A 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

Második nap*

4. feladat. *Adott egy $n>1$ egész szám. Egy hegynek egy lejtőjén n^2 állomás van, csupa különböző magasságon. Két felvonótársaság, A és B mindegyike k felvonót üzemeltet; mindegyik felvonóval egy állomásról egy magasabban fekvő állomásra lehet eljutni (közbülső megállás nélkül). Az A társaság k felvonójának k különböző kezdőpontja és k különböző végpontja van, és magasabbról induló felvonó magasabbra is érkezik. Ugyanezek a feltételek teljesülnek B-re. Azt mondjuk, hogy egy felvonótársaság* összeköt *két állomást, ha a lejjebbi állomásról indulva el lehet jutni a feljebbire az adott társaság egy vagy több felvonóját használva (nincs megengedve semmilyen más mozgás az állomások között).*

Határozzuk meg a legkisebb olyan pozitív egész k számot, amelyre biztosak lehetünk abban, hogy van két olyan állomás, amelyet mindkét felvonótársaság összeköt.

Nagy Nándor megoldása. Először is meg fogjuk mutatni, hogy $k=n(n-1)$ esetén még léteznek olyan A és B felvonóparkok, amelyek nem kötnek össze mindketten egy állomáspárt. Ehhez számozzuk $[1,n^2]$ egész számaival az állomásokat, magasságuk szerint növekvő sorrendben. Tekintsük a következő szabályt: Az A társaság csupán szomszédos sorszámú állomások között létesít járatot, és pontosan akkor, ha a kisebbik sorszám nem osztható n-nel. Ezzel szemben a B társaság bármely két olyan állomás között közlekedik, amelyek sorszámának különbsége n. Mivel mindkét társaság csak egy adott hosszúságú felvonót üzemeltet, ezért magasabb állomásról magasabb célra visz egy adott társaság liftje. Elmondható az is, hogy az A társaság által összekötött állomások távolsága szükségszerűen kisebb, mint n, míg a B társaság által összekötött állomások távolsága osztható n-nel, így legalább n.

Ezután megmutatjuk, hogy $k=n(n-1)+1$ esetén már biztosan van olyan állomáspár, amelyet az A és B is összeköt. Tekintsük azt a két irányított gráfot, amelynek csúcsai az állomások, élei pedig az A illetve B társaság liftjeinek felelnek meg.

Mivel társaságon belül minden kezdő- és végpont eltérő, ezért minden csúcs be- és kifoka is maximum 1 lehet, ezért tudhatjuk, hogy az így képződő gráf egyértelműen láncokra osztható, amelyek akár egyeleműek is lehetnek. (Az előbbi példában 1, 2, …, n például az A gráfjában láncot alkot.) Tegyük fel indirekten, hogy még így sem lesz közös összekötött pár: A körmentesség miatt, ha n^2 csúcsra felveszünk n^2-n+1 élet (mondjuk az A társaság felvonóit), akkor ezzel $n-1$ darab összefüggő komponens lesz a gráfban, ami jelen esetben mind lánc. Azonban most B láncait tekintve elmondható, hogy egyikben sem lehet több mint $n-1$ csúcs, hiszen ha B-ben lenne legalább n állomást tartalmazó lánc, akkor a skatulya-elv miatt

*Az első nap feladatainak megoldását a decemberi számban közöltük.

létezne benne kettő olyan, amelyek A gráfjában azonos láncba tartoznak. Logikai szimmetria miatt az is teljesül, hogy B-ben összesen $n-1$ lánc van, vagyis A láncai sem tartalmazhatnak $n-1$-nél több csúcsot. Így azonban A gráfjában az összes lánc összes állomását véve legfeljebb csak $(n-1)^2$ állomást számláltunk meg, ami kevesebb, mint n^2; ellentmondás. Tehát k legkisebb megfelelő értéke $n(n-1)+1$.

