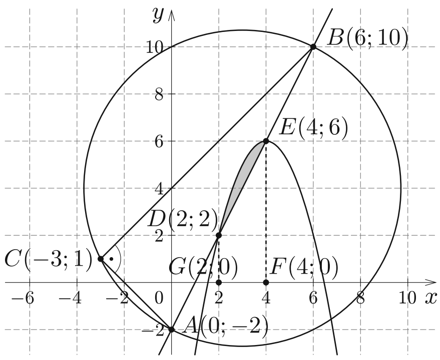


c) Ábrázoljuk együtt a koordinátarendszerben a háromszöget és a parabolát, a besatírozott rész területét akarjuk kiszámítani.

Mivel a BC egyenesének és a parabolának nincs közös pontja, ezért a BC egyenes a parabola fölött helyezkedik el. Az ABC háromszög területe:

$$T_{ABC}=\frac{BC\cdot CA}{2}=\frac{\sqrt{162}\cdot\sqrt{18}}{2}=$$
$$=27 \text{ (területegység)}.$$

A parabola alatti területnek az $x_1=2$ és $x_2=4$ határok közé eső része a Newton–Leibniz-formula alkalmazásával:

$$T_1=\int\limits_2^4(-x^2+8x-10)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{x^3}{3}+4x^2-10x\right]_2^4=$$
$$=\left(-\frac{64}{3}+64-40\right)-\left(-\frac{8}{3}+16-20\right)=\frac{28}{3}.$$

Az ábrán a $DEFG$ trapéz területe: $T_2=\frac{DG+EF}{2}\cdot FG=\frac{2+6}{2}\cdot 2=8$ (területegység). A szürkített területet a T_1 és T_2 területek különbségeként kapjuk:

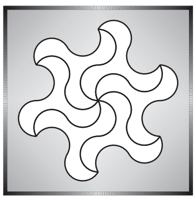
$$T=T_1-T_2=\frac{28}{3}-8=\frac{4}{3}\text{ (területegység)}.$$

Ebből az következik, hogy

$$\frac{T}{T_{ABC}}=\frac{\frac{4}{3}}{27}=\frac{4}{81},$$

tehát a szürkített terület az ABC háromszög területének pontosan $\frac{4}{81}$-ed része.

Bíró Bálint
Eger

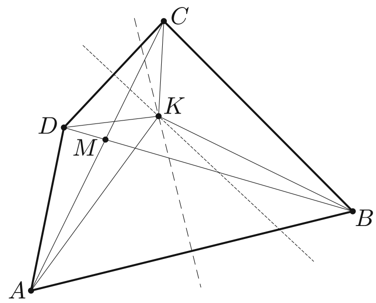


Matematika feladat megoldása

B. 5042. *Az $ABCD$ konvex négyszögről tudjuk, hogy nem trapéz, valamint, hogy AC és BD átlói egyenlő hosszúak. Az átlók metszéspontját jelölje M. Mutassuk meg, hogy az ABM és CDM körök második, M-től különböző metszéspontja a BMC szög felező egyenesére esik.*

(*4 pont*)

Megoldás. Az AB és CD szakaszok felezőmerőlegesei messék egymást a K pontban. A K pont biztosan létezik, hiszen ellenkező esetben $AB \parallel CD$, viszont a feltétel szerint $ABCD$ nem trapéz.



Egy szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától, így $KA=KB$ és $KC=KD$. Azt is tudjuk, hogy $AC=BD$, így az AKC és BKD háromszögekben az oldalak páronként egyenlő hosszúak, azaz a két háromszög egybevágó. Az egybevágóság alapján $KAM\sphericalangle = KAC\sphericalangle = KBD\sphericalangle = KBM\sphericalangle$. A kerületi szögek tételének megfordítása miatt az A, B, K és M pontok egy körön vannak. Hasonlóan azonnal látható, hogy a C, D, M, K pontok is egy körön vannak.

Ezzel beláttuk, hogy az (ABM) és (CDM) körök második metszéspontja a K pont.

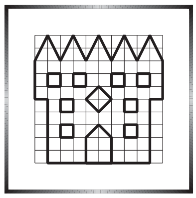
Az AKC és BKD háromszögek egybevágóságából következően a K pont ugyanolyan messze van az AC és BD egyenesektől, tehát mindenképpen rajta van az AC és BD egyenesek egyik szögfelezőjén. Ez a szög nem lehet az $AMB\sphericalangle = CMD\sphericalangle$ szög, hiszen az $AMKB$ és $DMKC$ húrnégyszögek, tehát konvexek.

A K pont így biztosan a BMC szög felezőjére illeszkedik.

Bán-Szabó Áron (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 55 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 50, 3 pontot 2 tanuló. 1 pontos 1, 0 pontos 2 tanuló dolgozata.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (674–678.)



K. 674. Anna néni udvarában 120 állat él: barna tyúkok, fehér kacsák, barna malacok és fehér nyulak. A fehér állatok száma 64, a kétlábú állatok száma 84. Kétszer annyi barna tyúk él itt, mint fehér nyúl. Melyik fajta állatból hány él Anna néni udvarában?

K. 675. Egy nagy cégnél karácsonyi partit rendeztek, és többen elvitték a házastársukat is magukkal. A partin 5-ször annyi férfi volt jelen, mint nő. Este 10 órakor néhány férfi a feleségével együtt hazaindult, ekkor a partin jelenlevő nők száma a jelenlevő férfiak számának hetedrészére csökkent. A férfiak hányadrésze ment haza 10 órakor?