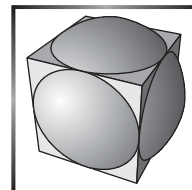


Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (789–790.)



A. 789. Legyen $p(x) = a_{21}x^{21} + a_{20}x^{20} + \dots + a_1x + 1$ egész együtthatós polinom, melynek minden gyöke valós és $1/3$ -nál kisebb abszolút értékű. A $p(x)$ polinom minden együtthatója a $[-2019a, 2019a]$ intervallumba esik egy rögzített a pozitív egész számra. Bizonyítsuk be, hogy ha $p(x)$ felbontható két alacsonyabb fokú egész együtthatós polinom szorzatára, akkor legalább az egyik szorzótényezőben mind-egyik együttható kisebb, mint a .

Javasolta: *Navid Safaei* (Teherán, Irán)

A. 790. András és Berta a következő játékot játssza: adott két kupac, az egyikben a , a másikban b darab kavics található. Az első körben Bea választ egy k pozitív egész számot, András pedig az egyik kupacból elvesz k darab kavicsot (ha k nagyobb a kupacban lévő kavicsok számánál, az egész kupacot elveszi). A második körben fordított a szereposztás: András mond egy pozitív egész számot, és Berta veszi el a kavicsokat valamelyik kupacból; és így tovább, felváltva. A játékot az veszi el, aki elveszi az utolsó kavicsot.

Melyik játékosnak van nyerő stratégiája?

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

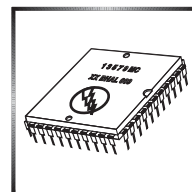


Beküldési határidő: 2021. január 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



Kacifántos kerítés – II. rész



Az első részben az idei Közép-Európai Informatikai Diákolimpia (CEOI) Kacifántos kerítés című feladatát oldottuk meg egy egyszerű, de nem elég hatékony algoritmussal. A megoldás a kerítésen keresett téglalapokat úgy, hogy végighaladt a kerítéselemeken és minden lehetséges bal felső csúcs magasságához megkereste a legtávolabbi jobb alsó csúcsot, majd egy kombinatorikai képlettel megadta az ebben a részben lévő téglalapokat.

A megoldás hatékonyságának növelése érdekében a kerítés egy más felosztását kellett találnunk, ahol nincs szükség keresésre. Ez a felosztás a kerítés alakjából következik: azok a csúcsok egy kerítéselemen, amelyek y koordinátája nagyobb mindkét szomszédos kerítéselem magasságánál csak olyan téglalapok csúcsai lehetnek, amelyek abban a kerítéselemben vannak. Az ezekből választott bal felső csúcsok jobb alsó párja a kerítéselem jobb alsó csúcsa, tehát azonnal adódik, keresésre nincs szükség.

Nézzük például a hátsó belső borítón megtalálható 1. ábrán a $(6, 4)$, L , K , J négyszöget. A rajta található téglalapok $y > 4$ koordinátájú bal felső csúcsaihoz csak olyan jobb alsó csúcsok tartozhatnak, amelyek csak ezen a kerítéselemben lehetnek, a legtávolabbi jobb alsó csúcs a $(8, 0)$. Ugyanakkor az is látszik, hogy az $y \geq 4$ koordinátájú csúcsok csak olyan téglalapok jobb alsó csúcsai lehetnek, amelyek bal felső csúcsa ebben a kerítéselemben van, és a bal felső csúcs y koordinátája 4-nél nagyobb.

Miután megszámláltuk az $y > 4$ bal felső csúcsokhoz tartozó téglalapokat, ezeket a pontokat elhagyhatjuk, mivel jobb alsó csúcsként is már megszámláltuk őket. Tehát a számolás után a kerítés egyszerűsíthető: a szomszédai közül kiemelkedő kerítéselem mindkét szomszédjánál magasabban fekvő csúcsai elhagyhatók. Így egy olyan kerítéselemünk marad, amely valamelyik szomszédjával azonos magasságú. Az előbbi példában a J és K csúcsokkal határolt kerítéselem felső vonalát a továbbiakban a $(6, 4)$ és L csúcsok alkotják.

