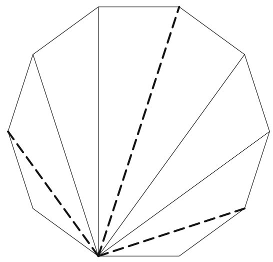
c) Az átlók száma $\frac{10\cdot 7}{2}=35$. Az *ábrán* szaggatott vonallal berajzoltuk, hogy az egy csúcsból húzható 7 átlóból 3 olyan, ami „rövid" vagy „hosszú". A „rövid" vagy „hosszú" élek száma összesen $\frac{10\cdot 3}{2}=15$, ezért a többi él száma 20.

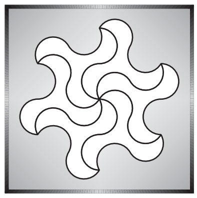


$$P(\text{lesz hosszú vagy rövid}) =$$

$$= 1 - P(\text{nincs benne egyik sem}) = 1 - \frac{\binom{20}{5}}{\binom{35}{5}}.$$

A keresett valószínűség kb. 0,9522, ami normálalakban megadva $9{,}522\cdot 10^{-1}$.

Fridrik Richárd
Szeged



Matematika feladat megoldása

B. 5049. *Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész* (a,b) *pár létezik, amelyre*

$$2019<\frac{2^a}{3^b}<2020.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

I. megoldás. A bizonyítás során többször fogjuk használni a következő lemmát: Ha $0<r<1$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$.

Először találunk egy olyan (s,t) (pozitív egészekből álló) számpárt, amelyre $1>X:=\frac{2^s}{3^t}>\frac{2019}{2020}$. Ilyen például ($s=1054$, $t=665$), ugyanis 10-es alapú logaritmusokra áttérve:

$$0>1054\lg 2-665\lg 3\approx 317{,}28561-317{,}28563=-0{,}00002>$$
$$>\lg 2019-\lg 2020\approx 3{,}3051-3{,}3054=-0{,}0003.$$

Ennek segítségével vegyük 2-nek tetszőlegesen nagy, 2020-nál nagyobb hatványait – legyen egy ilyen hatvány 2^c – és ezt szorozzuk meg X-nek egy olyan k-adik hatványával, amelyre $2019<X^k\cdot 2^c<2020$. Ilyen k biztosan létezik, hiszen lemmánkat használva egyrészt $\lim\limits_{n\to\infty} X^n=0$, azaz rögzített c-re

$$2^c\cdot\lim_{n\to\infty} X^n=0;$$

másrészt a $(2019, 2020)$ intervallumot nem ugorhatja át X^k, hiszen akkor

$$2020 \leqslant X^k, X^{k+1} \leqslant 2019,$$

és így $X \leqslant \frac{2019}{2020}$ lenne, ami ellentmondás.

Nyilván különböző c számokra X-nek különböző k-adik hatványai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy $2^c \cdot X^k \in (2019, 2020)$, ezért az így kapott törtek nevezőjében a 3 mindig más hatványon fog szerepelni. Tehát valóban találtunk végtelen sok $\frac{2^a}{3^b}$ alakú számot 2019 és 2020 között.

Kocsis Anett (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

II. megoldás. Elsőként megjegyezzük, hogy $\log_2 3$ irracionális. Ellenkező esetben ugyanis $\log_2 3 = a/b$, valamilyen a és b pozitív egészekre, melyeknek legnagyobb közös osztója 1. Ekkor $= 2^{a/b} = 3$, azaz $2^a = 3^b$. Ennek az egyenletnek az egyetlen egész megoldása $a = b = 0$, ami nyilván nem jó, tehát $\log_2 3$ valóban irracionális.

Írjuk ezután a kívánt $2019 < \frac{2^a}{3^b} < 2020$ egyenlőtlenséget

$$a - \log_2 2020 < b \log_2 3 < a \ - \log_2 2019$$

alakba.

