}}\left(\frac{R^2}{L^2}+1\right)^{\frac{3}{4}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,L^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{R^2}{L^2}\right).$$

Ha $R$-et elhanyagoljuk $L$ mellett, akkor

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,L^{\frac{3}{2}}.$$

Ebben a közelítésben a keringési idő *nem* függ a körpálya sugarától.

$R \gg L$ esetén

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,R^{\frac{3}{2}}\left(\frac{L^2}{R^2}+1\right)^{\frac{3}{4}} \approx 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,R^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{L^2}{R^2}\right).$$

Ha $L$-et elhanyagoljuk $R$ mellett, akkor

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2kQq}}\,R^{\frac{3}{2}}.$$

Ebben a közelítésben a keringési idő *nem* függ a $Q$ nagyságú töltések távolságától.

$c$) A rezgő test mozgásegyenlete:

$$ma(x) = 2F\cos\alpha = 2k\frac{Qqx}{\left(x^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ahol $a(x)$ a test pillanatnyi gyorsulását jelöli abban a helyzetben, ahol a test $x$ távolságban van $Q$ töltések felezőpontjától (vagyis az egyensúlyi helyzetétől).

Látható, hogy a mozgás *nem* egyenletesen gyorsuló, hiszen $a(x) \neq$ állandó, de *nem* is harmonikus rezgőmozgás, mert $a(x)$ nem arányos $x$-szel. A mozgás időbeli leírása meglehetősen bonyolult, elemi eszközökkel nem adható meg, és emiatt a rezgés idejét sem tudjuk pontosan kiszámítani. De erre nincs is szükségünk, a rezgésidőt csak a keringés idejével akarjuk összehasonlítani.

Tudjuk, hogy a mozgás során minden pillanatban $R^2 \geqslant x^2$ (és a mozgás fordulópontjait leszámítva határozott egyenlőtlenség áll fenn), ezért ha a mozgásegyenletben a tört nevezőjében az $x^2$-et $R^2$-tel helyettesítjük, akkor (az $x = \pm R$ pontokat leszámítva) az erőt megadó kifejezés kisebb lesz az eredetinél:

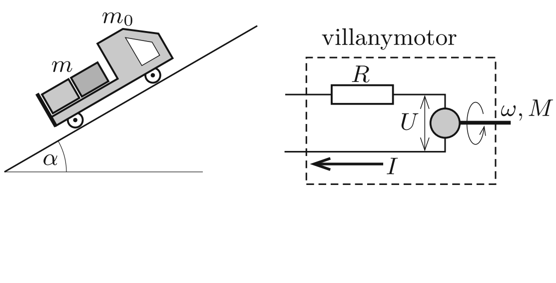
$$2k\frac{Qqx}{\left(x^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}} > 2k\frac{Qqx}{\left(R^2+L^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Az egyenlőtlenség jobb oldalának megfelelő erőtörvény egy harmonikus rezgőmozgást ír le, és ezen rezgés periódusideje éppen a körmozgáséval egyenlő. Mivel a tényleges rezgés „rugóállandója” ennél az állandónál nagyobb, a kialakuló rezgés periódusideje *kisebb* lesz, mint a keringésé.

*Bonifert Balázs* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4–5 pont) 9, hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.

**P. 5238.** *Egy $m_0$ tömegű elektromos játékautó $m$ tömegű teherrel a platóján állandó sebességgel halad felfelé egy $\alpha$ hajlásszögű lejtőn. Az $r$ sugarú kerekeket meghajtó villanymotort állandósult állapotban modellezhetjük egy $R$ ellenállással sorosan kapcsolt olyan áramköri elemmel, amelynek $U$ feszültsége a tengely $\omega$ szögsebességével arányos ($U = \gamma\omega$), az $I$ árama pedig a tengelyek által kifejtett $M$ forgatónyomatékkal arányos ($I = M/\gamma$). A kisautó egy olyan teleppel működik, amelynek üresjárati feszültsége $U_0$, belső ellenállása pedig $R_\mathrm{b}$.*