5. feladat. *Adott egy kártyapakli, amely $n>1$ kártyából áll. Mindegyik kártyára egy pozitív egész szám van felírva. A pakli olyan, hogy bármely két kártyán lévő szám számtani közepe egyúttal a mértani közepe is néhány (egy vagy több) kártyán lévő számnak.*

Milyen n-ekre következik ebből, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők?

Beke Csongor megoldása. Legyen d a kártyákon lévő számok legnagyobb közös osztója. Készítsünk egy másik kártyapaklit, amiben minden kártyára az eredeti kártyán lévő szám d-ed részét írjuk. Mivel a számtani és mértani közepek ezzel mind d-ed részükre csökkentek, ha az eredeti pakli megfelelő volt, akkor az új is, valamint az új pakilban a számok legnagyobb közös osztója 1.

Tegyük fel, hogy az eredeti palkiban nem volt mindegyik kártyán ugyanaz a szám. Ekkor az új kártyapakliban nem mindegyik szám 1, ezért a legnagyobb kártyán lévő számnak van prímosztója. Legyen a a legnagyobb szám, p egy prímosztója. Legyen b a legnagyobb olyan szám a kártyákon, ami nem osztható p-vel; ilyen kártya létezik, mivel a kártyák legnagyobb közös osztója 1.

Az a és b számok számtani közepét is fel lehet írni a kártyákon lévő számok mértani közepeként, ezért:
$$\frac{a+b}{2}=\sqrt[k]{P},$$
ahol a P szám k darab kártyán szereplő szám szorzata. Ha nem szerepel b-nél nagyobb szám ezek között, akkor $\sqrt[k]{P}\leqslant b<\frac{a+b}{2}$, mivel $a>b$. Ezért a P szorzatban van b-nél nagyobb tényező, azaz P osztható p-vel.
$$(a+b)^k=2^k\cdot P.$$
A jobb oldal osztható p-vel, ezért a bal oldal is, ami csak úgy lehet, ha $a+b$ is osztható p-vel, mivel p prím. Itt a osztható p-vel, b pedig nem, ezért az összegük nem osztható p-vel, azaz ellentmondást kaptunk. Tehát tetszőleges $n>1$-re következik, hogy a kártyákon álló számok mind egyenlők.

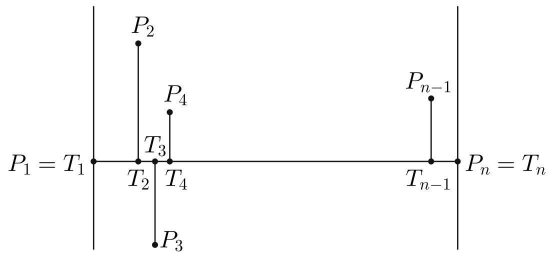
6. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan c pozitív konstans, amellyel igaz a következő állítás:*

Tekintsünk egy $n>1$ egész számot és egy n pontból álló $\mathcal{S}$ halmazt a síkban úgy, hogy $\mathcal{S}$ bármely két különböző pontjának távolsága legalább 1. Ebből következik, hogy van olyan, $\mathcal{S}$-et szétválasztó ℓ egyenes, hogy $\mathcal{S}$ bármely pontjának ℓ-től való távolsága legalább $cn^{-1/3}$.

(Egy ℓ egyenes szétválasztja *pontoknak egy $\mathcal{S}$ halmazát, ha valamely, $\mathcal{S}$-nek két pontját összekötő szakasz átmetszi ℓ-et.)*

Megjegyzés. *Gyengébb eredményre, amelyben $cn^{-1/3}$ helyett $cn^{-\alpha}$ áll, járhat részpontszám az $\alpha>1/3$ konstans értékétől függően.*