Az előző lépés tovább folytatható: a $(6, 3)$, N , M , $(6, 4)$ téglalap (amely már két kerítéselem része) $y > 3$ csúcsaival képzett téglalapok megszámlálása után az $y > 3$ csúcsok elhagyhatók. Folytatásként az I , $(12, 2)$, P , $(6, 3)$ téglalap, majd a $(0, 1)$, Q , $(12, 2)$, $(0, 2)$ téglalap következik. Ez az utolsó lépés természetesen csak akkor következhet, ha a $(0, 2)$ és $HGFEDBC$ csúcsok által határolt részben lévő téglalapokat már megszámláltuk. Ezek az elhagyások addig folytathatók, amíg végül egy téglalap marad a kerítésből. Az ezen található téglalapok megszámlálása az előzőekhez hasonlóan történhet.

A bemutatott eljárás minden lépésében egy „kiemelkedő” téglalapot kapunk, amelynek alsó és jobb oldala kivételével minden pontja olyan téglalapok bal felső csúcsa, melyekhez csak az adott kiemelkedésben és alatta találhatóak a számolásnál figyelembe veendő jobb alsó csúcsok. Az előbbi példában bemutatott $(6, 4)$, L , K , J téglalap esetében a (b, f) bal felső csúcsok koordinátáira igaz, hogy $6 \leq b < 8$ és $4 < f \leq 6$, és a hozzájuk tartozó (j, a) jobb alsó csúcsok koordinátáira teljesül, hogy $b < j \leq 8$ és $0 \leq a < f$.

Nézzük általánosan, tehát legyen egy, az eljárásban talált téglalap bal felső csúcsa $(bal, fent)$ és jobb alsó csúcsa $(jobb, lent)$. Az elhagyása előtt megszámlándó téglalapok (b, f) bal felső csúcsának koordinátáira teljesül, hogy $bal \leq b < jobb$ és $lent < f \leq fent$, míg (j, a) jobb alsó csúcsainak koordinátáira igaz, hogy $b < j \leq jobb$ és $0 \leq a < f$. Egy adott (b, f) bal felső csúcshoz tartozó téglalapok száma tehát $(jobb - b) \cdot (f - 0)$. Ezeket összegezve a lehetséges (b, f) csúcsokra a téglalapok száma:

$$\sum_{b=bal}^{jobb-1} \sum_{f=lent+1}^{fent} (jobb - b) \cdot (f - 0).$$

Ebben az összegben minden előforduló $(jobb - b)$ tényezőt megszorozunk minden f értékkel. A szorzás és az összeadás asszociativitása következtében ezt úgy is végezhetjük, hogy először összegezzük a tényezőket külön-külön, majd az így kapott mennyiségeket szorozzuk össze. Tehát a kifejezés kevesebb szorzással fölrírva:

$$\sum_{b=bal}^{jobb-1} (jobb - b) \cdot \sum_{f=lent+1}^{fent} f.$$

Ebben két számtani sorozat szorzata szerepel, tehát az összegképlet alapján az eredmény:

$$\frac{(jobb - bal + 1) \cdot (jobb - bal)}{2} \cdot \frac{(lent + 1 + fent) \cdot (fent - lent)}{2}.$$

A téglalapok megszámlolását tehát megkapjuk a fenti eredmény alapján. Most már csak az a kérdés, hogy miként találjuk meg az „elhagyható” kerítésrészeket, amelyek a szomszédos kerítésrészeknél magasabbak. Az algoritmus nem végezhet a kerítéselemeken átnyúló keresést, tehát például a kerítéselemek eredeti sorrendjében kellene haladnia.

1. feladat: Vizsgáljuk meg az 1. ábrát, és vegyük észre, hogy milyen jellemző tulajdonságok alapján találjuk meg a keresett kiemelkedéseket!

Haladjunk a kerítés felső vonalán. Az első kiemelkedés a $(2, 3)$, F, E, D , amelyet az F csúcs zár. Ezt a részt elhagyva és a kerítés vonalán lefelé haladva a $(4, 3)$ pontban érünk a C csúcs magasságába, így a $C, (4, 3), G, (2, 4)$ téglalapot találjuk. Ennek levágása után a kerítés vonalán tovább menve a H csúcsban érünk egy kiemelkedés legjobboldalibb és legalsó pontjához, így elhagyhatjuk a $(0, 2), H, (4, 3), B$ téglalapot.