Adatok: $m_0 = 300$ g, $\alpha = 30°$, $r = 2$ cm, $\gamma = 1{,}2$ Vs, $U_0 = 4{,}5$ V, $R = 0{,}8$ Ω, $R_\mathrm{b} = 1{,}2$ Ω. *(A kerekek és a lejtő közötti tapadási súrlódás elég nagy, így az autó nem csúszik meg.)*

*a) Mekkora állandósult sebességgel halad a kisautó, ha* $m = 600$ g *teher van a platóján?*

*b) Mekkora m teher esetén lesz a legjobb a szállítás hatásfoka? (A hatásfokon a teher emelésére fordított energia és a telep által leadott energia hányadosát értjük.)*

*(5 pont)* Közli: *Olosz Balázs,* Pécs

**Megoldás.** *a)* A játékautóra a lejtővel párhuzamosan a nehézségi erő lejtővel párhuzamos komponense és a talajnál fellépő $S$ nagyságú tapadó súrlódási erő hat. A kiskocsi egyenletesen mozog, tehát

$$S = (m + m_0)g\sin\alpha.$$

Az $S$ erőnek a tengelyekre kifejtett teljes forgatónyomatéka $M = Sr$, ami a feladat szövege szerint $I\gamma$-val egyezik meg, vagyis az áramkörben folyó áram:

$$I = \frac{(m + m_0)gr\sin\alpha}{\gamma}. \tag{1}$$

A kerekek nem csúsznak meg, tehát $\omega r = v$, továbbá a feladat szövege szerint az ideális áramköri elemre jutó feszültség:

$$U = \gamma\omega = \frac{\gamma v}{r}.$$

A körben folyó áram:

$$I = \frac{U_0 - U}{R_\mathrm{b} + R} = \frac{U_0 - (v\gamma/r)}{R_\mathrm{b} + R}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletek összevetésével a játékautó sebessége kifejezhető és kiszámítható:

$$v = \frac{U_0 r}{\gamma} - \frac{(m + m_0)gr^2\sin\alpha\,(R_\mathrm{b} + R)}{\gamma^2} \approx 7{,}2\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}.$$

*b)* A hasznos (mechanikai) teljesítmény tetszőleges $m$ teher esetén:

$$P_\text{mech.} = mgv\sin\alpha = mg\sin\alpha\left(\frac{U_0}{\gamma}r - \frac{(m + m_0)gr^2\sin\alpha}{\gamma^2}(R_\mathrm{b} + R)\right),$$

az összes (elektromos) teljesítmény pedig

$$P_\text{el.} = U_0 I = U_0\frac{M}{\gamma} = \frac{U_0}{\gamma}(m + m_0)gr\sin\alpha.$$

A hatásfok:

$$\eta = \frac{P_{\text{mech.}}}{P_{\text{el.}}} = \frac{m}{(m+m_0)} - \frac{mgr\sin\alpha}{U_0\gamma}(R_{\text{b}}+R),$$

amit az adatok behelyettesítése után (a tömegeket kg egységekben számolva) így írhatunk:

$$\eta(m) = \frac{m}{m+0{,}3} - \frac{m}{27}.$$

Grafikus ábrázolással, deriválással, vagy algebrai egyenlőtlenség alkalmazásával megállapíthatjuk, hogy a legnagyobb hatásfok $m \approx 2{,}55$ kg-os teherhez tartozik, és a maximum értéke 80%.

*Bonifert Balázs* (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

12 dolgozat érkezett. Helyes Bonifert Balázs, Békési Ábel, Fekete András Albert, Kertész Balázs, Selmi Bálint, Somlán Gellért, Toronyi András és Viczián Anna megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 4 dolgozat.

