A 61. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása I.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

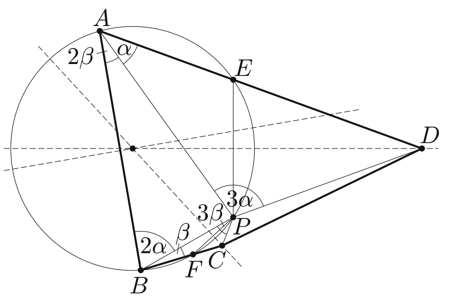
A szerkesztőség

Első nap*

1. feladat. *Tekintsük az $ABCD$ konvex négyszöget. A P pont az $ABCD$ belsejében van. Fennállnak az alábbi, arányokra vonatkozó egyenlőségek:*

$$PAD\sphericalangle : PBA\sphericalangle : DPA\sphericalangle = 1:2:3 = CBP\sphericalangle : BAP\sphericalangle : BPC\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy a következő három egyenes egy ponton megy át: az $ADP\sphericalangle$ és a $PCB\sphericalangle$ szög belső szögfelezője és az AB szakasz felezőmerőlegese.



Gyimesi Péter megoldása. Legyen $PAD\sphericalangle = \alpha$, $PBA\sphericalangle = 2\alpha$ és $APD\sphericalangle = 3\alpha$, $CBP\sphericalangle = \beta$, $BAP\sphericalangle = 2\beta$ és $BPC\sphericalangle = 3\beta$. Vegyük fel az E pontot az AD egyenesen úgy, hogy $APE\sphericalangle = \alpha$ teljesüljön. Így $AEP = 180^\circ - 2\alpha$, $ABP\sphericalangle + AEP\sphericalangle = 180^\circ$, tehát $ABPE$ húrnégyszög.

$$PED\sphericalangle = 2\alpha = 3\alpha - \alpha =$$
$$= APD\sphericalangle - APE\sphericalangle = EPD\sphericalangle,$$

tehát $ED = PD$. Az $ADP\sphericalangle$ szögfelezője egyúttal az EP szakasz felezőmerőlegese.

Ezt a másik oldalon is meg lehet csinálni: Vegyük fel az F pontot a BC egyenesen úgy, hogy $BPF\sphericalangle = \beta$ legyen. Az előbbiekhez hasonlóan kijön, hogy $ABFPE$ húrötszög és a $PCB\sphericalangle$ szögfelezője a PF szakasz felezőmerőlegese.

A három húr felezőmerőlegese átmegy a kör középpontján.

2. feladat. *Az a, b, c, d valós számok olyanok, hogy $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d > 0$ és $a+b+c+d=1$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$(a+2b+3c+4d)a^a b^b c^c d^d < 1.$$

*A második nap feladatainak megoldását a januári számban közöljük.

Weisz Máté megoldása. Az a, b, c, d számokra a súlyozott számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva

$$a^a b^b c^c d^d \leqslant a \ \cdot a \ + b \cdot b + c \cdot c + d \cdot d = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

adódik. Így ha igazoljuk, hogy

$$(a + 2b + 3c + 4d)\big(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\big) < 1,$$

abból a feladat állítása is következik. Most n szerinti teljes indukcióval belátjuk, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok (egyik) legnagyobbika a_1, valamint $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, akkor

$$\left(a_1 + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leqslant 1.$$

Azt is látni fogjuk, hogy $n = 3$ esetén egyenlőség nem teljesülhet.

$n = 1$ esetén az állítás nyilvánvaló: $a_1^3 = 1^3 \leqslant 1$. Most tegyük meg az indukciós lépést n-ről $(n+1)$-re. Azt kellene igazolnunk, hogy ha a pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ számok közül a_1 a legnagyobb, és az összegük 1, akkor

$$\left(a_1 + 3\sum_{i=2}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) \leqslant 1.$$

Legyen $a_1' = a_1 + a_{n+1}$ és $a_i' = a_i$ minden $2 \leqslant i \leqslant n$ esetén. Így

$$\sum_{i=1}^{n} a_i' = \sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1,$$

valamint az a_i' számok legnagyobbika természetesen a_1', így az indukciós feltevést használva

$$\left(a_1' + 3\sum_{i=2}^{n} a_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i')^2\right) \leqslant 1.$$