Belátjuk, hogy a (törtrészekből álló) $f_i := \{i \log_2 3\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sorozatnak végtelen sok eleme található bármely $[x; y] \subset (0; 1)$ intervallumon. Először megjegyzendő, hogy minden $i < j$ indexpárra $f_i \neq f_j$. Ellenkező esetben ugyanis $(j - i) \log_2 3 = z$ egész szám lenne, ellentmondva $\log_2 3$ irracionalitásának. Megmutatjuk, hogy bármilyen kicsi ε-ra létezik olyan (A, B) egész számpár, amelyre $|f_A - f_B| < \varepsilon$. Legyen $1/n < \varepsilon$, és osszuk fel a $[0; 1]$ intervallumot n egyenlő részre, majd vegyük az f_j sorozat első $n + 1$ elemét. Osztópontokra egyikük sem eshet, mivel az azt jelentené, hogy $\log_2 3$-nak egy egész számszorosa racionális. Így viszont a skatulyaelv miatt van köztük kettő ugyanabban a részintervallumban, tehát egymástól $1/n$-nél kisebb távolságra. Ha f_A és f_B ilyen $(A < B)$, akkor tekintsük a $g_i = f_{1+i\cdot(B-A)}$ sorozatot; ez $f_A - f_B$ előjelétől függően egy $\pm\varepsilon'$ (ahol $0 < \varepsilon' < \varepsilon$) differenciájú számtani sorozat modulo 1. Ekkor az $[x; y]$ intervallumban legalább $\frac{y-x}{\varepsilon'} - 1$ értéke lesz a g_j sorozatnak, ami ε (és így ε') csökkentésével tetszőlegesen nagy lehet. Így az $\big(1 - \{\log_2 2020\}; 1 - \{\log_2 2019\}\big)$ intervallumon is végtelen sok eleme van f_i-nek. Ha $f_b = \{b \log_2 3\}$ ilyen, akkor

$$1 - \{\log_2 2020\} < \{b \log_2 3\} < 1 - \{\log_2 2019\}.$$

Mindkét egyenlőtlenségben mindkét oldalhoz $[b \log_2 3]$ hozzáadásával:

$$[b \log_2 3] + 1 - \{\log_2 2020\} < b \log_2 3 < [b \log_2 3] + 1 - \{\log_2 2019\}.$$

Figyelembe véve, hogy $[\log_2 2019] = [\log_2 2020] = 10$, válasszuk a értékét $a = 11 + [b \log_2 3]$-nak. Ekkor a fenti egyenlőtlenségek éppen a kívánt

$$a - \log_2 2020 < b \log_2 3 < a - \log_2 2019$$

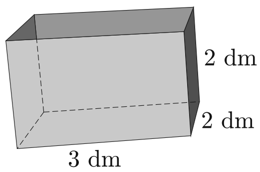
alakot öltik, vagyis az a, b pár egy megoldását adja az eredeti egyenlőtlenségnek.

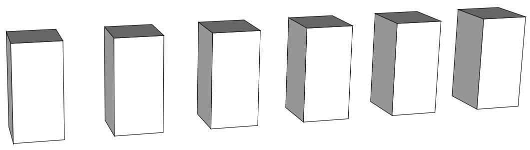
Noszály Áron (Debreceni Fazekas M. Gimn., 12. évf.)

54 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 19 versenyző: Argay Zsolt, Beke Csongor, Biczó Benedek, Bukva Dávid, Csizmadia Miklós, Fleiner Zsigmond, Füredi Erik Benjámin, Győrffi Ádám György, Hervay Bence, Jánosik Áron, Jánosik Máté, Kocsis Anett, Mácsai Dániel, Nádor Benedek, Noszály Áron, Stomfai Gergely, Terjék András József, Tiderenczl Dániel, Zempléni Lilla. 4 pontos 7, 3 pontos 6, 2 pontos 5, 1 pontos 6, 0 pontos 11 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (679–683.)

K. 679. Peti még 3 éves korában kapta meg hat darabból álló építőjátékát, melyben minden építőelem téglatest alakú. Az elemek mérete 1 dm $\times$ 1 dm $\times$ 2 dm. A tartódoboz belső mérete 3 dm $\times$ 2 dm $\times$ 2 dm és minden oldala más színű. Hányféle különböző elrendezésben pakolhatja be Peti a hat elemet a dobozába, ha az építőelemek ugyanolyan színűek és nem különböztetjük meg őket? (A dobozból nem lóghat ki egy építőelem sem.)





K. 680. Egy kocka négy lapját befestettük pirosra, majd a kockát szétvágtuk 125 darab egyforma kiskockára. Ezek között hány olyan lehet, amelynek egyik lapja sem festékes?

K. 681. Határozzuk meg, hány olyan háromszög van, melyben az oldalak hossza centiméterben mérve egész szám, és a leghosszabb oldala 2021 cm hosszú (lehet több ilyen oldala is).

K. 682. Háromféle különböző számkártyánk van, mindegyikből elegendően sok. A számkártyákon egy-egy számjegy van. Ezekből a számkártyákból elkészítjük az összes lehetséges különböző pozitív négyjegyű számot. Ezeknek a négyjegyű számoknak az összege 689 931. Melyik az a három számjegy, ami a számkártyákon szerepel?

K. 683. A körbe írható $ABCDEFG$ hétszögben az $ABC\sphericalangle$, $CDE\sphericalangle$ és $EFG\sphericalangle$ szögek összege nagyobb 450°-nál. Mutassuk meg, hogy a köré írt kör középpontja nem lehet sem a hétszögön belül, sem annak valamelyik oldalán.

(*The University of Stirling, school mathematics competition, 1983*)

Beküldési határidő: 2021. február 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`