Tóth Balázs megoldása. Legyen d az S ponthalmaz átmérője, azaz a legnagyobb távolság, ami két S-beli pont között előáll. Legyen az egyik átmérő két végpontja P_1 és P_n. Állítsunk merőlegest a P_1P_n szakaszra P_1-ben, és P_n-ben is. S minden pontja ezen két egyenes által meghatározott sávba fog esni, hiszen ha a sávon kívül lenne pont, annak távolsága vagy P_1-től vagy P_n-től nagyobb lenne d-nél. A P_1-ben állított merőleges egyenest kezdjük el párhuzamosan tolni, amíg el nem érjük a P_n-ben állított merőlegest. A tolás közben az egyenes minden S-beli ponton át fog menni. Számozzuk meg S-nek a P_1-től és P_n-től különböző pontjait P_2-től P_{n-1}-ig úgy, hogy amelyiken később halad át az egyenes, annak legyen nagyobb a sorszáma. (Hogyha két ponton ugyanakkor halad át az egyenes akkor mindegy, hogy milyen sorrendben számozzuk meg őket.) Legyen P_i-nek a P_1P_n szakaszra vett merőleges vetülete T_i.



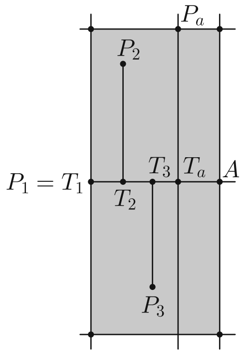
Jelöljük d_i-vel a T_iT_{i+1} szakasz hosszát, vagy pedig legyen $d_i = 0$, hogyha ezen két pont egybeesik. Ekkor $d_1 + d_2 + \ldots + d_{n-1} = T_1T_n = P_1P_n = d$ teljesülni fog, mivel a P_1P_n szakaszon sorban vannak a T_i pontok. Legyen x a $d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}$ számok maximuma. Hogyha $x = d_j$, akkor a T_jT_{j+1} szakasz felezőmerőlegese olyan egyenes lesz, ami szétválasztja S-et, mivel P_1 és P_n különböző oldalán van, és minden S-beli ponttól legalább $\frac{x}{2}$ távolságra van: ha ugyanis egy S-beli pont közelebb lenne hozzá, akkor annak a merőleges vetülete P_1P_n-re a T_jT_{j+1} szakasz belsejébe esne, ami nem lehet, mivel sorban szerepelnek a T_i pontok a P_1P_n szakaszon.

Ezek szerint elég lenne belátni, hogy $x \geqslant cn^{-\frac{1}{3}}$ valamilyen c konstansra.

Mivel a d hosszú P_1P_n szakaszt $n-1$ szakaszra osztottuk fel, és ezek közül vettük a maximális hosszt, így a skatulyaelv miatt $x \geqslant \frac{d}{n-1} \geqslant \frac{d}{n}$ teljesülni fog.

Vegyük a P_1P_n szakaszon azt az A pontot, amelyre $P_1A = 1$, és vizsgáljuk azt a sávot, amit a P_1P_n-re P_1-ben, illetve A-ban állított merőleges meghatároz. Legyenek az ebbe a sávba (vagy a határára) eső S-beli pontok $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Mivel mindkét egyenes merőleges P_1P_n-re, így a pontok számozása miatt valóban az első k pont fog a sávba esni valamilyen $1 \leqslant k \leqslant n$-re.

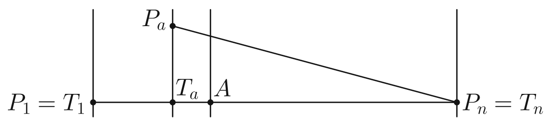
A P_1T_{k+1} távolság nagyobb, mint 1, hiszen P_{k+1} és így T_{k+1} is kívül esik a sávból. Ugyanakkor $P_1T_{k+1} = d_1 + d_2 + \ldots + d_k \leqslant kx$, tehát $1 < kx$ teljesül, azaz $\frac{1}{x} < k$. T_{k+1} csak akkor nem létezik, hogyha $k = n$, ami viszont csak akkor lehet, ha $P_1P_n = 1$, azaz $d = 1$, ekkor viszont $n \leqslant 3$ kell, hogy teljesüljön, azonban kis n-re nem szükséges vizsgálni az állítást, mert c-t választhatjuk olyan kicsire, hogy valamilyen N korlátra $n < N$ esetén mindig teljesüljön $x \geqslant cn^{-\frac{1}{3}}$, hisz tudjuk, hogy $x \geqslant \frac{d}{n} \geqslant \frac{1}{n}$.



