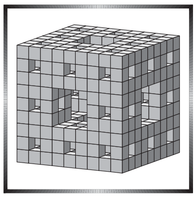
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5142–5149.)



B. 5142. Egy focibajnokság egy csoportjában négy csapat szerepelt. A csoportban mindenki mindenkivel egyszer játszott. Győzelemért 3, döntetlenért 1, vereségért 0 pont járt. A két legtöbb pontot összegyűjtő csapat továbbjutott, a másik kettő kiesett. Pontegyenlőség esetén sorsolással döntöttek. Melyek azok a p számok, amelyekre előfordulhat, hogy egy továbbjutónak és egy kiesőnek egyaránt p pontja lett?

(*3 pont*)

B. 5143. Oldjuk meg a $16x^2+9x+117=24x\sqrt{x+13}$ egyenletet a valós számok körében.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5144. Az $ABCD$ konvex négyszög területe t, egy belső pontja O. Mutassuk meg, hogy

$$2t \leqslant OA^2+OB^2+OC^2+OD^2.$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

(*3 pont*)

B. 5145. Mutassuk meg, hogy azoknak az n hosszúságú nullákból és egyesekből álló sorozatoknak a száma, amelyekben pontosan k-szor fordul elő, hogy 0 után 1 következik, éppen $\binom{n+1}{2k+1}$.

(*4 pont*) (*Angol olimpiai válogatóverseny feladata*)

B. 5146. Adott egy egységnyi térfogatú T téglatest, és belsejében egy M pont. Tükrözzük az M pontot a téglatest lapsíkjaira, a kapott 6 képpont konvex burka legyen D. Határozzuk meg a $T\cap D$ test térfogatát.

(*5 pont*)

B. 5147. Legyen $k>1$ pozitív egész szám. Megadható-e a pozitív egészek olyan

a) tetszőlegesen nagy, véges

b) végtelen

részhalmaza, melyben bármely k elem legnagyobb közös osztója 1-nél nagyobb, továbbá bármely $k+1$ elem legnagyobb közös osztója 1?

(*5 pont*) Javasolta: *Mészáros Gábor* (Budapest)

B. 5148. Az ABC háromszögnek C-nél derékszöge van. A háromszögbe írt kör a BC befogót a D, az AC befogót az E pontban érinti. A BC oldalhoz hozzáírt kör a BC szakaszt a G pontban érinti; hasonlóan, az AC oldalhoz hozzáírt kör az AC szakaszt a H pontban érinti. A DH és EG szakaszok metszéspontja M. Mutassuk meg, hogy a DGM és az EHM háromszögek köré írt körök M-től különböző metszéspontja a beírt körre esik.

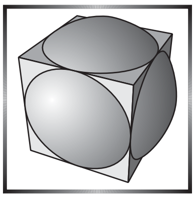
(*6 pont*)

B. 5149. Hányféleképpen lehet kitölteni egy 6×6-os táblázat mezőit az $1, 2, \ldots, 36$ számokkal úgy, hogy bárhogy választunk 6 mezőt, melyek közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy oszlopban, a kiválasztott mezőkbe írt számok összege mindig ugyanannyi legyen?

(*6 pont*)

Beküldési határidő: 2021. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (791–792.)

A. 791. Adva van egy villanykörte, amely piros, zöld vagy kék színnel tud világítani, és háromállású kapcsolók egy végtelen H halmaza, ahol mindegyik kapcsolónál meg van jelölve a három állás a piros, kék és zöld színekkel. A következőket tudjuk még:

i) Mindegyik kapcsolóállásnál egyértelműen meghatározott színnel világít a villanykörte.

ii) Ha mindegyik kapcsoló ugyanarra az adott színre van állítva, a villanykörte is az adott színnel világít.

iii) Ha két kapcsolóállásnál mindegyik kapcsolóra igaz, hogy különböző állásban van, akkor a két állásnál a villanykörte más színnel világít.

Készítsük el a H bizonyos részhalmazaiból álló U halmazt a következő módon: minden kapcsolóállásnál nézzük meg a villanykörte színét, és tegyük bele az U halmazba azon kapcsolók halmazát, melyek állása megegyezik a villanykörte színével.

Bizonyítsuk be, hogy U ultraszűrőt alkot H-n.

(U ultraszűrő H-n, ha teljesíti a következőket:

a) Az üres halmaz nincs benne U-ban.

b) Ha két halmaz benne van U-ban, a metszetük is benne van U-ban.

c) Ha egy halmaz benne van U-ban, minden nála bővebb H-beli részhalmaz is benne van U-ban.