**P. 5242.** *Egy felhőben* 2 mm *átmérőjű, gömb alakú esőcseppek lebegnek. Mekkora sebességgel áramlik felfelé az* 1 kg/m$^3$ *sűrűségű levegő a felhőben? (A közegellenállási erő a sebesség négyzetével arányos.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

**Megoldás.** Üljünk át a felfelé áramló levegővel együtt mozgó koordinátarendszerbe! Innen nézve az esőcseppek lefelé mozognak az álló levegőben, mégpedig épp azzal a $v$ sebességgel, amellyel az eredeti koordináta-rendszerben a levegő áramlik felfelé a felhőben. Mivel állandó sebességről van szó, így az erőegyensúly feltétele teljesül: $F_{\text{neh.}} = F_{\text{közeg.}}$, ahol

$$F_{\text{neh.}} = mg = \frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3 \pi \varrho_{\text{víz}}\, g$$

a $d$ átmérőjű esőcsepp súlya,

$$F_{\text{közeg.}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi k\, \varrho_{\text{levegő}}\, v^2$$

pedig az esőcseppre ható közegellenállási erő. ($k = 0{,}45$ a gömb alakú esőcsepp alaktényezője.) A fenti összefüggésekből kifejezhető az esőcsepp sebessége:

$$v = \sqrt{\frac{4d\,\varrho_{\text{víz}}\,g}{3\,k\,\varrho_{\text{levegő}}}} = \sqrt{\frac{4\cdot(2\cdot10^{-3}\ \text{m})\cdot(1000\ \text{kg/m}^3)\cdot(9{,}81\ \text{m/s}^2)}{3\cdot 0{,}45\cdot(1\ \text{kg/m}^3)}} \approx 7{,}6\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugyanekkora sebességgel áramlik felfelé a levegő az eredeti koordináta-rendszerből nézve, ha az esőcseppek mozdulatlanul lebegnek.

*Téglás Panna* (Révkomárom, Szlovákia, Selye János Gimn., 11. évf.)

90 dolgozat érkezett. Helyes 51 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 22, hiányos (1–2 pont) 15, hibás 2 dolgozat.

**P. 5243.** *Egy sportcsarnokban a kézilabdázók az indítást gyakorolják úgy, hogy a terem falával párhuzamosan futva a falhoz dobott labdát elkapják. Az egyik játékos a faltól 3 méterre, folyamatosan* 5 m/s *sebességgel szalad. A teremhez képest legalább mekkora sebességgel kell eldobnia a labdát ahhoz, hogy utána épp az eldobás magasságában tudja majd elkapni? A labda ütközését a fallal tekintsük tökéletesen rugalmasnak.*

(*5 pont*) Közli: *Kis Tamás,* Heves

**I. megoldás.** Jelöljük az eldobott labda sebességének a falra merőleges komponensét $v_1$-gyel, a függőleges komponensét $v_2$-vel, a játékos sebességét pedig $v_3$-mal, és legyen a játékos és a fal távolsága $d$.

A labda $t = d/v_1$ idő alatt éri el a falat. A falnak pattanó labda függőleges sebessége nulla kell legyen, ellenkező esetben a visszapattanó labda nem érhetné el a játékost. Eszerint $v_2 - gt = 0$, vagyis $v_2 = gt$. Másrészt $v_3$ a játékos futási sebességével (5 m/s-mal) egyezik meg, ha nem így lenne, a játékos nem kaphatná el a visszapattanó labdát.

A labda sebességének nagysága az eldobás pillanatában

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\frac{d^2}{t^2} + g^2t^2 + v_3^2}.$$

Mivel a számtani és a mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{t^2} + g^2t^2\right) \geqslant \sqrt{\frac{d^2}{t^2} \cdot g^2t^2} = gd,$$

az eldobott labda sebessége legalább

$$v_{\min} = \sqrt{2gd + v_3^2} \approx 9{,}2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

*Barkóczi Zsombor* (Heves, Eötvös J. Középisk., 10. évf.)

**II. megoldás.** Ahhoz, hogy a játékos elkapja a labdát, a labda sebességének a játékos mozgási irányával párhuzamos komponense meg kell egyezzen a játékos $v_0 = 5$ m/s-os sebességével.