Tehát elegendő lenne igazolnunk, hogy

$$\left(a_1 + 3\sum_{i=2}^{n+1} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) \leqslant \left(a_1' + 3\sum_{i=2}^{n} a_i'\right)\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i')^2\right),$$

azaz

$$\left(\left(a_1 + a_{n+1} + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right) + 2a_{n+1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(a_1 + a_{n+1} + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right)\left(\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2\right) + 2a_1 a_{n+1}\right).$$

A beszorzás után mindkét oldalon megjelenő $\left(a_1 + a_{n+1} + 3\sum\limits_{i=2}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i^2\right)$ tagot levonva, majd $2a_{n+1}$-gyel osztva a

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \leqslant \left(a_1 + a_{n+1} + 3\sum_{i=2}^{n} a_i\right)a_1 = \sum_{i=1}^{n+1} a_1 a_i + 2\sum_{i=2}^{n} a_1 a_i$$

becsléshez jutunk, ami a_1 maximális volta miatt láthatóan mindig teljesül, ezzel az indukciós lépést megtettük. Világos az is, hogy $n \geqslant 2$ esetén egyenlőség nem teljesülhet, mert a jobb oldalon a második összeg nem üres, tehát $n = 3$-tól kezdve szigorúan is igaz az indukciós állítás. Alkalmazzuk a kapott eredményt $n = 4$ és $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = c$, $a_4 = d$ választással. Felhasználva még, hogy $b \geqslant d$ látjuk, hogy

$$(a + 2b + 3c + 4d)(a_2 + b_2 + c_2 + d_2) \leqslant (a + 3b + 3c + 3d)(a_2 + b_2 + c_2 + d_2) < 1,$$

és ezzel a bizonyítást befejeztük.

3. feladat. *Adott* $4n$ *kavics, amelyeknek a súlya rendre* $1, 2, 3, \ldots, 4n$. *Mindegyik kavics n szín közül az egyik színnel van kifestve; mindegyik színből négy kavics van. Mutassuk meg, hogy a kavicsokat el lehet rendezni két kupacba úgy, hogy mindkét alábbi feltétel teljesüljön:*

- *A két kupac összsúlya azonos.*
- *Mindegyik kupac minden színből két kavicsot tartalmaz.*

Kocsis Anett megoldása. Először is párosítsuk össze az $(1, 4n)$, $(2, 4n-1)$, $\ldots$, $(2k, 2k+1)$ súlyú kavicsokat.

Ezután vegyünk egy n csúcsú gráfot, ahol a gráf csúcsai a színek. Húzzunk be $2n$ élet a gráfba a már létrehozott párjaink szerint: ha a $(2n-k, 2n+k+1)$ párban az egyik a, a másik b színű, akkor húzzunk be egy ab élet a gráfban. Ekkor lehetnek többszörös és hurokéleink is. Ezután tekintsük a gráfunkat. Ez egy 4-reguláris gráf, hiszen minden színből 4 kavics van. Szeretnénk kiválasztani úgy néhány élet, hogy a kiválasztott élek egy 2-reguláris gráfot feszítsenek ki az n csúcson.Tegyük fel, hogy a gráf összefüggő; ha nem az, akkor minden összefüggő komponensre elvégezzük a következőket: Elhagyjuk a hurokéleket. Ezzel még mindig minden csúcs foka páros, azaz van benne Euler-kör. Menjünk végig ezen az Euler-körön, és számozzuk meg az éleket. Amikor olyan csúcshoz érünk, ahol az eredeti gráfban hurokél volt, ott tegyük vissza a hurokélet, és annak is adjunk sorszámot, mégpedig ha az i-edik élen jöttünk be a csúcshoz, akkor az $i+1$-ediket. Ezután tekintsük a páros sorszámú éleket. Az az állításunk, hogy ezek éppen olyan élek, amiket kerestünk.

Három típusú csúcsunk van, ezeknek az éleit vizsgáljuk:

- hurokéles csúcs: i, $i+1$, $i+2$ (az $i+1$ lesz a hurokél sorszáma, tehát ez kettő fokot ad);
- kezdő csúcs: 1, $2n$, k, $k+1$, azaz két páros és két páratlan;
- a maradék csúcsok: i, $i+1$, j, $j+1$ azaz két páros és két páratlan.

  Azaz az egyik kupacunk azok a párok lesznek, amiknek a páros élek feleltek meg, a másik kupacunk azok a párok lesznek, amiknek a páratlan élek feleltek meg.