Megfigyelhető, hogy a kerítés vonalán egy csúcstól az alatta lévő csúcsig haladva találunk olyan pontot, amely egy kiemelkedés jobb alsó sarka. A megtaláláshoz csak azt kell tudnunk, hogy a vizsgált kerítésrész jobb oldalához melyik bal oldal tartozik. Nézzük a borítón lévő 2. ábrát. Az első lefelé haladás az EF szakaszon történik, ahol az F csúcs egy jobb alsó sarok, melynek bal alsó párja a kiemelkedés bal oldalán, a CD szakaszon található. Számoljuk meg a talált kerítésrészhez tartozó téglalapokat, majd hagyjuk el a D és E csúcsokat, és vegyünk föl egy új csúcsot, D' -t. A kerítés vonalán a következő lefelé haladás a GH szakaszon történik, a bal oldal pedig továbbra is a CD' szakaszra esik, így a $G'C$ szakasz feletti rész téglalapjai megszámlolandók és a D', F, G csúcsok elhagyhatók. Az ábrán a kiemelkedések jobb alsó csúcsától a bal alsó csúcsáig egy-egy nyíl mutat.

Továbbhaladva a kerítés vonalán lefelé a H pontba jutunk, azonban a hozzá tartozó bal oldal már nem a CD egyenesre esik, hanem az attól balra eső AB szakaszra. Ez éppen az a rész, ahol a CD szakaszt megelőzően fölfelé haladtunk. Így látható, hogy a kerítés vonalán a fölfelé és lefelé haladó mozgások szakaszai párba állíthatók. Ha továbbhaladunk a kerítés vonalán, akkor megfigyelhetjük ezeket a párokat az $IJKLMNOPQ$ részen haladva is. Itt az utolsó szakaszon lefelé mozogva a Q ponthoz tartozó bal alsó csúcs ismét az AB szakaszra esik, miután az $P'I$ fölötti kerítésrészt is elhagytuk.

2. feladat: Adjuk meg, hogyan lehetne könnyen megtalálni egy-egy „kiemelkedés” jobb alsó csúcsához a bal alsó csúcsot, tehát a *2. ábrán* jelölt nyilak végpontját!

Induljunk el a kerítés bal alsó csúcsától fölfelé és haladjunk végig a kerítés vonalán annak jobb oldali legalsó csúcsáig. Minden fölfelé haladásnak megvan a lefelé haladás párja a kerítés vonalán való mozgás során. Ezek a párok alkotják a kiemelkedések bal és jobb oldali szakaszát. A párok úgy következnek a kerítés vonalán, mint egy kifejezés nyitó és csukó zárójelei, vagyis egymásba ágyazva. Ha egy felfelé mozgás megelőz egy másikat, akkor a hozzá tartozó lefelé haladás később jön, a másikhoz tartozó lefelé mozgás után. Ez egy helyesen zárójelezett kifejezésnél is pontosan így van. Amikor egy kifejezést kiértékelünk, akkor a legbelső zárójelben lévő részt számoljuk ki, majd a zárójeleket elhagyva folytatjuk a számolást. Itt pontosan ugyanezt kell tennünk, csak a kifejezés helyett a téglalapok megszámlálását végezzük el, majd a kiemelkedő részt elhagyjuk, ahogyan a kifejezésnél a zárójeleket.

Az egymásba ágyazás, a belső párok elhagyása azt sugallja, hogy használjunk vermet a bal oldali szakaszok tárolására. A verem tetején mindig az a szakasz lesz, amelynek jobb oldali párja elsőként következik. A kerítés vonalán való haladás során minden felfelé mozgás egy új pár bal oldalát helyezi a veremre, míg a lefelé haladás egy párt vesz majd ki a veremből. Illetve ez csak akkor teljesül, ha a felfelé és lefelé haladás ugyanolyan magasról indult, tehát például a *2. ábrán* az *RSTU* kiemelkedésnél. Általában kicsit összetettebb a helyzet. Például az *I* csúcstól fölfelé mozogva először tegyük a verem tetejére az *IJ* szakaszt, majd a *KL* szakaszon lefelé haladva a verem tetején lévő szakaszt cseréljük az *IJ'* szakaszra. Továbbhaladva a kerítésen az *MN* szakaszon lefelé változtassuk a verem tetején lévő szakaszt *I''J*-re. Innen továbblépve a *PP'* szakaszon lefelé haladva vesszük ki az *IJ''* szakaszt a veremből. Figyelniünk kell tehát, hogy a lefelé mozgások során a verem tetején lévő szakasz alsó csúcsa és a lefelé mozgás szakaszának alsó csúcsa hogyan viszonyul egymáshoz. Innen látszik, hogy elegendő a veremben a felfelé haladó szakaszok alsó csúcsát elhelyezni, a felső csúcsra nincs szükség.