A labda falra merőleges és függőleges irányú mozgásából adódó eredő $\boldsymbol{v}$ sebességének nagyságát jelöljük $v$-vel, a vízszintessel bezárt szögét pedig $\alpha$-val. Bontsuk fel $\boldsymbol{v}$-t egy vízszintes $v_1$ és egy függőleges $v_2$ komponensre:

$$v_1 = v\cos\alpha, \qquad \text{és} \qquad v_2 = v\sin\alpha.$$

A labda vízszintes ($v_1$ irányú) sebességkomponense a fallal való ütközéskor ellentétes irányúra fordul. A mozgás pályagörbéje (pontosabban: a pályagörbének a játékos mozgásirányára merőleges vetülete) egy „félbehajtott parabola”, és a mozgás ebben a síkban egy ferde hajítás. A vízszintes irányban megtett út $s = 2 \cdot 3\ \mathrm{m} = 6$ m, és a ferde hajítás teljes ideje $T = \frac{2v_2}{g}$, illetve a megtett út

$$s = v_1T = \frac{2v_1v_2}{g} = \frac{v^2 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Ebből kifejezhető $v$ értéke:

$$v=\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}},$$

illetve az eldobott labdának a teremhez viszonyított teljes sebessége:

$$v_{\text{labda}}=\sqrt{v^2+v_0^2}=\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}+v_0^2}.$$

Ez a kifejezés akkor lesz minimális, ha a gyökjel alatt a lehető legkisebb szám áll. Mivel $sg$ és $v_0$ rögzített, $v_{\text{labda}}$ minimuma $\sin 2\alpha$ maximumánál lesz, amikor $\sin 2\alpha=1$, vagyis $\alpha=45^\circ$. A legkisebb eldobási sebesség nagysága:

$$v_{\text{labda}}^{(\min)}=\sqrt{2gs+v_0^2}\approx 9{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

*Jánosik Máté* (Győr, Révai Miklós Gimn., 11. évf.)

58 dolgozat érkezett. Helyes 40 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 13, hibás 2 dolgozat.

**P. 5244.** *Egy bizonyos fajta elemi részecske szilárd anyagban mozogva a megtett úttal arányosan veszít az energiájából, és valahol megáll. A* $v_0=10^7$ m/s *kezdősebességű részecskék egy ritkább anyagba* $s_1=3$ cm, *egy sűrűbb anyagba pedig* $s_2=2$ cm *mélyen hatolnak be. Mekkora út megtétele után állnak meg az ugyanekkora kezdősebességű részecskék, ha a sűrűbb anyag* $d=1{,}5$ cm *vastag rétegén áthatolva a ritkább anyagba érnek?*

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

**I. megoldás.** A részecske akkor fog megállni, amikor a (mozgási) energiája nullára csökken. Számoljuk ki, hogy mekkora a részecske energiája akkor, amikor a sűrűbb anyagból átlép a ritkább anyagba. Mivel az energiavesztés arányos a megtett úttal, a kezdetben $E_0$ energiával rendelkező részecskére a következő aránypár írható fel:

$$\frac{E_0}{2\ \text{cm}}=\frac{E_{\text{vesztett}}}{1{,}5\ \text{cm}},\qquad \text{vagyis}\qquad E_{\text{vesztett}}=\frac{3}{4}E_0.$$

Eszerint a részecske $\frac14 E_0$ energiával érkezik a ritkább anyagba.

Ha a ritkább anyagban az $\frac14 E_0$ energiájú részecske $x$ út megtétele után áll meg, akkor ez az aránypár érvényes:

$$\frac{E_0}{3\ \text{cm}}=\frac{\frac14 E_0}{x},\qquad \text{azaz}\qquad x=\frac34\ \text{cm}.$$

Tehát a részecskék összesen $1{,}5\ \text{cm}+x=2{,}25$ cm út megtétele után állnak meg.

