Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Hány olyan egész szám van, amelyre teljesül, hogy $(x+2)^3-(x-2)^3<$ <2020? (*5 pont*)

Ha barátunk találkozik egy lánnyal a vizsgaidőszakban, akkor $\frac{2}{3}$ valószínűséggel szerelmes lesz belé. Ha szerelmes, akkor nem tud koncentrálni, ezért csak 10% az esélye annak, hogy fel tud készülni a vizsgáira, míg ha éppen nem szerelmes, akkor ez az arány 70%.

b) Mutassuk meg, hogy a sikeres vizsga valószínűsége 0,3. (*5 pont*)

c) Ha tudjuk, hogy sikerült a vizsgája, mennyi annak a valószínűsége, hogy szerelmes? (*2 pont*)

2. *a*) Egy mértani sorozat harmadik tagja 32, a hatodik tagja 2048. Számítsuk ki a sorozat első hat tagjának az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését. (*6 pont*)

Tekintsük a következő állításokat.

A: Egy adatsokaság mediánja mindig eleme az adatsokaságnak.

B: Ha $f(x)=3x+2$ és $g(x)=|x|-1$, akkor $f\big(g(x)\big)=3\cdot|x|-1$. (Itt $f\big(g(x)\big)$ összetett függvény képzését jelöli.)

C: Ha egy sorozat nem konvergens, akkor nem monoton.

b) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Mindenhol indokolni is kell, példával, ellenpéldával, számolással stb. (*6 pont*)

c) Fogalmazzuk meg a *C* állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

3. *a*) Egy derékszögű trapézba kör írható. Az alapok hossza 150 cm és 300 cm. Mekkora a beírt kör sugara? (*7 pont*)

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{aligned}\log_2(x^2y)&=4,\\ \log_4 x-3\log_4 y&=-\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

(*7 pont*)

4. *a*) Tekintsük a (8×8-as) sakktábla mezőinek középpontjait egy gráf csúcsainak. Két csúcs között pontosan akkor vezessen él, ha az egyik mezőről el lehet jutni a másikra egy szabályos futólépéssel. Hány éle van az így kapott gráfnak? (A futó átlósan képes lépni akármennyit.) (*5 pont*)

b) Adott az f függvény: $f(x)=90x^2-6x^3$. Határozzuk meg a p lehetséges értékeit úgy, hogy $\int\limits_0^p f(x)\,\mathrm{d}x=0$ teljesüljön. (*6 pont*)

II. rész

5. *a*) Melyek azok a háromjegyű pozitív egész számok, amelyekhez megadható olyan hárompontú egyszerű gráf, hogy annak fokszámai megegyeznek a háromjegyű szám számjegyeivel? Minden esetben adjuk is meg a megfelelő gráfokat. (*6 pont*)

Tekintsük a következő, a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett függvényt:

$$f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}.$$

b) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. (*6 pont*)

c) Hány rácsponton megy át a függvény? (Rácspont: olyan pont a koordinátarendszerben, amelynek mindkét koordinátája egész szám.) (*4 pont*)

6. *a*) Jelölje p_n az n-edik pozitív prímszámot. Hány 0-ra végződik a

$$p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_{2020}$$

szorzat? (*3 pont*)

Az ABC háromszög oldalai: $AB=9$ cm, $BC=7$ cm, $CA=6$ cm.

b) Mutassuk meg, hogy a beírt kör sugara egy tizedre kerekítve 1,9 cm. (*2 pont*)

c) Mekkora érintési szakaszok húzhatók a B csúcsból a beírt körhöz? (*4 pont*)

d) Mekkora annak a konkáv síkidomnak a területe, amelyet a B csúcsból húzott két érintési szakasz és a beírt kör íve határol? (*7 pont*)

7. *a*) Adjuk meg a $3x^2+3y^2-6x+12y=2020$ egyenletű k kör középpontját és sugarát. (*4 pont*)

b) Egy négyzet két szemközti csúcsának koordinátái $A(1;1)$ és $C(5;3)$. Írjuk fel a négyzetbe írható kör egyenletét. (*4 pont*)

c) Írjuk fel azoknak az egyeneseknek az egyenletét, amelyek egyszerre felezik a fenti négyzet és a k kör területét. (*3 pont*)

d) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$3^{2(x+1)(x-2)}=9^{\frac{x+1}{x-2}}.$$ (*5 pont*)

8. *a*) Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyre teljesül, hogy bármely két számjegye relatív prím egymáshoz? (*7 pont*)

b) Egy dobozban cukorkák vannak, 2 narancsos és 3 citromos. Addig veszünk ki cukorkákat (a kivett cukorkákat elszopogatjuk), amíg mindkét fajtából húzunk legalább egyet. Határozzuk meg annak az öt eseménynek a valószínűségét, hogy ehhez 1, 2, 3, 4, illetve 5 cukorka kihúzására lesz szükség, majd számítsuk ki a húzások számának várható értékét. (*9 pont*)

9. Bergengócia 2025-re foci világbajnokságot szeretne rendezni, melyet a frissen felépített stadionban rendeznek meg. A rendezvény logója egy 2025 pontú teljes gráf lesz, melynek éleit piros, fehér és zöld színnel színezik. (Minden élt kiszíneznek és minden él csak egyfajta színű lehet. Nem feltétlenül kell mindegyik színt használni, de csak ezeket használhatják.) Közvéleménykutatás keretében kiderítették, hogy azok a legszebb színezések, ahol a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának (és egyik sem 0).

a) Hányféle értéke lehet a piros élek számának? (*4 pont*)

Egy sajtótájékoztatón azt is elmondták, hogy a fenti színezések közül egy olyat fognak választani, amelyben a különböző színű élek számának a szorzata a legnagyobb lesz.

b) Hány piros színű éle lesz a logónak? (*6 pont*)

c) János egy szabályos tízszög átlói közül véletlenszerűen kijelöl ötöt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezek között az élek között lesz legalább egy a legrövidebb vagy a leghosszabb átlók közül? Az eredményt normálalakban adjuk meg. (*6 pont*)

Fridrik Richárd
Szeged

Megoldások a 2020/8. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Mely x valós számokra értelmezhető az*

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-\sqrt{x-3}}{\log_2(x-2)}}$$

függvény? (*5 pont*)

b) *Adjunk meg legalább két olyan valós számot, amelyekkel a*

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+7}$$

és a

$$16^x\cdot 8^{2x}\cdot 4^{6x}\cdot\sqrt{2}=64$$

egyenletek valós gyökei valamilyen sorrendben egy-egy számtani sorozat egymás utáni tagjai lehetnek. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A logaritmus értelmezése miatt $x-2>0$, azaz $x>2$. Ugyanakkor $\log_2(x-2)\neq 0$, tehát $x-2\neq 1$, vagyis $x\neq 3$.

A négyzetgyök értelmezéséből $x-3\geqslant 0$, illetve $x\geqslant 3$ következik. Ez az előző eredménnyel együtt azt jelenti, hogy

$$x>3. \tag{1}$$