A program elkészítéséhez először be kell olvasnunk az adatokat, majd azokból meg kell adnunk a kerítés vonalán haladáskor érintett csúcsokat. Az *1. ábrán* ezeket a csúcsokat betűkkel jelöltük, melyeken ABC rendben fogunk végighaladni. Ezek a csúcsok a bemenetként kapott kerítéselemek magasságából és szélességéből számíthatók, a bemenet sorrendjében követik egymást. Így a bemenet feldolgozásakor egy lineáris futásidejű algoritmussal megadhatjuk a csúcsokat. Ennek a programrésznek az elkészítését az olvasóra bízunk. Feltételezzük a továbbiakban, hogy a következő programrészek futása előtt már rendelkezésünkre áll egy $2N + 2$ méretű `pont[0..2N+1]` tömb, amely sorrendben tartalmazza a kerítés vonalán érintett csúcsok (x, y) koordinátáit.

Ezen előkészítés után következzen a kerítés vonalának bejárása. Vegyünk föl egy `v` vermet, amely a `pont[]` tömb csúcsainak sorszámát tárolja, azaz a futás során legfölbjebb $2N + 1$ csúcs indexét. Helyezzünk a verem tetejére egy 0-t, az első csúcs sorszámát. Amikor ez a csúcs kikerül a verem tetejéről, akkor bejártuk a kerítés teljes vonalát, tehát az üres verem jelzi a műveletsor végét. A bal és jobb változók

mutatják, hogy a bejárás melyik csúcsokat vizsgálja. Kezdetben az első kerítéselem két felső pontjának sorszámát tartalmazza.

1. **Függvény** $KacifantosKerites2(N, h[0..N-1], w[0..N-1])$: Egész
2. $BeolvasasCsucsepites(N, h, w, pont)$
3. $darab := 0$
4. $v.Verembe(0)$
5. $bal := 1$
6. $jobb := 2$
7. **Ciklus amíg** nem $v.Üres()$

A végeredményt adó függvényt több részletben írjuk le, tehát az algoritmus-részletek és magyarázatok felváltva követik egymást. A jobb érthetőség érdekében a függvény sorait számozzuk. A ciklusmagban egy elágazás szerepel, amelyben először megállapítjuk, hogy a kerítésen történő mozgás a jobb és az utána következő csúcs között milyen irányú. Ha felfelé haladunk a kerítés vonalán, akkor veremljük a jobb oldali alsó csúcsot, vagyis megjegyezzük, hogy itt van egy kerítésrész bal oldali alsó csúcsa, majd továbblépünk a következő kerítéselemre. Ha azonos magasságú kerítéselemek vannak egymás mellett, akkor egyszerűen átmegyünk a következőre.

8. **Ha** $pont[jobb].y < pont[jobb+1].y$ **akkor**
9. $v.Verembe(jobb)$
10. $bal := jobb+1$
11. $jobb := jobb+2$
12. **egyébként ha** $pont[jobb].y = pont[jobb+1].y$ **akkor**
13. $jobb := jobb+2$
14. **egyébként**

Az elágazás utolsó része a leginkább összetett, vagyis amikor lefelé haladunk a kerítés vonalán, tehát amikor $pont[jobb] > pont[jobb+1]$. Ekkor három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a verem tetején lévő csúcs milyen magasan van a jobb után következő csúcsához képest.

15. **Ha** $pont[v.Felső()].y > pont[jobb+1].y$ **akkor**
16. $szamol(darab, pont[v.Felső()].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[v.Felső()].y)$
17. $pont[jobb].y := pont[v.Felső()].y$
18. $v.Veremből()$
19. $bal := v.Felső()+1$

Amikor a verem tetejéhez tartozó csúcs van magasabban, akkor csak az ő magasságáig lévő téglalapot mint kiemelkedést számoljuk meg és hagyjuk el. A példában ilyen eset a GH szakaszon történő lefelé mozgás. Ekkor a veremben az A és a C csúcs indexe van, a tetején a C csúcs sorszáma. Mivel a C csúcs magasabban van, mint a G csúcs, ezért a jobb indexnél lévő G csúcsot módosítjuk G' -re (ezzel hagytuk el a kiemelkedést), majd kivesszük a veremből a C csúcs sorszámát, ahol most egyedül az A csúcs indexe van. Ezután megadjuk a bal változóban a bal oldali felfelé menő rész felső csúcsának indexét, a példában a B csúcsot. Így a folytatásként szóba jöhető kiemelkedés a bal oldala az AB szakasz, jobb oldala a $G'H$ szakasz.

