C. 1641. Határozzuk meg, hogy mi lesz az $a^3b^2c^5$ kifejezés együtthatója az $(a+b+c)^{10}$ hatványkifejezés kifejtésében.

Javasolta: *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1642. Az $ABCDEF$ konvex hatszög szemközti oldalai párhuzamosak, a három párhuzamos oldalpár egymástól való távolsága megegyezik, és az A és D csúcsánál derékszög van. Bizonyítsuk be, hogy a BE és CF átlók által bezárt szög 45°.

C. 1643. Számológép használata nélkül határozzuk meg a

$$(\log_{10} 11)\cdot(\log_{11} 12)\cdot(\log_{12} 13)\cdot\ldots\cdot(\log_{99} 100)$$

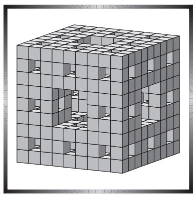
kifejezés értékét.

❄

Beküldési határidő: 2021. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5134–5141.)



B. 5134. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre a $\sqrt{\frac{3n-5}{n+1}}$ kifejezés szintén egész.

(*3 pont*) Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

B. 5135. Az ABC hegyesszögű háromszög A, B, C csúcsaiból húzott magasságok talppontjai rendre A_1, B_1 és C_1; az AA_1 és BB_1 magasságok felezőpontjai pedig rendre G és H. Igazoljuk, hogy a C_1GH háromszög körülírt köre áthalad az AB oldal F felezőpontján.

(*4 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5136. A kishitűek és nagyotmondók szigetén minden ember vagy kishitű vagy nagyotmondó. Egyszer egy külföldi tévedt a szigetre, és egy társaság meghívta vacsorázni. A vacsora végén megkérdezte a társaság mindegyik tagjától, hogy hány nagyotmondó van a társaságban. A kishitűek az igazságnál kisebb, a nagyotmondók pedig nagyobb számot válaszoltak. Igaz-e, hogy a kapott válaszok ismeretében egyértelműen meghatározható a nagyotmondók száma?

(*5 pont*) *Dürer Verseny* egy feladata alapján

B. 5137. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok körében:

$$x + y^2 = z^3,$$
$$x^2 + y^3 = z^4,$$
$$x^3 + y^4 = z^5.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5138. Az ABC nem egyenlő szárú háromszög A-ból, illetve B-ből induló belső szögfelezője a szemközti oldalt az A', illetve B' pontban metszi. Bizonyítandó, hogy $A'B'$ felezőmerőlegese akkor és csak akkor megy át a beírt kör középpontján, ha $AB' + BA' = AB$.

(*5 pont*) Javasolta: *Surányi László* (Budapest)

B. 5139. Az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontja M. Az ADM háromszög területe nagyobb a BCM háromszög területénél. A négyszög BC oldalának felezőpontja P, AD oldalának felezőpontja pedig Q, $AP + AQ = \sqrt{2}$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $ABCD$ négyszög területe kisebb, mint 1.

(*5 pont*)

B. 5140. Egy szigeten 10 ország található, ezek közül némelyek szomszédosak egymással, mások nem. Mindegyik ország egy saját valutát használ. Mindegyik országban egyetlen pénzváltó működik, a következő szabályok szerint: aki az adott ország valutájából 10 darabot befizet, az kap az összes szomszédos ország valutájából 1-1 darabot. Arisztid és Tasziló fejenként 100-100 egységgel rendelkeznek mindegyik ország valutájából. Ezután mindketten a nekik tetsző sorrendben váltogatják a pénzüket a különböző országok pénváltóiban, amíg csak van olyan valutájuk, amit tudnak váltani (tehát legalább 10 darab van belőle). Bizonyítsuk be, hogy a végén pontosan ugyanannyi bergengóc tallérja lesz Arisztidnek és Taszilónak (a bergengóc tallér a sziget egyik országának valutája).

(*6 pont*) *Mészáros Gábor* (Budapest) ötletéből

B. 5141. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{n}{i} \binom{n+1}{j+1} = 2^{2n}.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Nagy Dávid* (Cambridge)

❄

Beküldési határidő: 2021. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