*Mihalik Bálint* (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

**II. megoldás.** Az $E_0=\frac{1}{2}mv_0^2$ kezdeti energiájú részecske energiája $s$ hosszúságú út megtétele után

$$E=E_0-A\,s$$

értékre csökken, ahol $A$ a szilárd anyagra jellemző állandó. Amikor a részecskék megállnak, a (mozgási) energiájuk nullára csökken. Ha a kétféle közegben ez $s_1$ és $s_2$ út megtétele után következik be, akkor

$$0=E_0-A_1s_1, \qquad \text{illetve} \qquad 0=E_0-A_2s_2,$$

tehát az anyagokra jellemző állandók:

$$A_1=\frac{mv_0^2}{2s_1} \qquad \text{és} \qquad A_2=\frac{mv_0^2}{2s_2}.$$

A feladatban szereplő mozgás két részre bontható. A 2-es jelű (sűrűbb) anyag $d$ vastag rétegen áthaladva a részecske energiája $E_1$ értékre csökken:

$$E_1=E_0-A_2d,$$

majd az 1-es jelű (ritkább) anyagban még $x$ hosszúságú utat fut be:

$$0=E_1-A_1x.$$

A fenti egyenletekből következik, hogy

$$0=E_0-A_2d-A_1x,$$

tehát

$$x=\frac{E_0-A_2d}{A_1}=\frac{E_0-\frac{mv_0^2d}{2s_2}}{\frac{mv_0^2d}{2s_1}}=\frac{\frac{mv_0^2}{2}-\frac{mv_0^2d}{2s_2}}{\frac{mv_0^2d}{2s_1}}=s_1\left(1-\frac{d}{s_2}\right).$$

A teljes megtett út

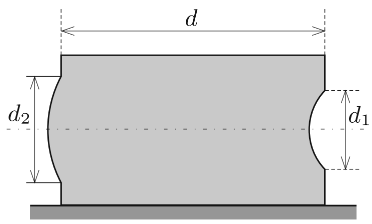
$$d+x=d+s_1-\frac{s_1d}{s_2}=\left(1{,}5+3{,}0-\frac{3{,}0\cdot 1{,}5}{2{,}0}\right)\ \text{cm}=2{,}25\ \text{cm}.$$

*Megjegyzés.* A részecske kezdősebessége lényegesen kisebb, mint a vákuumbeli fénysebesség (annak mindössze $\frac{1}{30}$ része), ezért jogosan használtuk a mozgási energia nemrelativisztikus képletét.

*Molnár Barnabás* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

77 dolgozat érkezett. Helyes 62 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

**P. 5247.** *Egy téglatest alakú akvárium két szemközti oldalán egy-egy kör alakú nyílás van, melyeket vékony, kis nyílásszögű gömbsüvegek fednek (lásd az* ábrát*). A gömbsüvegek közös optikai tengelye vízszintes. A befelé domborodó gömbsüveg görbületi sugara $r$, a kifelé domborulóé $2r$. A gömbsüvegek teteje alacsonyabban van, mint az akváriumban lévő, $n=4/3$-os törésmutatójú víz felszíne.*



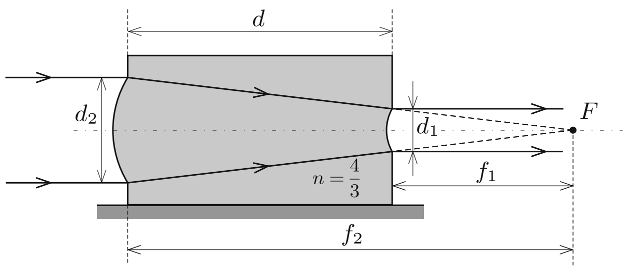

*a) Mekkora $d$ távolságra van egymástól az akvárium gömbsüvegeket tartalmazó két oldala, ha az egyik gömbsüvegre vízszintesen érkező, párhuzamos fénysugarak a másik gömbsüvegen át vízszintesen, párhuzamosan hagyják el az akváriumot?*

