

**B. 5148.** Az  $ABC$  háromszögnek  $C$ -nél derékszöge van. A háromszögbe írt kör a  $BC$  befogót a  $D$ , az  $AC$  befogót az  $E$  pontban érinti. A  $BC$  oldalhoz hozzáírt kör a  $BC$  szakaszt a  $G$  pontban érinti; hasonlóan, az  $AC$  oldalhoz hozzáírt kör az  $AC$  szakaszt a  $H$  pontban érinti. A  $DH$  és  $EG$  szakaszok metszéspontja  $M$ . Mutassuk meg, hogy a  $DGM$  és az  $EHM$  háromszögek köré írt körök  $M$ -től különböző metszéspontja a beírt körre esik.

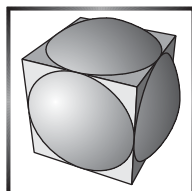
(6 pont)

**B. 5149.** Hányféleképpen lehet kitölteni egy  $6 \times 6$ -os táblázat mezőit az  $1, 2, \dots, 36$  számokkal úgy, hogy bárhogy választunk 6 mezőt, melyek közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy oszlopban, a kiválasztott mezőkbe írt számok összege mindig ugyanannyi legyen?

(6 pont)

**Beküldési határidő: 2021. február 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>



**Az A pontversenyben kitűzött  
nehezebb feladatok  
(791–792.)**

**A. 791.** Adva van egy villanykörte, amely piros, zöld vagy kék színnel tud világítani, és háromállású kapcsolók egy végtelen  $H$  halmaza, ahol mindegyik kapcsolónál meg van jelölve a három állás a piros, kék és zöld színekkel. A következőket tudjuk még:

*i)* Mindegyik kapcsolóállásnál egyértelműen meghatározott színnel világít a villanykörte.

*ii)* Ha mindegyik kapcsoló ugyanarra az adott színre van állítva, a villanykörte is az adott színnel világít.

*iii)* Ha két kapcsolóállásnál mindegyik kapcsolóra igaz, hogy különböző állásban van, akkor a két állásnál a villanykörte más színnel világít.

Készítsük el a  $H$  bizonyos részhalmazából álló  $U$  halmazt a következő módon: minden kapcsolóállásnál nézzük meg a villanykörte színét, és tegyük bele az  $U$  halmazba azon kapcsolók halmazát, melyek állása megegyezik a villanykörte színével.

Bizonyítsuk be, hogy  $U$  ultraszűrőt alkot  $H$ -n.

( $U$  ultraszűrő  $H$ -n, ha teljesíti a következőket:

*a)* Az üres halmaz nincs benne  $U$ -ban.

*b)* Ha két halmaz benne van  $U$ -ban, a metszetük is benne van  $U$ -ban.

*c)* Ha egy halmaz benne van  $U$ -ban, minden nála bővebb  $H$ -beli részhalmaz is benne van  $U$ -ban.

d) Egy halmaz és  $H$ -beli komplementere közül pontosan az egyik van  $U$ -ban.)  
Lásd még az **N. 35.\*** feladatot az 1994-es évfolyam májusi számából.

**A. 792.** Legyen  $p \geq 3$  prímszám és  $0 \leq r \leq p - 3$ . Legyenek  $x_1, x_2, \dots, x_{p-1+r}$  egész számok, melyekre  $\sum_{j=1}^{p-1+r} x_j^k \equiv r \pmod{p}$  minden  $1 \leq k \leq p - 2$ -re.

Mik lehetnek az  $x_1, x_2, \dots, x_{p-1+r}$  számok maradékai modulo  $p$ ?

Javasolta: *Matolcsi Dávid* (Budapest)

**Beküldési határidő: 2021. február 10.**

**Elektronikus munkafüzet:** <https://www.komal.hu/munkafuzet>

✱

## Informatikából kitűzött feladatok



**I. 526.** András szereti az egész számokat és a számrendszereket. Azon töprengett, hogy vannak-e olyan számok, amelyeket több különböző alapú számrendszerben felírva a számjegyek összege ugyanaz az érték. Hamar rájött, hogy például az 1 szám felírása mindegyik számrendszerben 1, tehát a számjegyek összege is azonos. A 2 szám alakja 2-es számrendszerben 01, minden más számrendszerben 2, vagyis a számjegyek összege egy kivétellel itt is 2. Gondolta, hogy az egyjegyű számoknál ez nem olyan érdekes tulajdonság, ezért a többjegyűekkel kezdett foglalkozni. Sokat számolt, de rájött, hogy a témakört alaposabban csak számítógépes programmal tudná megvizsgálni.

Segítsünk Andrásnak. Készítsünk programot, amely megadja azokat a tízes számrendszerben legalább kétjegyű, de legfeljebb hatjegyű pozitív egészeket, amelyeknek a lehető legtöbb számrendszerben azonos a számjegyeinek összege. A program a kimenet első sorába írja ki, hogy legfeljebb hány számrendszerben azonosak a számok, majd a következő sorba növekvő sorrendbe írja ki ezeket a számokat. A program csak a kettestől a tízesig terjedő számrendszerekben vizsgálódjon.

Beküldendő egy `i526.zip` tömörített állományban a forrásprogram és egy rövid dokumentáció, amely megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben fordítható.

**I. 527 (É).** Egy társaságban többen vannak, akik különböző helyekről ismerik egymást, de vannak szép számmal olyanok is, akik még sohasem találkoztak. Az ismeretségek kölcsönösek.

\*<http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=FelHivatkoz&id=41643>