Vizsgáljuk a $P_2, P_3, \ldots, P_k$ pontok P_1P_n szakasztól való távolságát, azaz a P_iT_i szakaszok hosszát. Legyen ezek maximuma t. Ekkor a $P_1, P_2, \ldots, P_k$ pontok az *ábra* szerint befoglalhatóak egy $1 \times 2t$-s téglalapba.

Ezt a téglalapot le tudjuk fedni legfeljebb $8t+2$ darab $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$-es négyzettel, hiszen az 1 hosszú oldal mentén 2 ilyen négyzet kell, a $2t$ hosszú oldal mentén pedig legfeljebb $4t+1$, hiszen $\frac{\lfloor 4t+1 \rfloor}{2} \geqslant \frac{4t}{2} = 2t$. Egy ilyen $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$-es négyzetbe legfeljebb egy S-beli pont eshet, hiszen egy ilyen négyzeten belül két pont egymástól való távolsága legfeljebb az átló hossza, azaz $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ lehet. Ennek alapján $k \leqslant 8t+2$, hiszen legfeljebb ennyi kis négyzettel lefedhető a terület, ahova a k darab S beli pont esik. Mivel $\frac{1}{x} < k$, így $\frac{1}{x} \leqslant 8t+2$, azaz $\frac{1}{8x} - \frac{1}{4} \leqslant t$. Hogyha $\frac{1}{16x} < \frac{1}{4}$ akkor $\frac{1}{4} < x$, amivel megfelelő c-re $x \geqslant cn^{-\frac{1}{3}}$ teljesül, így elég azt vizsgálni, hogyha $\frac{1}{16x} \geqslant \frac{1}{4}$. Ekkor

$$\frac{1}{8x} - \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{8x} - \frac{1}{16x} = \frac{1}{16x}, \quad \text{tehát} \quad \frac{1}{16x} \leqslant t.$$



Legyen P_a az a pont, amire $P_aT_a = t$ és $1 \leqslant a \leqslant k$. Vizsgáljuk a P_aP_n távolságot. A $P_aT_aP_n$ háromszög derékszögű, így a Pitagorasz-tétel szerint

$$P_aP_n^2 = P_aT_a^2 + T_aP_n^2 = t^2 + T_aP_n^2 \geqslant t^2 + (d-1)^2,$$

hiszen $P_1T_a \leqslant 1$ és $P_1T_a + T_aP_n = d$. Azt is tudjuk, hogy $P_aP_n \leqslant d$, hisz d az átmérő, így

$$d^2 \geqslant P_aP_n^2 \geqslant t^2 + (d-1)^2 \geqslant \frac{1}{256x^2} + d^2 - 2d + 1.$$

Átrendezve $2d - 1 \geqslant \frac{1}{256x^2}$, így $2d \geqslant \frac{1}{256x^2}$, tehát $x^2 \geqslant \frac{1}{512d}$, azaz $x \geqslant c \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$ egy megfelelő pozitív c konstansra.

Hogyha $d \geqslant n^{\frac{2}{3}}$, akkor az $x \geqslant \frac{d}{n}$ egyenlőtlenségből $x \geqslant \frac{n^{\frac{2}{3}}}{n} = n^{-\frac{1}{3}}$.

Hogyha $d \leqslant n^{\frac{2}{3}}$, akkor az $x \geqslant c \cdot \frac{1}{d^{\frac{1}{2}}}$ egyenlőtlenségből

$$x \geqslant c \cdot \frac{1}{\left(n^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = c \cdot n^{-\frac{1}{3}}.$$

Mindkét esetben azt kaptuk, hogy $x \geqslant c \cdot n^{-\frac{1}{3}}$ egy megfelelő c pozitív konstansra, és éppen ezt akartuk, így valóban létezik a feladat feltételét teljesítő egyenes.