*b) Mekkora a két gömbsüveg $d_2$, illetve $d_1$ átmérőjének aránya, ha az akváriumba bármelyik gömbsüvegen át belépő, vízszintes fénynyaláb teljes egészében a másik gömbsüvegen lép ki?*

*c) Az optikai tengelyen, az akvárium közepén van egy piciny halacska. Hol látható ez az egyik, illetve a másik oldali gömbsüvegen át nézve?*

(*5 pont*) Közli: *Zsigri Ferenc,* Budapest

**Megoldás.** Az $R=2r$ görbületi sugarú gömbsüvegre érkező párhuzamos fénysugarak a határfelületen megtörve az $F$ pontban (a törőfelület jobb oldali fókuszpontjában) találkoznának, ha mindvégig a vízben haladnának (*1. ábra*). Ezek a fénysugarak az $r$ görbületi sugarú gömbsüvegen megtörve ismét párhuzamossá válnak, tehát a befelé domboruló felület jobb oldali fókuszpontja ugyancsak az $F$ pont.

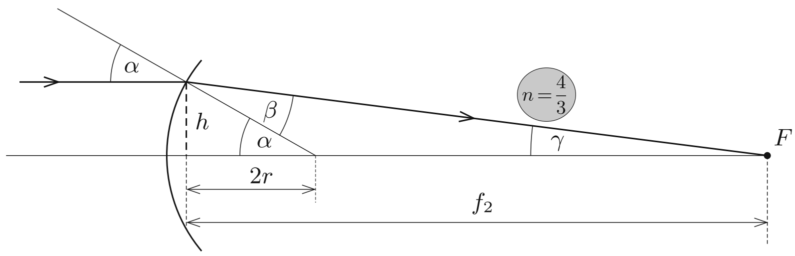



*1. ábra*

Ha sikerül meghatároznunk az $f_1$ és $f_2$ fókusztávolságokat, ezek segítségével már megkaphatjuk az akvárium szélességét és a gömbsüvegek átmérőjének arányát:

$$d=f_2-f_1, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{d_2}{d_1}=\frac{f_2}{f_1}.$$

Tekintsük azt a fénysugarat, amelyik az optikai tengelytől *kicsiny* $h$ távolságban haladva eléri a kifelé domboruló gömbsüveget, azon megtörve, majd az $n$ törésmutatójú vízben haladva $f_2$ távolságban érné el az optikai tengelyt (*2. ábra*).




*2. ábra*

A kicsiny beesési szögre igaz, hogy

$$\frac{h}{2r} = \operatorname{tg}\alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha,$$

a törési szögre pedig a törési törvény alapján:

$$\beta \approx \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} \approx \frac{\alpha}{n}.$$

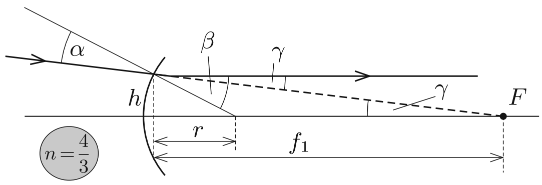
Fennáll továbbá, hogy a 2. ábrán látható $\gamma$ szögre

$$\frac{h}{f_2} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma, \qquad \text{valamint} \qquad \alpha = \beta + \gamma.$$

A fenti egyenletekből következik, hogy

$$f_2 = \frac{h}{\gamma} = \frac{h}{\alpha - \beta} = \frac{h}{\alpha}\,\frac{n}{n-1} = 2r\frac{n}{n-1} = 8r.$$

Ezek után határozzuk meg a víz felől az $r$ sugarú (befelé domborodó) gömbsüveghez érkező fénysugarakat (*3. ábra*). Ezek a sugarak az $F$ pont felé tartanak, de a fénytörés után párhuzamosan haladnak tovább.