20. **egyébként ha** $\text{pont}[\text{v.Felső}()].y = \text{pont}[\text{jobb}+1].y$ **akkor**
21. $\text{szamol}(\text{darab}, \text{pont}[\text{v.Felső}()].x, \text{pont}[\text{jobb}].y, \text{pont}[\text{jobb}].x, \text{pont}[\text{v.Felső}()].y)$
22. $\text{v.Veremből}()$
23. **Ha** nem $\text{v.Üres}()$ **akkor**
24. $\text{bal} := \text{v.Felső}()+1$
25. $\text{jobb} := \text{jobb}+2$
26. **Elágazás vége**

Amikor a verem legfelső eleme által hivatkozott csúcs azonos magasságban van a lefelé mozgás alsó csúcsával, akkor a kiemelkedés megszámlálása után elhagyjuk ezt a kerítésrészt, vagyis kivesszük a veremből a tetején lévő elemet és továbblépünk előre a jobb változóval. Természetesen ezt csak akkor tehetjük meg, ha nem a 0-ás csúcsot vettük ki a veremből, hiszen azzal már befejeztük a bejárást. Az ábrán például az $RSTU$ kiemelkedésnél az R csúcsra mutat a verem felső száma és a TU szakaszon mozgunk lefelé. Ekkor a számolás után a verem tetején az A csúcs sorszáma található, a bal változó a B'' csúcsra, míg a jobb a V csúcsra hivatkozik.

27. **egyébként**
28. $\text{szamol}(\text{darab}, \text{pont}[\text{v.Felső}()].x, \text{pont}[\text{jobb}].y, \text{pont}[\text{jobb}].x, \text{pont}[\text{jobb}+1].y)$
29. $\text{pont}[\text{bal}].y := \text{pont}[\text{jobb}+1].y$
30. $\text{jobb} := \text{jobb} + 2$
31. **Elágazás vége**
32. **Elágazás vége**
33. **Ciklus vége**
34. $\text{KacinfatosKerates2} := \text{darab}$
35. **Függvény KacinfatosKerates2 vége**

A harmadik eset az a lehetőség, amikor a verem teteje által mutatott csúcs magassága kisebb, mint a lefelé mozgás alsó csúcsának magassága. Ekkor szintén megszámláljuk a kiemelkedő téglalaprészen lévő téglalapokat, majd a bal oldali szakasz felső csúcsának magasságát állítjuk a jobb oldali szakasz alsó csúcsának magasságára. Ez történik a példában, amikor az MN szakaszon mozgunk lefelé, és a J' csúcsból a J'' csúcsba lépünk.

A megoldást adó függvény a ciklus befejezése után nem tesz mást, mint a megszámlált téglalapok darab változóban lévő értékét visszaadja. Ehhez az algoritmusban többször is szereplő $\text{szamol}(\text{darab}, \text{bal}, \text{fent}, \text{jobb}, \text{lent})$ függvényt hívja meg minden kiemelkedő rész elhagyása előtt. A függvényben csak szorzás és 2-vel való osztás szerepel a korábban kiszámított képlet alapján. Csupán arra kell ügyelnünk, hogy a kifejezésben lévő mennyiségek szorzata igen nagy lehet, ezért túlcsoordulás történhet. Ennek elkerülésére a mennyiségek 1 000 000 007-tel vett maradékait kell szoroznunk, illetve a szorzat maradékát hozzáadnunk a darab eddigi értékéhez. Ennek a függvénynek a megírását is az olvasóra bízunk azzal a megjegyzéssel, hogy a 2-vel való maradékos osztásnál figyeljünk arra, hogy a szorzatok tényezői közül csak a párosakat osszuk.

Ezen algoritmus lépésszáma a bemenet N elemszámával arányos, tehát a program lineáris futásiidejű, így a versenyen is megállta volna a helyét hatékonyság szempontjából is.

Schmieder László