*3. ábra*

A fénytörés törvénye szerint (kis szögek esetén)

$$\beta \approx \sin\beta = n\sin\alpha \approx n\alpha, \qquad \text{azaz} \qquad \beta = n\alpha,$$

valamint

$$\frac{h}{f_1} = \operatorname{tg}\gamma \approx \gamma = \beta - \alpha = \beta\left(1 - \frac{1}{n}\right) \approx \frac{h}{r}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Innen leolvashatjuk, hogy

$$f_1 = \frac{n}{n-1} r = 4r.$$

*a*) A fenti részeredményeket kihasználva kapjuk, hogy az akvárium szélessége: $d = f_2 - f_1 = 4r$.

*b*) Az 1. ábráról leolvasható, hogy a keresett arány:

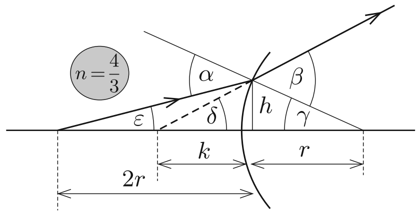
$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{f_2}{f_1} = 2.$$

*c*) Az akvárium közepénél elhelyezkedő piciny halacska mindkét görbült felülettől $2r$ távol van. A halacskából a bal oldali gömbsüveg felé kiinduló fénysugarak (mivel a halacska a középpontjában helyezkedik el) törésmentesen haladnak tovább, tehát a hal (virtuális) képe ugyanott keletkezik, ahol a halacska ténylegesen megtalálható.

Ha a jobb oldali gömbsüvegen keresztül nézzük a halat, a *4. ábra* jelöléseivel a következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\beta = n\alpha,$$

$$\beta = \delta + \gamma, \qquad \alpha = \varepsilon + \gamma.$$



*4. ábra*

Másrészt igaz, hogy

$$\varepsilon = \frac{h}{2r}, \qquad \delta = \frac{h}{k}, \qquad \gamma = \frac{h}{r}.$$

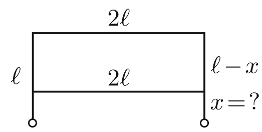
Ezekből kifejezhetjük a halacska (virtuális) képének a befelé domborodó gömbsüvegtől mért távolságát:

$$k = \frac{2r}{3n-2} = r.$$

*Somlán Gellért* (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

11 dolgozat érkezett. Helyes Tóth Ábel, Kertész Balázs, Fekete András Albert és Somlán Gellért megoldása. Kicsit hiányos (1–3 pont) 7 dolgozat.

**P. 5248.** *Egy $4\ell$ hosszúságú ellenálláshuzalt a két negyedelőpontjában derékszögben meghajlítottunk. Hol kell ehhez hozzákötni a $2\ell$ hosszúságú, ugyanebből a huzalból levágott vezetőt, ha azt akarjuk, hogy a huzalvégek között kialakuló eredő ellenállás megegyezzen egyetlen $2\ell$ hosszúságú vezető ellenállásával?*




(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

**Megoldás.** A huzal egyes darabjainak ellenállása arányos a hosszúságukkal: $R_L = k \cdot L$, ahol $R_L$ az $L$ hosszúságú huzal ellenállása. (A $k$ arányossági tényező mindegyik huzaldarabra ugyanakkora.).

Soros és párhuzamos kapcsolásokra vonatkozó képletek szerint az eredő ellenállás:

$$R_{\text{eredő}} = kx + \left(\frac{1}{2k\ell} + \frac{1}{k(\ell - x) + 2k\ell + k(\ell - x)}\right)^{-1} + kx = 2k\left(x + \ell\frac{2\ell - x}{3\ell - x}\right).$$

A feladat szövege szerint $R_{\text{eredő}} = R_{2\ell} = 2k\ell$, vagyis

$$2k\left(x + \ell\frac{2\ell - x}{3\ell - x}\right) = 2k\ell,$$

$$\ell\frac{2\ell - x}{3\ell - x} = \ell - x,$$

ahonnan az

$$x^2 - 3x\ell + \ell^2 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek egyik gyöke nagyobb mint $\ell$, ez *nem* megoldás; a másik gyök:

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\ell \approx 0{,}38\,\ell.$$

*Kozaróczy Csaba* (Miskolci Herman O. Gimn., 12. évf.)

72 dolgozat érkezett. Helyes 42 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 17, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 2 dolgozat.

**P. 5257.** Eötvös Loránd *a saját königsbergi tanáráról* – Franz Ernst Neumann (1798–1895) *– elnevezett fizikai törvényt az alábbi módon mutatta be. Két hosszú, egymással párhuzamosan és vízszintesen, a teremben magasan kifeszített fémhuzal végeit az egyik oldalon érzékeny galvanométerrel kötötte össze, a másik végükre egy, a huzalokra merőleges, mozgatható fémrudat helyezett. Ezután a huzalokon mint síneken végigcsúsztatta a rájuk helyezett, vízszintes fémrudat. A huzalok távolsága* 2 m *volt, a rúd végig a huzalokra merőleges maradt. Az akkori mérések szerint a földi mágneses térerősség iránya* $62^\circ$*-os szöget zárt be a vízszintessel, a mágneses térerősség vízszintes komponensének nagyságát pedig* 0,2 *oerstednek mérték az akkoriban használatos CGS rendszerben.*

*Mekkora sebességgel húzhatta Eötvös Loránd a fémrudat akkor, amikor megállapítható volt, hogy* 80 $\mu$V *feszültség jutott a galvanométerre?*

(*4 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

**Megoldás.** A Neumann-törvény szerint az $\ell$ hosszúságú, hosszirányra merőlegesen $v$ sebességgel mozgó fémrúd végei között $U = B\ell v$ nagyságú feszültség indukálódik, ahol $B$ a külső mágneses indukciónak a fémrúdra és a sebességre merőleges (esetünkben a függőleges) komponense.

Az oersted a mágneses térerősség régen használt egysége, SI-egységrendszerben 1 Oe $H = \frac{10^3}{4\pi}$ A/m mágneses térerősségnek felel meg (lásd pl. a Négyjegyű függvénytáblázatokban *az SI-mértékegységrendszeren kívüli mértékegységek* táblázatát). Vákuumban (mágneses szempontból a levegő is vákuumnak tekinthető) 1 oerstednek megfelelő mágneses indukcióvektor nagysága

$$\mu_0 H = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{A\,m}} \cdot \frac{10^3}{4\pi}\ \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = 1 \cdot 10^{-4}\ \frac{\mathrm{V\,s}}{\mathrm{m}^2} = 10^{-4}\ \mathrm{T}.$$

Ha a földi mágneses térerősség vízszintes komponense 0,2 Oe, akkor a mágneses indukcióvektor vízszintes összetevője $B_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ T, tehát a függőleges komponense

$$B = B_1 \cdot \mathrm{tg}\, 62^\circ = 3{,}76 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{T}.$$

A bemutatott kísérletben $\ell = 2$ m és $U = 80 \cdot 10^{-6}$ V értékek szerepeltek, a Neumann-törvény szerint tehát

$$v = \frac{U}{B\ell} = 1{,}06\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

sebességgel mozgathatta Eötvös Loránd a fémrudat.

*Több dolgozat alapján*

20 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 11, hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

## Fizikából kitűzött feladatok

**M. 401.** Készítsünk egy $m$ tömegű, $\ell$ hosszúságú, homogén tömegeloszlású, az egyik végén tengelyezett, vékony lécből fizikai ingát. ($m$ és $\ell$ szabadon választható értékek, amelyeket a mérés során nem változtatunk.)

*a*) Mérjük meg a kissé kitérített inga $T_0$ lengésidejét!

Ezután helyezzük át a forgástengelyt a léc egyik végétől $d$ távolságra, és rögzítsünk a léc másik végére egy pontszerűnek tekinthető, $M$ tömegű testet (például egy darab gyurmát). Ha megfelelően választjuk meg $M$ nagyságát, akkor az így kapott fizikai inga lengésideje az eredeti $T_0$-lal egyezik meg.

*b*) Mérjük meg, hogyan függ a $M/m$ tömegarány a $d/\ell$ távolságaránytól!

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka